Exercices de mécanique analytique

20 octobre 1997

Exercice 1 : Trouver la loi de composition du groupe des transformations de Galilée. Quel est l'inverse de la transformation $(t_0, \vec{a}, \vec{v}, \Lambda)$?

Exercice 2 : Soit $\vec{F}(\vec{q})$ un champ de forces sur $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\vec{F}(\vec{q})$ dérive d'un potentiel $V(\vec{q})$ ($\vec{F}(\vec{q}) = -\overrightarrow{\text{grad}}\ V(\vec{q})$, champ conservatif) si et seulement si il est irrotationnel ($\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{F}(\vec{q}) = \vec{0}$). $\text{rot}\, F = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$

Exercice 3 : Est-ce que le champ

$$\vec{F}(\vec{q}) \equiv \begin{pmatrix} y^2z^3 - 6xz^2 \\ 2xyz^3 \\ 3xy^2z^2 - 6x^2z \end{pmatrix}, \qquad \vec{q} \equiv (x, y, z),$$

$V = \int_0^1 F(t\cdot\vec{q})\cdot\vec{q}\, dt$

est, conservatif ? Si oui, déterminer le potentiel $V(\vec{q})$ dont il dérive et calculer
$\vec{F} = -\text{grad}\, \vec{V}$
le travail de $\vec{F}$ lorsqu'une particule se déplace le long de la courbe $x(t) = 4t^3$,
c.f. notes
$y(t) = 2t^2$, $z(t) = t$ pour $0 \leq t \leq 1$.

Série 1 Hiver 97/98

Exercice 1 : Trouver la loi de composition du groupe des transformations de Galilée. Quel est l'inverse de la transformation $(t_0, \vec{a}, \vec{v}, \Lambda)$?

Groupe de Galilée

$$\begin{aligned} G &= \text{ensemble des transformations de Galilée} \\ g &= \text{élément de } G \\ g &= (t_0, \vec{a}, \vec{v}, \Lambda) \qquad \Lambda \in SO(3). \end{aligned}$$

Transformation de Galilée g :

$$\boxed{\begin{aligned} t &\underset{g}{\longrightarrow} t' = t + t_0 \\ x_i &\underset{g}{\longrightarrow} x'_i = a_i + v_i t + \sum_{j=1}^{3} \Lambda_{ij} x_j \qquad (i = 1, \ldots, 3). \end{aligned}}$$

Composition de 2 transformations de Galilée :

$$(t, x_i) \underset{g}{\longrightarrow} (t', x'_i) \underset{g'}{\longrightarrow} (t'', x''_i)$$

$$\begin{aligned} t'' &= t' + t'_0 = t + (t_0 + t'_0) = t + t''_0 \\ x''_i &= a'_i + v'_i t' + \sum_{j=1}^{3} \Lambda'_{ij} x'_j \\ &= a'_i + v'_i (t + t_0) + \sum_{j=1}^{3} \Lambda'_{ij} \Big(a_j + v_j t + \sum_{k=1}^{3} \Lambda_{jk} x_k \Big) \\ x''_i &= a''_i + v''_i t + \sum_{k=1}^{3} \Lambda''_{ik} x_k \end{aligned}$$

avec $\boxed{t''_0} = t'_0 + t_0$, $\boxed{a''_i} = a'_i + \sum_{j=1}^{3} \Lambda'_{ij} a_j + v'_i t_0$, $\boxed{v''_i} = v'_i + \sum_{j=1}^{3} \Lambda'_{ij} v_j$, $\boxed{\Lambda''_{ik}} = \sum_{j=1}^{3} \Lambda'_{ij} \Lambda_{jk} = (\Lambda' \Lambda)_{ik}$.

La composition de 2 transformations de Galilée redonne une transformation de Galilée.

Loi de composition : $g' \circ g = g''$

$$(t'_0, \vec{a}', \vec{v}', \Lambda') \circ (t_0, \vec{a}, \vec{v}, \Lambda) = (t'_0 + t_0, \vec{a}' + \Lambda' \vec{a} + \vec{v}' t_0, \vec{v}' + \Lambda' \vec{v}, \Lambda' \Lambda).$$

Notation : $\Lambda\vec{v} =$ vecteur de composantes $(\Lambda\vec{v})_i = \sum_{j=1}^{3} \Lambda_{ij} v_j$.

L'élément neutre de G est $g_0 = (0, 0, 0, \mathbb{1})$. g' est l'inverse de g si

$$\begin{aligned} t_0' + t_0 &= 0 \\ \vec{a}\,' + \Lambda'\vec{a} + \vec{v}\,' t_0 &= 0 \\ \vec{v}\,' + \Lambda'\vec{v} &= 0 \\ \Lambda'\Lambda &= \mathbb{1} \\ \Lambda' &= \Lambda^{-1},\ \vec{v}\,' = -\Lambda^{-1}\vec{v},\ t_0' = -t_0,\ \vec{a}\,' = -\Lambda^{-1}(\vec{a} - \vec{v}t_0) \end{aligned}$$

donc $g^{-1} = (-t_0, \Lambda^{-1}(\vec{v}t_0 - \vec{a}), -\Lambda^{-1}\vec{v}, \Lambda^{-1})$,

G est un groupe continu à $(1 + 3 + 3 + 3) = 10$ paramètres.

<u>Exercice 2 :</u> Soit $\vec{F}(\vec{q})$ un champ de forces sur $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\vec{F}(\vec{q})$ dérive d'un potentiel $V(\vec{q})$ ($\vec{F}(\vec{q}) = -\overrightarrow{\text{grad}}\ V(\vec{q})$, champ conservatif) si et seulement si il est irrotationnel ($\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{F}(\vec{q}) = \vec{0}$).

- Si $\vec{F}(\vec{q})$ dérive d'un potentiel, il existe $V(\vec{q})$ tel que $\vec{F}(\vec{q}) = -\overrightarrow{\text{grad}}\ V(\vec{q})$. Donc $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{F}(\vec{q}) = \vec{0}$ car $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{grad}}\ V(\vec{q})$ est nul.
- Si $\vec{F}(\vec{q})$ est irrotationnel, $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{F}(\vec{q}) = 0$, et du théorème de Stokes :

$$\int_S \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{F}(\vec{q}) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \oint_{\partial S} \vec{F}(\vec{q}) \cdot \mathrm{d}\vec{q} \qquad \text{(surface } S \text{ de bord } \partial S\text{)},$$

on déduit que $\oint_\Gamma \vec{F}(\vec{q}) \cdot \mathrm{d}\vec{q} = 0$ pour tout chemin fermé Γ.

$\vec{F}(\vec{q})$ est donc conservatif.

<u>Exercice 3 :</u> Est-ce que le champ

$$\vec{F}(\vec{q}) \equiv \begin{pmatrix} y^2z^3 - 6xz^2 \\ 2xyz^3 \\ 3xy^2z^2 - 6x^2z \end{pmatrix}, \qquad \vec{q} \equiv (x, y, z),$$

est conservatif ? Si oui, déterminer le potentiel $V(\vec{q})$ dont il dérive et calculer le travail de $\vec{F}$ lorsqu'une particule se déplace le long de la courbe $x(t) = 4t^3$, $y(t) = 2t^2$, $z(t) = t$ pour $0 \leq t \leq 1$.

- $$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y}(3xy^2z^2 - 6x^2z) - \dfrac{\partial}{\partial z}(2xyz^3) \\ \dfrac{\partial}{\partial z}(y^2z^3 - 6xz^2) - \dfrac{\partial}{\partial x}(3xy^2z^2 - 6x^2z) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(2xyz^3) - \dfrac{\partial}{\partial y}(y^2z^3 - 6xz^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  $\vec{F}(x,y,z)$ dérive donc d'un potentiel, $V(x,y,z)$ est solution du système d'équations différentielles

  $$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} = -y^2z^3 + 6xz^2, \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = -2xyz^3, \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} = -3xy^2z^2 + 6x^2z. \end{cases}$$

  En intégrant partiellement chaque équation on trouve :

  $$V(x,y,z) = -xy^2z^3 + 3x^2z^2 + C.$$

- Puisque $\vec{F}(x,y,z)$ est conservatif, le travail $W_{\vec{F}}$ de $\vec{F}$ ne dépend pas du chemin parcouru mais que du point de départ $A = (0,0,0)$ et du point d'arrivée $B = (4,2,1)$:

  $$W_{\vec{F}} = \int_A^B \vec{F}(\vec{q}) \cdot \mathrm{d}\vec{q} = -\left[V(4,2,1) - V(0,0,0)\right] = -32.$$

Exercices de mécanique analytique

27 octobre 1997

Exercice 4 : Etant donné un système de N points matériels, établir les deux lois de conservation suivantes:

i) - l'énergie totale d'un système autonome dont les forces dérivent d'un potentiel est une constante du mouvement,

ii) - le moment cinétique total d'un système isolé par rapport à un point fixe quelconque est une constante du mouvement si les forces intérieures sont des sommes de forces à deux corps centrales.

Exercice 5 : Pour un système de N points matériels, soit le potentiel *intérieur*

$$V^{\text{int}}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N) = \sum_{k=2}^{N} \sum_{n'=1}^{k-1} V_{kn'}(\vec{x}_k - \vec{x}_{n'}).$$

Montrer que les forces intérieures qui en résultent sont des sommes de forces à deux corps données par :

$$\vec{F}_n^{\text{int}}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N) = \sum_{\substack{n'=1 \\ n' \neq n}}^{N} \vec{F}_{nn'}(\vec{x}_n - \vec{x}_{n'}),$$

avec

$$\vec{F}_{nn'}(\vec{x}_n - \vec{x}_{n'}) = \begin{cases} -\overrightarrow{\text{grad}}_n \, V_{nn'}(\vec{x}_n - \vec{x}_{n'}) & \text{si } n > n', \\ -\overrightarrow{\text{grad}}_n \, V_{n'n}(\vec{x}_{n'} - \vec{x}_n) & \text{si } n < n'. \end{cases}$$

Exercice 6 : Supposer que l'énergie potentielle $V(q)$ d'un point matériel sur la droite présente un maximum en $q = q_0$. Quelle est la forme des orbites séparatrices (d'énergie $E = V_{\text{max}}$) au voisinage du point d'équilibre $q = q_0$, $p = 0$?

Si $E = V_{\text{max}}$, quel temps faut-il au point matériel pour atteindre le point $q = q_0$ à partir d'un point $q = q_1$?

[Indication : développer $V(q)$ autour du point $q = q_0$]

Exercice 7 : Soit E l'énergie d'une orbite fermée de l'espace de phase d'un point matériel sur la droite et $S(E)$ l'aire du domaine de l'espace de phase intérieur à l'orbite. Le mouvement sur cette orbite est périodique; montrer que sa période vaut

$$T = \frac{\mathrm{d}S(E)}{\mathrm{d}E}.$$

[Indication : établir une expression de $S(E)$ et utiliser l'équation donnant l'horaire selon lequel une orbite est parcourue]

Série 2 Hiver 97/98

> <u>Exercice 4 :</u> Etant donné un système de N points matériels, établir les deux lois de conservation suivantes:
>
> - l'énergie totale d'un système autonome dont les forces dérivent d'un potentiel est une constante du mouvement,
> - le moment cinétique total d'un système isolé par rapport à un point fixe quelconque est une constante du mouvement si les forces intérieures sont des sommes de forces à deux corps centrales.

Proposition : L'énergie totale $E = T + V$ d'un système autonome dont les forces dérivent d'un potentiel est conservée.

$$\begin{aligned} \vec{F}_n &= -\overrightarrow{\mathrm{grad}}_n\, V(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N) \\ \Big(F_{n,i} &= -\frac{\partial}{\partial x_{n,i}} V(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N)\Big). \end{aligned}$$

Calculer la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique totale.

$$\begin{aligned} T &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2} m_n |\dot{\vec{x}}_n|^2 = \text{énergie cinétique totale} \\ \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \sum_{n=1}^{N} m_n \dot{\vec{x}}_n \cdot \ddot{\vec{x}}_n \\ &= \sum_{n=1}^{N} \vec{F}_n(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N)\, \dot{\vec{x}}_n \\ &= -\sum_{n=1}^{N} \overrightarrow{\mathrm{grad}}_n\, V(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N)\, \dot{\vec{x}}_n \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V. \end{aligned}$$

On a tenu compte de la loi de Newton : $m_n \ddot{\vec{x}}_n = \vec{F}_n$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T + V) = 0.$$

Proposition : Le moment cinétique total d'un système isolé par rapport à un point fixe quelconque est conservé si les forces intérieures sont des sommes de forces à deux corps centrales.

Moment cinétique total par rapport au point de vecteur-lieu $\vec{a}$:

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \sum_{n=1}^{N} m_n(\vec{x}_n - \vec{a}) \wedge \dot{\vec{x}}_n \; = \; \text{moment cinétique total} \\
&= \sum_{n=1}^{N} m_n \vec{x}_n \wedge \dot{\vec{x}}_n - \vec{a} \wedge \vec{P}, \\
\vec{P} &= \sum_{n=1}^{N} m_n \dot{\vec{x}}_n \; = \; \text{quantité de mouvement totale}, \\
\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} &= \sum_{n=1}^{N} m_n \vec{x}_n \wedge \ddot{\vec{x}}_n.
\end{aligned}$$

On a tenu compte de la conservation de la quantité de mouvement totale: $\mathrm{d}\vec{P}/\mathrm{d}t = 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} &= \sum_{n=1}^{N} \vec{x}_n \wedge \vec{F}_n \\
\vec{F}_n(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) &= \sum_{\substack{n'=1 \\ n \neq n'}}^{N} \vec{F}_{n,n'}(\vec{x}_n - \vec{x}_{n'}), \\
\vec{F}_{n,n'} &= \text{force exercée par le } n'\text{-ème point matériel sur le } n\text{-ème point.} \\
\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} &= \sum_{\substack{n,n'=1 \\ n \neq n'}}^{N} \vec{x}_n \wedge \vec{F}_{nn'}(\vec{x}_n - \vec{x}_{n'}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{n,n'=1 \\ n \neq n'}}^{N} \left(\vec{x}_n \wedge \vec{F}_{nn'}(\vec{x}_n - \vec{x}_{n'}) + \vec{x}_{n'} \wedge \vec{F}_{n'n}(\vec{x}_{n'} - \vec{x}_n)\right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{n,n'=1 \\ n \neq n'}}^{N} (\vec{x}_n - \vec{x}_{n'}) \wedge \vec{F}_{nn'}(\vec{x}_n - \vec{x}_{n'}) \\
&= 0 \quad \text{parce que } \vec{F}_{nn'} \; // \; (\vec{x}_n - \vec{x}_{n'})
\end{aligned}$$

On a utilisé $\vec{F}_{nn'}(\vec{x}_n - \vec{x}_{n'}) = -\vec{F}_{n'n}(\vec{x}_{n'} - \vec{x}_n)$.

Exercice 5 : Pour un système de N points matériels, soit le potentiel *intérieur*

$$V^{\text{int}}(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_N) = \sum_{k=2}^{N}\sum_{n'=1}^{k-1} V_{kn'}(\vec{x}_k - \vec{x}_{n'}).$$

Montrer que les forces intérieures qui en résultent sont des sommes de forces à deux corps données par :

$$\vec{F}_n^{\text{int}}(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_N) = \sum_{\substack{n'=1\\ n'\neq n}}^{N} \vec{F}_{nn'}(\vec{x}_n - \vec{x}_{n'}),$$

avec

$$\vec{F}_{nn'}(\vec{x}_n - \vec{x}_{n'}) = \begin{cases} -\overrightarrow{\text{grad}}_n\ V_{nn'}(\vec{x}_n - \vec{x}_{n'}) & \text{si } n > n', \\ -\overrightarrow{\text{grad}}_n\ V_{n'n}(\vec{x}_{n'} - \vec{x}_n) & \text{si } n < n'. \end{cases}$$

La force intérieure s'exerçant sur le n-ème point matériel est :

$$\begin{aligned}
\vec{F}_n^{\text{int}}(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_N) &= -\overrightarrow{\text{grad}}_n\ V^{\text{int}}(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_N) \\
&= -\overrightarrow{\text{grad}}_n \left[\sum_{k=2}^{N}\sum_{n'=1}^{k-1} V_{kn'}(\vec{x}_k - \vec{x}_{n'})\right] \\
&= -\overrightarrow{\text{grad}}_n \left[\sum_{k=2}^{n}\sum_{n'=1}^{k-1} V_{kn'}(\vec{x}_k - \vec{x}_{n'}) + \sum_{k=n+1}^{N}\sum_{n'=1}^{k-1} V_{kn'}(\vec{x}_k - \vec{x}_{n'})\right] \\
&= -\sum_{n'=1}^{n-1} \overrightarrow{\text{grad}}_n\ V_{nn'}(\vec{x}_n - \vec{x}_{n'}) - \sum_{k=n+1}^{N} \overrightarrow{\text{grad}}_n\ V_{kn}(\vec{x}_k - \vec{x}_n).
\end{aligned}$$

En remplaçant l'indice de sommation k de la deuxième somme par l'indice n', on obtient bien

$$\vec{F}_n^{\text{int}}(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_N) = \sum_{n'=1}^{n-1} \vec{F}_{nn'}(\vec{x}_n - \vec{x}_{n'}) + \sum_{n'=n+1}^{N} \vec{F}_{nn'}(\vec{x}_n - \vec{x}_{n'})$$

avec

$$\vec{F}_{nn'}(\vec{x}_n - \vec{x}_{n'}) = \begin{cases} -\overrightarrow{\text{grad}}_n\ V_{nn'}(\vec{x}_n - \vec{x}_{n'}) & \text{si } n' < n, \\ -\overrightarrow{\text{grad}}_n\ V_{n'n}(\vec{x}_{n'} - \vec{x}_n) & \text{si } n' > n. \end{cases}$$

Exercice 6 : Supposer que l'énergie potentielle $V(q)$ d'un point matériel sur la droite présente un maximum en $q = q_0$. Quelle est la forme des orbites séparatrices (d'énergie $E = V_{\max}$) au voisinage du point d'équilibre $q = q_0$, $p = 0$?
Si $E = V_{\max}$, quel temps faut-il au point matériel pour atteindre le point $q = q_0$ à partir d'un point $q = q_1$?
[Indication : développer $V(q)$ autour du point $q = q_0$]

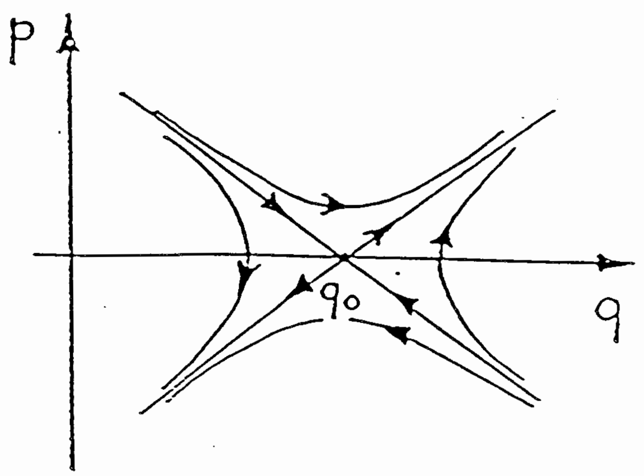
q_0 = maximum isolé du potentiel $V(q)$. Pour $q \approx q_0$:

$$V(q) = V_0 - \frac{1}{2}k(q-q_0)^2 + \dots, \quad V_0 = V(q_0) = V_{\max}, \quad k = -V''(q_0) > 0.$$

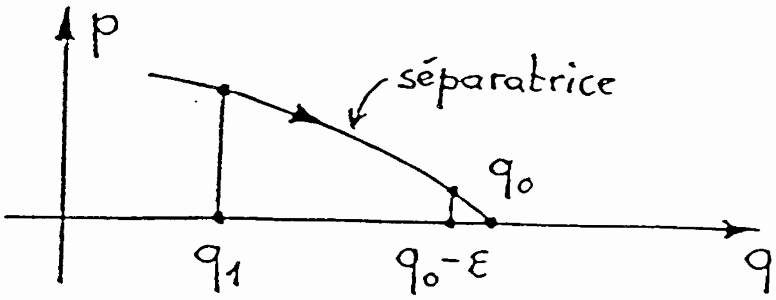
Energie $E = T + V = (p^2/2m) + V(q)$.

- Les **courbes séparatrices** sont les orbites d'énergie V_0 :
  pour $q \approx q_0$: $p = \pm\sqrt{km}\,|q - q_0|$
- Orbites d'énergie $V_0 + \delta$, $\delta > 0$:
  $p = \pm\sqrt{2m\delta + km(q-q_0)^2}$
- Orbites d'énergie $V_0 - \delta$: $q = q_0 \pm \sqrt{\frac{2\delta}{k} + \frac{1}{km}p^2}$

  Les orbites ont la forme d'hyperboles dans le voisinage du point d'équilibre $(q_0, 0)$.



- τ_ϵ = temps pour aller de q_1 en $q_0 - \epsilon$ sur la séparatrice



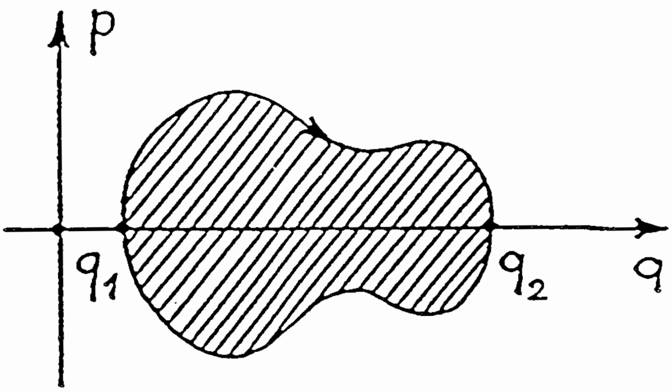
$$\begin{aligned}\tau_\epsilon &= \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{q_1}^{q_0-\epsilon} \mathrm{d}q\,\frac{1}{\sqrt{V_0 - V(q)}} = \sqrt{\frac{m}{k}}\int_{q_1}^{q_0-\epsilon} \mathrm{d}q\,\frac{1}{\sqrt{(q-q_0)^2+\ldots}} \\ &= \sqrt{\frac{m}{k}}\log\frac{q_0-q_1}{\epsilon}+\ldots\end{aligned}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{\epsilon\to 0} \tau_\epsilon = \infty$, il faut un temps infini pour atteindre le point d'équilibre $(q_0, 0)$.

Exercice 7 : Soit E l'énergie d'une orbite fermée de l'espace de phase d'un point matériel sur la droite et $S(E)$ l'aire du domaine de l'espace de phase intérieur à l'orbite. Le mouvement sur cette orbite est périodique; montrer que sa période vaut

$$T = \frac{\mathrm{d}S(E)}{\mathrm{d}E}.$$

[Indication : établir une expression de $S(E)$ et utiliser l'équation donnant l'horaire selon lequel une orbite est parcourue]



Les orbites étant symétriques par rapport à l'axe $0q$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} S(E) &= 2\int_{q_1(E)}^{q_2(E)} \mathrm{d}q\, p(q,E) = 2\sqrt{2m}\int_{q_1(E)}^{q_2(E)} \mathrm{d}q\sqrt{E-V(q)} \\ \frac{\mathrm{d}S(E)}{\mathrm{d}E} &= 2\sqrt{2m}\left\{\sqrt{E-V(q_2)}\,\frac{\mathrm{d}q_2(E)}{\mathrm{d}E} - \sqrt{E-V(q_1)}\,\frac{\mathrm{d}q_1(E)}{\mathrm{d}E}\right\} \\ &\quad + \sqrt{2m}\int_{q_1}^{q_2} \mathrm{d}q\,\frac{1}{\sqrt{E-V(q)}} \end{aligned}$$

$\{\ \} = 0$ parce que $E - V(q_i) = 0$ et $\left|\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}E}\right| < \infty$, $i = 1,2$. L'intégrale restante est égale au double du temps pour aller de q_1 en q_2, elle est donc égale à la période $T(E)$.

Exercices de mécanique analytique

3 novembre 1997

Exercice 8 : Donner le portrait des états dans l'espace de phase et dans l'espace de phase étendu d'un oscillateur harmonique sur la droite.
[Indication : utiliser la conservation de l'énergie]

Exercice 9 : Etudier les mouvements d'un oscillateur harmonique amorti sur la droite (point matériel soumis à la force $F(q, \dot{q}) = -kq - 2m\gamma\dot{q}$). En déduire l'aspect du portrait des états dans l'espace de phase et dans l'espace de phase étendu dans le cas d'un amortissement faible ($\gamma < \sqrt{k/m}$).

On peut aussi traiter ce problème avec les éqn. de Lagrange de 2nd. espèce : On a 1 force conserv : $F_c = -k \cdot q$
1 n-conserv : $F_{nc} = -2m\gamma\dot{q}$

Le Lagrangien pour les forces conserv : $L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}k \cdot q^2$, $q = x - x_0$ $\Rightarrow$ $m \cdot \ddot{q} + k \cdot q = 0$. Avec le terme non conservatif, on obtient $F_{nc} = -2m\gamma\dot{q}$, et :
$\tilde{Q}_n = \sum_{i=1}^{N} \tilde{F}_i(\phi^t(q), t) \cdot \frac{\partial \phi_i^t(q)}{\partial q_n}$, $\phi^t(q) = x \Rightarrow \phi : q \mapsto q = \text{idt.}$ $\frac{\partial \phi}{\partial q} = 1$, ainsi : $\tilde{Q}_n = \tilde{F} = -2m\gamma\dot{q}$ $\Rightarrow$ On obtient la m̃ chose que avec Newton :
$m\ddot{q} + k \cdot q = -2m\gamma \cdot \dot{q}$

Exercice 10 : Déterminer le flot $\phi_t(q, p)$ décrivant les mouvements d'une particule sur une droite soumise à une force de frottement $F(p) = -\gamma p$ (conditions initiales : $q(0) = q_0$ et $p(0) = p_0$).
Construire l'image sous l'action de ϕ_t d'un rectangle du demi-plan $p > 0$ de l'espace de phase.

Exercice 11 : Une particule de charge e et de masse m se meut dans un plan vertical. Elle est soumise au champ gravifique terrestre et à un champ magnétique homogène et statique perpendiculaire au plan de son mouvement. Déterminer le flot caractérisant les mouvements de la particule. Quel est son mouvement si à $t = 0$ la particule est au repos à l'origine du plan vertical ?

Série 3 Hiver 97/98

Exercice 8 : Donner le portrait des états dans l'espace de phase et dans l'espace de phase étendu d'un oscillateur harmonique sur la droite.
[Indication : utiliser la conservation de l'énergie]

$F(q) = -kq$, $k > 0$. Cette force dérive du potentiel $V(q) = \frac{1}{2}kq^2 + V_0$. On peut poser $V_0 = 0$.

$$\text{Energie totale } = E(q,p) = T(p) + V(q) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kq^2.$$

Les **orbites** des mouvements de l'oscillateur harmonique sont des ellipses centrées sur l'origine, d'équation $\frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kq^2 = E =$ constante.

Choisir une unité de longueur q_0 et une unité de quantité de mouvement p_0 : $q = \bar{q}q_0$, $p = \bar{p}p_0$, $\bar{q}$ et $\bar{p}$ sont sans dimension. L'équation des orbites devient

$$\bar{p}^2 + \frac{mkq_0^2}{p_0^2}\bar{q}^2 = \bar{E}, \qquad E = \frac{p_0^2}{2m}\bar{E}.$$

Si l'on choisit $p_0 = \sqrt{mk}\, q_0$, les orbites sont des cercles dans le plan $(\bar{q},\bar{p})$ de rayon $\sqrt{\bar{E}}$. Dans un mouvement d'énergie E :

$$\begin{aligned} q(t) &= \sqrt{\frac{2E}{k}}\sin(\omega t - \phi), \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \\ p(t) &= \sqrt{2Em}\cos(\omega t - \phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{q}(t) &= \sqrt{\bar{E}}\sin(\omega t - \phi) \\ \bar{p}(t) &= \sqrt{\bar{E}}\cos(\omega t - \phi) \end{aligned}$$

Orbites dans l'espace de phase étendu = hélices sur des cylindres centrés sur l'axe $0t$, de rayon $\sqrt{\bar{E}}$ et de pas $T = 2\pi/\omega$.

Exercice 9 : Etudier les mouvements d'un oscillateur harmonique amorti sur la droite (point matériel soumis à la force $F(q, \dot{q}) = -kq - 2m\gamma\dot{q}$). En déduire l'aspect du portrait des états dans l'espace de phase et dans l'espace de phase étendu dans le cas d'un amortissement faible ($\gamma < \sqrt{k/m}$).

Equation de Newton de l'oscillateur harmonique amorti : $m\ddot{q} = -kq - 2m\gamma\dot{q}$

Ansatz
$$\begin{aligned} q(t) &= Ce^{\alpha t} \text{ avec } C, \alpha \in \mathbb{C} \\ m\alpha^2 &= -2m\gamma\alpha - k \\ m\alpha^2 &+ 2m\gamma\alpha + k = 0 \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{1}{2m}\left(-2m\gamma \pm \sqrt{4m^2\gamma^2 - 4mk}\right) = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \frac{k}{m}}.$$

Amortissement faible : $\gamma < \sqrt{k/m}$

$$\begin{aligned} \alpha &= \pm i\omega - \gamma \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \gamma^2} \\ q(t) &= A\,e^{-\gamma t}\cos(\omega t - \phi) \text{ avec } A \in \mathbb{R},\ \phi \in \mathbb{R} \\ p(t) &= m\dot{q}(t) = -mA\,e^{-\gamma t}\left[\gamma\cos(\omega t - \phi) + \omega\sin(\omega t - \phi)\right] \end{aligned}$$

Déterminer l'amplitude A et la phase ϕ à partir des conditions initiales :

$$\begin{aligned} q(0) &= q_0 = A\cos\phi \\ p(0) &= p_0 = -mA(\gamma\cos\phi - \omega\sin\phi) \\ &= -mA\cos\phi(\gamma - \omega\,\mathrm{tg}\,\phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{q_0} &= m(\omega\,\mathrm{tg}\,\phi - \gamma) \\ \mathrm{tg}\,\phi &= \frac{1}{\omega}\left(\frac{p_0}{q_0} + \gamma\right) \qquad A = \frac{q_0}{\cos\phi} \end{aligned}$$

Si $p_0 = 0$.

$$\mathrm{tg}\,\phi = \frac{\gamma}{\omega}, \qquad \sin\phi = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + \omega^2}} = \gamma\sqrt{\frac{m}{k}}, \qquad \cos\phi = \omega\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Ces relations permettent d'écrire

$$p(t) = -mA\,e^{-\gamma t}\sqrt{\gamma^2 + \omega^2}\,(\sin\phi\cos(\omega t - \phi) + \cos\phi\sin(\omega t - \phi))$$

$$
\begin{aligned}
&= -A\sqrt{km}\sin(\omega t)\mathrm{e}^{-\gamma t} \\
q(t) &= A\cos(\omega t-\phi)\mathrm{e}^{-\gamma t} \\
&= A\left(\cos\omega t\cos\phi+\sin\omega t\sin\phi\right)\mathrm{e}^{-\gamma t} \\
&= A\omega\sqrt{\frac{m}{k}}\left(\cos\omega t+\frac{\gamma}{\omega}\sin\omega t\right)\mathrm{e}^{-\gamma t} \\
&= A\omega\sqrt{\frac{m}{k}}\cos\omega t\,\mathrm{e}^{-\gamma t}+A\gamma\sqrt{\frac{m}{k}}\left(\frac{-1}{A\sqrt{km}}p(t)\right)
\end{aligned}
$$

L'on voit que le mouvement est spécifié par les deux équations :

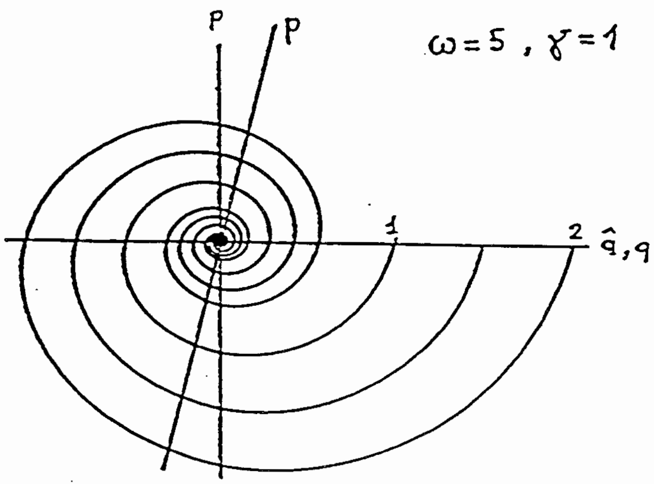
$$
\begin{aligned}
q(t)+\frac{\gamma}{k}p(t) &= A\omega\sqrt{\frac{m}{k}}\cos\omega t\,\mathrm{e}^{-\gamma t} = q_0\cos\omega t\,\mathrm{e}^{-\gamma t} \\
p(t) &= -q_0\frac{k}{\omega}\sin\omega t\,\mathrm{e}^{-\gamma t}.
\end{aligned}
$$

Changement de variables $(q,p)\to(\hat{q},\hat{p})$ avec

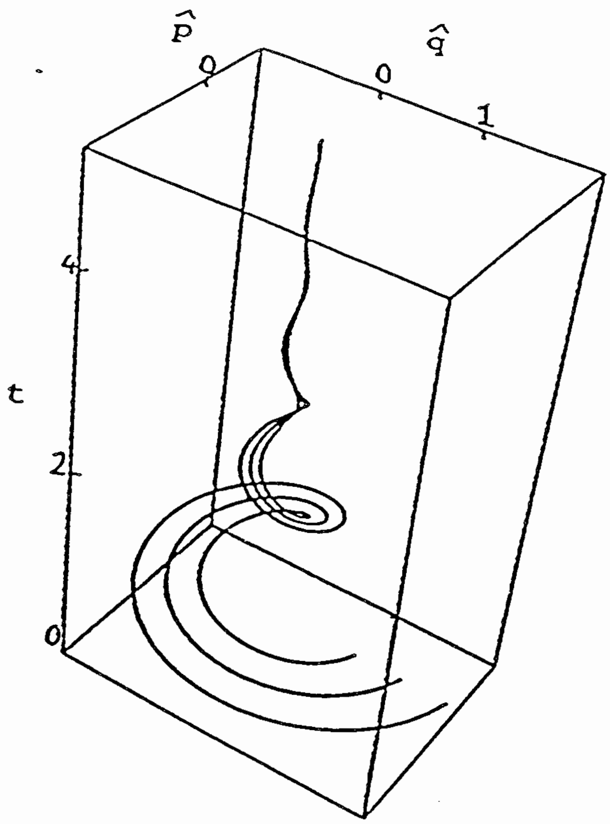
$$
\begin{aligned}
\hat{q}(t) &= q(t)+\frac{\gamma}{k}p(t) \\
\hat{p}(t) &= +\frac{\omega}{k}p(t)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad
\begin{aligned}
\hat{q}(t) &= q_0\cos\omega t\,\mathrm{e}^{-\gamma t} \\
\hat{p}(t) &= -q_0\sin\omega t\,\mathrm{e}^{-\gamma t}
\end{aligned}
$$

Les orbites ont une forme simple dans le plan $(\hat{p},\hat{q})$. L'axe $q=0$ est oblique dans ce plan.



Orbites dans l'espace de phase



Orbites dans l'espace de phase étendu

> <u>Exercice 10 :</u> Déterminer le flot $\phi_t(q,p)$ décrivant les mouvements d'une particule sur une droite soumise à une force de frottement $F(p) = -\gamma p$ (conditions initiales : $q(0) = q_0$ et $p(0) = p_0$).
> Construire l'image sous l'action de ϕ_t d'un rectangle du demi-plan $p > 0$ de l'espace de phase.

On a affaire à un système linéaire. Equations du mouvement :

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{m} \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}.$$

méthode générale de résolution.

Valeurs-propres de A : $\qquad \lambda_1 = 0, \qquad\qquad \lambda_2 = -\gamma.$

Vecteurs-propres de A : $\; v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -m\gamma \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \alpha v^{(1)} + \beta v^{(2)} \mathrm{e}^{-\gamma t}$$

α et β sont déterminés par la condition initiale $q(0) = q_0 = \alpha + \beta$, $p(0) = p_0 = -m\gamma\beta$.

$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 + (p_0/\gamma m)(1 - \mathrm{e}^{-\gamma t}) \\ p_0 \mathrm{e}^{-\gamma t} \end{pmatrix}$$

Ce résultat s'écrit :

$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = B_t \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix}, \quad B_t = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\gamma m}(1 - \mathrm{e}^{-\gamma t}) \\ 0 & \mathrm{e}^{-\gamma t} \end{pmatrix}$$

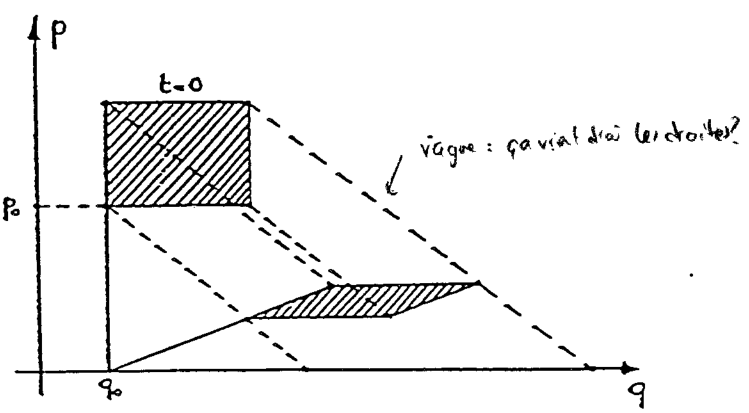
le second membre de cette équation définit le flot du système.

- Orbites : éliminer t entre les expressions de $q(t)$ et $p(t)$:

$$\mathrm{e}^{-\gamma t} = \frac{p(t)}{p_0} \;\Rightarrow\; p(t) = p_0 - \gamma m(q(t) - q_0)$$

- Pour la dernière partie de l'exercice chercher l'image au temps t des conditions initiales $q(0) = q_0$, $p(0)$ arbitraire. Pour cela, éliminer p_0 entre les expressions de $q(t)$ et $p(t)$. Il vient

$$p = m\gamma \frac{q - q_0}{\mathrm{e}^{\gamma t} - 1}.$$



On voit que la droite $q = q_0$ est transformée au temps t en une droite passant par (q_0, p).

> <u>Exercice 11 :</u> Une particule de charge e et de masse m se meut dans un plan vertical. Elle est soumise au champ gravifique terrestre et à un champ magnétique homogène et statique perpendiculaire au plan de son mouvement. Déterminer le flot caractérisant les mouvements de la particule. Quel est son mouvement si à $t = 0$ la particule est au repos à l'origine du plan vertical ?

Mouvement dans le plan vertical $0x_1x_2$. La particule est soumise à la force :

$$\vec{F} = m\vec{g} + \frac{e}{mc}\vec{p} \wedge \vec{B}, \quad \vec{g} = (0, -g, 0), \quad \vec{B} = (0, 0, B)$$

Poser $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ avec $x_1 = q_1$, $x_2 = q_2$, $x_3 = p_1$, $x_4 = p_2$.

- Equations du mouvement : $\dot{x} = X_0 + Ax$ avec c'est ça qui pose complication

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/m \\ 0 & 0 & 0 & eB/mc \\ 0 & 0 & -eB/mc & 0 \end{pmatrix}$$

- Solution générale des équations du mouvement : ansatz $\boxed{x = \mathrm{e}^{At} y}$

$$\to \quad \dot{y} = \mathrm{e}^{-At} X_0 \ \to \ y(t) = y(0) - \frac{1}{A}\left(\mathrm{e}^{-At} - 1\right) X_0$$

A n'est pas inversible.

[Notation : $\quad \dfrac{1}{A}\left(\mathrm{e}^{-At} - 1\right) \doteq \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} A^{k-1}$]

$$\to \quad x(t) = \mathrm{e}^{At} \underbrace{x(0)}_{=0} + \frac{1}{A}\left(\mathrm{e}^{At} - 1\right) X_0 \qquad \underline{\text{OK}}$$

- Valeurs- propres de A : dét $(\lambda - A) = \lambda^2 \left(\lambda^2 + (eB/mc)^2\right) = 0$

  Une valeur-propre dégénérée : $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$.

  Deux valeurs-propres complexes : $\lambda_3 = \mathrm{i}\omega$, $\quad \lambda_4 = -\mathrm{i}\omega$, $\quad \omega = eB/mc$, $\omega =$ pulsation de Larmor.

- Vecteurs-propres : pour $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$:

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ ; \qquad v^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{pour } \lambda_3 = \mathrm{i}\omega \ : \ v^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ \mathrm{i}m\omega \\ -m\omega \end{pmatrix} \ ; \ \text{pour } \lambda_4 = -\mathrm{i}\omega \ : \ v^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i}m\omega \\ -m\omega \end{pmatrix}.$$

Construction explicite de la solution des équations du mouvement : développer X_0 dans la base $\{v^{(i)}\}$

$$X_0 = \frac{g}{\omega}\left(-v^{(1)} + \frac{1}{2}v^{(3)} + \frac{1}{2}v^{(4)}\right).$$

Utiliser :

$$? \left\{ \begin{array}{rcll} \frac{1}{A}\left(\mathrm{e}^{At}-1\right)v^{(i)} &=& tv^{(i)}, & i=1,2 \\ \frac{1}{A}\left(\mathrm{e}^{At}-1\right)v^{(i)} &=& \frac{1}{\lambda_i}\left(\mathrm{e}^{\lambda_i t}-1\right)v^{(i)}, & i=3,4 \end{array} \right\}$$

avec ce résultat, c'est clair que ça devient simple !

$$\Rightarrow \frac{1}{A}\left(\mathrm{e}^{At}-1\right)X_0 = \frac{g}{\omega}\begin{pmatrix} -t+\frac{1}{\omega}\sin\omega t \\ \frac{1}{\omega}(\cos\omega t - 1) \\ m(\cos\omega t - 1) \\ -m\sin\omega t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

La condition initiale $x(0) = 0$ donne :

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{g}{\omega}\left(-t + \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\right) \\ q_2(t) &= \frac{g}{\omega^2}(\cos(\omega t) - 1) \end{aligned}$$

Superposition d'un mouvement de translation horizontal uniforme, vitesse g/ω, et d'un mouvement de rotation uniforme, vitesse angulaire ω, centré sur $(q_1 = 0, q_2 = g/\omega^2)$.

<u>Méthode de résolution Chatterji :</u>

$$\begin{pmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{qB}{m}}_{\omega}\begin{pmatrix} \dot{z} \\ -\dot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad , \quad Y = \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \dot{Y} = \underbrace{\omega \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \cdot Y + b = A \cdot Y + b$$

Solution : $Y = e^{At} \cdot Y_0 + e^{At} \cdot \int_0^t e^{-A \cdot s} \cdot b(s)\, ds$

$\longrightarrow$ tout le problème revient à calculer $\exp(A \cdot t)$, on peut le faire de plusieurs manières :

i) — comparaison avec sol. rés. normale / Caplace

ii) — propriétés de A

iii) — Jordanisation (c.f. ce cours)

avec i), on a : — à l'étude : $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\longrightarrow \begin{cases} \dot{a} = \omega \cdot b \\ \dot{b} = -\omega \cdot a \end{cases} \longrightarrow \left\{ \ddot{a} + a = 0 \right.$$

$\longrightarrow$ etc…

$$\longrightarrow \begin{cases} a = a_0 \cdot \cos t + \frac{b_0}{\omega} \cdot \sin t \\ b = -\omega \cdot a_0 \cdot \sin t + b_0 \cdot \cos t \end{cases}$$

compare avec : $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = e^{At}\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$

avec $\{a_0 = 0, b_0 \neq 0\}$, $\{a_0 \neq 0, b_0 = 0\}$ $\longrightarrow e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & \frac{\sin t}{\omega} \\ -\omega \sin t & \cos t \end{pmatrix}$

Exercices de mécanique analytique

10 novembre 1997

Exercice 12 : Considérer un système dynamique linéaire à deux variables (x_1, x_2) ayant le point $(0, 0)$ comme point singulier. Etudier l'équilibre de ce point et déterminer les différentes formes que peuvent présenter les orbites du système selon les valeurs des paramètres qui le caractérisent.
Donner un exemple de système mécanique décrit par ce genre de système dynamique.

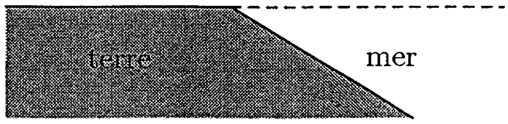
Exercice 13 :

a) Un point matériel de masse m se meut sur la demi-droite $q > 0$ en subissant la force $F(q) = q - q^3$. Ecrire l'équation de mouvement sous forme d'un système dynamique. Déterminer les points d'équilibre et caractériser leur nature (stable, asymptotiquement stable ou instable). [*Indication* : examiner la linéarisation du système au voisinage du point d'équilibre. Essayer de construire une fonction de Lyapunov à partir de l'énergie totale du point matériel.]

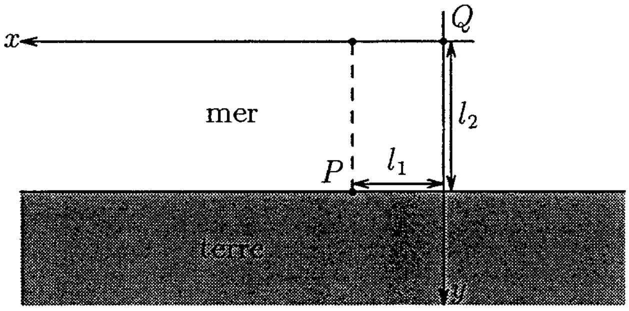
b) Mêmes questions lorsque le point matériel est soumis à la force $F(q, p) = q - q^3 - p$. Est-ce que la nature des points d'équilibre dépend de la valeur de la masse m ?

(tourner s.v.p.)

Exercice 14 : On considère une côte rectiligne dont le profil du fond de la mer est le suivant (coupe suivant un plan vertical) :



Déterminer la courbe $y(x)$ que doit suivre un baigneur (sur le plan d'eau) pour relier dans un temps minimal le point $P = (l_1, l_2)$ au point $Q = (0,0)$ indiqués sur la figure ci-dessous ($l_2 \geq l_1$), s'il se déplace en marchant dans l'eau avec une vitesse $v(h) = v_0 \left(1 - \dfrac{h}{L}\right)$ où L est la profondeur au point Q et h est la profondeur à l'endroit où le baigneur se trouve ($h \leq L$).



Série 4 Hiver 97/98

> <u>Exercice 12 :</u> Considérer un système dynamique linéaire à deux variables (x_1, x_2) ayant le point $(0,0)$ comme point singulier. Etudier l'équilibre de ce point et déterminer les différentes formes que peuvent présenter les orbites du système selon les valeurs des paramètres qui le caractérisent.
> Donner un exemple de système mécanique décrit par ce genre de système dynamique.

$Tr A = a+d$
$\det A = ad - bc$

$C_A = t^2 - Tr A \cdot t + \det A$

Equations du mouvement : $\dot{x} = Ax$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\frac{Tr(A) \pm \sqrt{(Tr A)^2 - 4\det A}}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left[a+d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4ad + 4bc}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[a+d \pm \sqrt{a^2+d^2 - 2ad + 4bc}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[a+d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}\right]$$

Valeurs-propres de A : $\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left[a + d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}\,\right]$.

1er cas : $4bc > -(a-d)^2$. Deux valeurs-propres réelles, $\lambda_- < \lambda_+$. Supposer $\lambda_+ \neq 0$, $\lambda_- \neq 0$.

Vecteurs-propres de A : $Av^{(\pm)} = \lambda_\pm v^{(\pm)}$.

$$\begin{aligned} \text{Si } c &\neq 0 \quad \text{on peut choisir :} \\ v^{(\pm)} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left[(a-d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}\right] \\ c \end{pmatrix} \\ \text{Si } c &= 0, \quad (a \neq d) \quad \text{on peut choisir :} \\ v^{(+)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(-)} = \begin{pmatrix} b \\ d-a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

les valeurs propres sous forme de vecteur !

Solution générale :

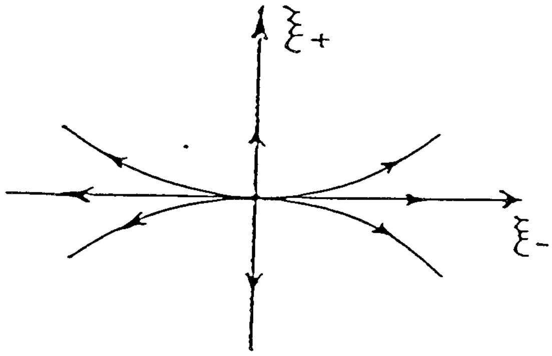
$$x(t) = \xi_+(t)v^{(+)} + \xi_-(t)v^{(-)}, \text{ avec } \xi_+(t) = e^{\lambda_+ t}\xi_+(0) \text{ et } \xi_-(t) = e^{\lambda_- t}\xi_-(0).$$

défini où ?

Il convient de représenter les orbites dans le plan (ξ_+, ξ_-), pour cela éliminer t entre les expressions de $\xi_+(t)$ et $\xi_-(t)$:

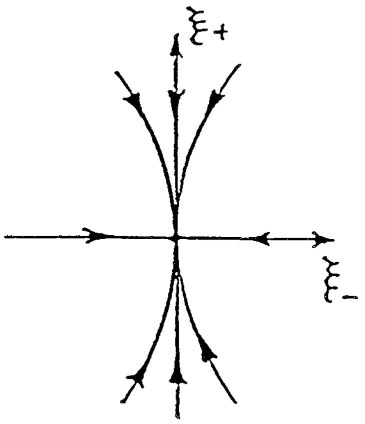
$$\begin{aligned} \left(\frac{\xi_+(t)}{\xi_+(0)}\right)^{\lambda_-} &= \left(\frac{\xi_-(t)}{\xi_-(0)}\right)^{\lambda_+} \\ \Rightarrow \qquad \xi_+(t) &= C\,(\xi_-(t))^{\lambda_+/\lambda_-} \quad \text{avec } C = \frac{\xi_+(0)}{(\xi_-(0))^{\lambda_+/\lambda_-}}. \end{aligned}$$

Il faut distinguer trois cas, et prenant en compte tous les cas de signes de $\xi_+(t)$ et $\xi_-(t)$, on obtient les figures suivantes :



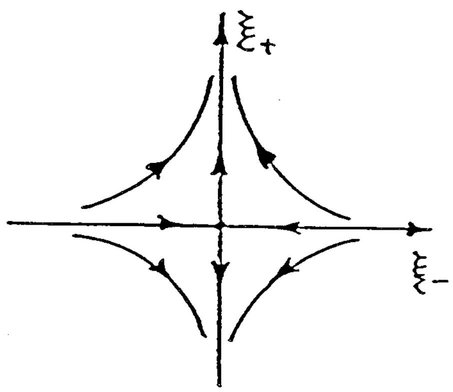
$\lambda_+ > \lambda_- > 0$

$(0,0) =$ position d'équilibre instable.



$\lambda_- < \lambda_+ < 0$

$(0,0) =$ position d'équilibre asymptotiquement stable.



$\lambda_- < 0, \quad \lambda_+ > 0$

$(0,0) =$ position d'équilibre instable.

2e cas : $4bc = -(a-d)^2$. Une valeur-propre dégénérée $\lambda = \dfrac{1}{2}(a+d)$. Il n'y a qu'un vecteur propre $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2c}{a-d} \end{pmatrix}$. La matrice A n'est pas diagonalisable.

• Si $a = d \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$:

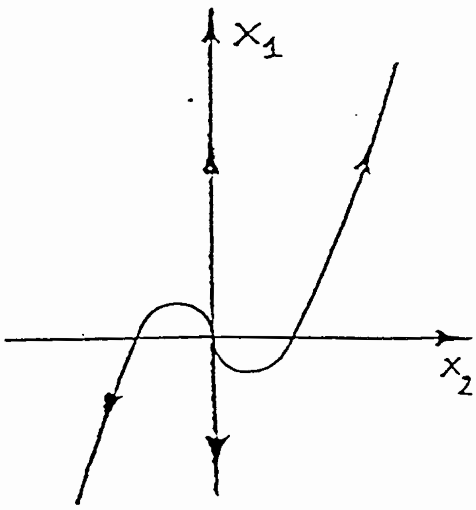
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N}$$

$\lambda = a$, tout vecteur est vecteur-propre de D, $N^2 = 0$

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x(0) = e^{\lambda t}(1 + Nt)x(0) \\ x_1(t) &= e^{\lambda t}(x_1(0) + btx_2(0)) \\ x_2(t) &= e^{\lambda t}x_2(0) \end{aligned}$$

Pour obtenir l'équation des orbites, tirer t de l'expression de x_2 : $t = \dfrac{1}{\lambda} \log(x_2(t)/x_2(0))$. Insérer le résultat dans l'expression de x_1. Il vient :

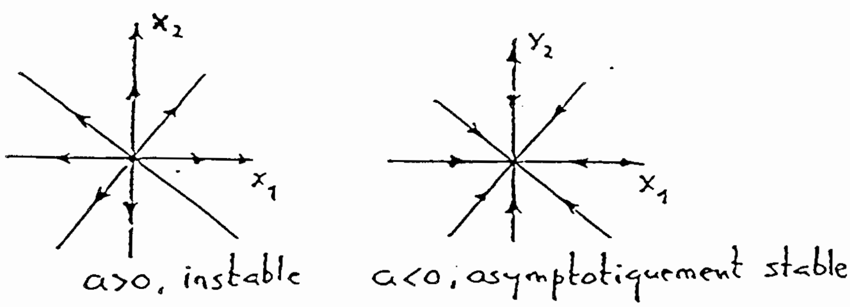
$$x_1(t) = \frac{b}{a} x_2(t) \log(C|x_2(t)|) \qquad C = \text{ constante } > 0.$$



Forme des orbites lorsque $\dfrac{b}{a} > 0$.

$(0,0)$ = position d'équilibre instable (asymptotiquement stable) si $\lambda = a > 0$ ($\lambda = a < 0$).

• Si $a = d \neq 0$ et $b = c = 0$, tout vecteur est vecteur-propre de A : $x(t) = e^{at}x(0)$.



Les orbites sont les droites passant par l'origine.

3e cas : $4bc < -(a-d)^2$. Deux valeurs-propres complexes conjuguées : λ et λ^*.

$$\lambda = \nu + \mathrm{i}\omega \quad \nu = \frac{1}{2}(a+d) \quad \omega = \frac{1}{2}\sqrt{-4bc-(a-d)^2}$$

Vecteurs-propres : v et v^* :

$$v = \begin{pmatrix} b \\ -\frac{1}{2}(a-d)+\mathrm{i}\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
|v_2| &= \sqrt{-bc}, \qquad v_2 = \sqrt{-bc}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \qquad 0 < \theta < \pi \\
\theta &= \operatorname{Arctg}\frac{2\omega}{d-a} \\
x(t) &= \xi(t)v + \xi^*(t)v^*, \qquad \xi(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\xi(0).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Si } \xi(0) &= \rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} \\
x(t) &= 2\rho\mathrm{e}^{\nu t}\begin{pmatrix} b\cos(\omega t-\phi) \\ \\ \sqrt{-bc}\,\cos(\omega t-\phi+\theta) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= 2\rho\mathrm{e}^{\nu t}\, b\,\cos(\omega t-\phi) \\
x_2(t) &= \sqrt{-\frac{c}{b}}\cos\theta\, x_1(t) - 2\rho\mathrm{e}^{\nu t}\sqrt{-bc}\,\sin\theta\sin(\omega t-\phi).
\end{aligned}$$

Remplacer les variables x_1 et x_2 par :

$$\hat{x}_1 = \frac{x_1}{2b}, \quad \hat{x}_2 = \frac{1}{2\sqrt{-bc}\,\sin\theta}\left[x_2 - \sqrt{-\frac{c}{b}}\cos\theta\, x_1\right]$$

$$\Rightarrow \qquad \left|\begin{array}{l} \hat{x}_1(t) = \rho\mathrm{e}^{\nu t}\,\cos(\omega t-\phi) \\ \\ \hat{x}_2(t) = -\rho\mathrm{e}^{\nu t}\,\sin(\omega t-\phi) \end{array}\right. .$$

Orbites = spirales semblables à celles de l'exercice 9.

$(0,0)$ = position d'équilibre stable	si $\nu = 0$
$(0,0)$ = position d'équilibre asymptotiquement stable	si $\nu < 0$
$(0,0)$ = position d'équilibre instable	si $\nu > 0$

Exemple : Le système dynamique décrivant un point matériel sur une droite,

$$(x_1, x_2) = (q, p),$$
$$\dot{x}_1 = \frac{1}{m} x_2, \qquad \dot{x}_2 = F(x_1, x_2),$$

soumis à une force linéaire en x_1 et x_2, $F(x_1, x_2) = cx_1 + dx_2$ est du type étudié :

$$\dot{x} = Ax, \qquad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ c & d \end{pmatrix}$$

Valeurs-propres : $\lambda = \frac{1}{2}\left(d \pm \sqrt{d^2 + 4\frac{c}{m}}\right)$.

On a un oscillateur harmonique amorti si $c < 0$, $d < 0$.

Le cas (2), $c = -\frac{m}{4} d^2$, correspond à la limite entre amortissement fort et faible.

Exercice 13 :

a) Un point matériel de masse m se meut sur la demi-droite $q > 0$ en subissant la force $F(q) = q - q^3$. Ecrire l'équation de mouvement sous forme d'un système dynamique. Déterminer les points d'équilibre et caractériser leur nature (stable, asymptotiquement stable ou instable).
[*Indication* : examiner la linéarisation du système au voisinage du point d'équilibre. Essayer de construire une fonction de Lyapunov à partir de l'énergie totale du point matériel.]

b) Mêmes questions lorsque le point matériel est soumis à la force $F(q,p) = q - q^3 - p$. Est-ce que la nature des points d'équilibre dépend de la valeur de la masse m ?

a) Le système dynamique décrivant le point matériel est

$$\begin{aligned} \dot{q} = \frac{p}{m} &\equiv X_1(p) \\ \dot{p} = q - q^3 &\equiv X_2(q) \end{aligned}$$

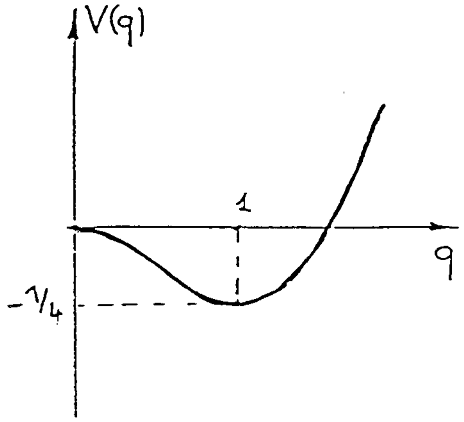
avec $q > 0$.

- Points d'équilibre : $X(q,p) = \begin{pmatrix} X_1(p) \\ X_2(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (q = 1, p = 0)$.
- Linéarisation au voisinage de $(q = 1, p = 0)$:

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} q-1 \\ p \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } A = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial q} & \frac{\partial X_1}{\partial p} \\ \frac{\partial X_2}{\partial q} & \frac{\partial X_2}{\partial p} \end{pmatrix}_{\Big| \substack{q=1 \\ p=0}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Valeurs propres de A : $\lambda_\pm = \pm i\sqrt{\frac{2}{m}}$, $\lambda_\pm$ sont imaginaires et la linéarisation ne permet pas de conclure sur la nature du point d'équilibre $(q = 1, p = 0)$.
- Fonction de Lyapunov associée à $(q = 1, p = 0)$:
La force $F(q)$ dérive du potentiel $V(q) = -\frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{4}q^4$,



et l'énergie totale du point matériel s'écrit $E(q,p) = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{4}q^4$.
La fonction $f(q,p) = E(q,p) - E(1,0) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{4}(q^2-1)^2$ vérifie toutes les conditions que doit satisfaire une fonction de Lyapunov associée au point d'équilibre $(q = 1, p = 0)$:

- $f \in C^0, \qquad f \in C^1$
- $f(1,0) = 0, \qquad f(q,p) > 0$ en dehors de $(q = 1, p = 0)$
- $$\begin{aligned} D_X f(q,p) &= X_1(p)\frac{\partial f(q,p)}{\partial q} + X_2(q)\frac{\partial f(q,p)}{\partial p} \\ &= \frac{p}{m}(q^2-1)q + (q-q^3)\frac{p}{m} = 0 \qquad \forall q,p. \end{aligned}$$

Du théorème de stabilité de Lyapunov on conclut que le point d'équilibre $(q = 1, p = 0)$ est stable.

b) Le système dynamique décrivant le point matériel est

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{p}{m} \equiv X_1(q) \\ \dot{p} &= q - q^3 - p \equiv X_2(q,p) \end{aligned}$$

avec $q > 0$.

- Points d'équilibre $X(q,p) = \begin{pmatrix} X_1(q) \\ X_2(q,p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (q = 1, p = 0)$
- Linéarisation au voisinage de $(q = 1, p = 0)$:
$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} q-1 \\ p \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$
- Valeurs propres de A : $\lambda_\pm = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{8}{m}}$

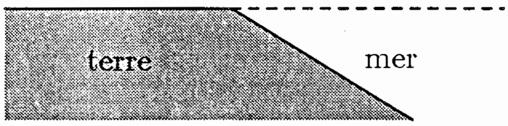
Pour toute valeur de la masse m $(0 < m < \infty)$ on a Re $\lambda_\pm < 0$ et le théorème du principe de la stabilité linéaire indique que le point d'équilibre $(q = 1, p = 0)$ est asymptotiquement stable.

Remarque : La fonction de Lyapunov $f(p,q)$ considérée en a) donne pour ce cas :

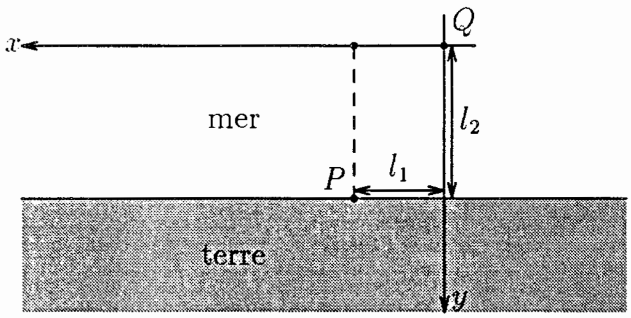
$$D_X f(q,p) = \frac{p}{m}(q^2-1)q + (q-q^3-p)\frac{p}{m} = -\frac{p^2}{m} < 0 \quad \text{si} \quad p \neq 0.$$

Ce n'est pas une fonction de Lyapunov stricte au voisinage de $(q = 1, p = 0)$ et on peut avec cette méthode seulement conclure que le point d'équilibre est stable.

<u>Exercice 14 :</u> On considère une côte rectiligne dont le profil du fond de la mer est le suivant (coupe suivant un plan vertical) :



Déterminer la courbe $y(x)$ que doit suivre un baigneur (sur le plan d'eau) pour relier dans un temps minimal le point $P = (l_1, l_2)$ au point $Q = (0,0)$ indiqués sur la figure ci-dessous ($l_2 \geq l_1$), s'il se déplace en marchant dans l'eau avec une vitesse $v(h) = v_0 \left(1 - \frac{h}{L}\right)$ où L est la profondeur au point Q et h est la profondeur à l'endroit où le baigneur se trouve ($h \leq L$).



Deux résolutions alternatives sont possibles. Pour les notations le lecteur se référera à la figure de l'énoncé.

- **Première résolution :**

On cherche la courbe $y(x)$ (sur le plan d'eau) que doit suivre le baigneur pour se déplacer de P à Q en un temps minimal. En désignant par τ cette durée on a

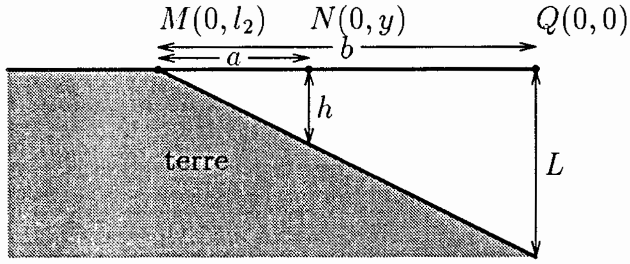
$$\tau = \int_{t_P=0}^{t_Q=\tau} \mathrm{d}t \ ;$$

or, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}s/v(h)$ avec $\mathrm{d}s = (1 + x'^2(y))^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y$ et $v(h) = v_0(1 - h/L)$. D'autre part, par le théorème de Thalès nous avons (se référer à la figure ci-dessous)

$$\frac{h}{L} = \frac{a}{b} = \frac{l_2 - y}{l_2} = 1 - \frac{y}{l_2}$$

et donc

$$v = v_0\left(1 - 1 + \frac{y}{l_2}\right) = \frac{v_0}{l_2}\, y.$$



Ainsi

$$\tau = \int_{l_2}^{0} \frac{(1 + x'^2(y))^{\frac{1}{2}}}{\frac{v_0}{l_2} y}\, \mathrm{d}y \ ;$$

il s'agit donc de trouver l'équation d'Euler pour la fonction

$$G(x', y) = \frac{(1 + x'^2)^{\frac{1}{2}}}{y}.$$

Equation d'Euler :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\partial G}{\partial x'}\right) - \frac{\partial G}{\partial x} = 0 \ ;$$

le calcul donne

$$\frac{\partial G}{\partial x'} = (1 + x'^2)^{-\frac{1}{2}} x' y^{-1}, \qquad \frac{\partial G}{\partial x} = 0.$$

On a : $\dfrac{x'}{(1 + x'^2)^{\frac{1}{2}}} \dfrac{1}{y} = a, \qquad x' = \pm \dfrac{ay}{\sqrt{1 - a^2 y^2}}, \qquad a > 0.$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} x(y) &= \pm\frac{1}{a}\sqrt{1-a^2y^2}+b, \\ \text{ou} \qquad (x-b)^2 &= \frac{1}{a^2}(1-a^2y^2). \end{aligned}$$

Les constantes d'intégration a et b sont déterminées en imposant le passage de $y(x)$ par Q et P :

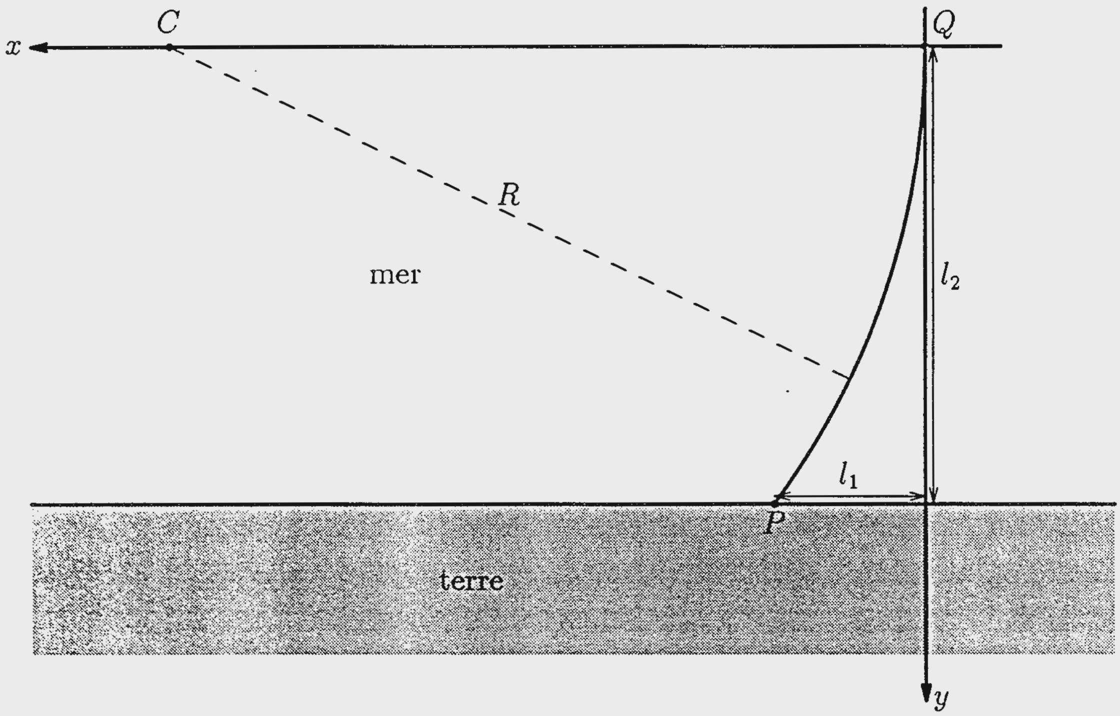
Q : $\quad x=0,\ y=0 \quad \Rightarrow \quad b^2=\frac{1}{a^2}$

P : $\quad x=l_1,\ y=l_2 \quad \Rightarrow \quad b=\dfrac{l_1^2+l_2^2}{2l_1}.$

La solution finale est donnée par

$$y^2+\left(x-\frac{l_1^2+l_2^2}{2l_1}\right)^2=\left(\frac{l_1^2+l_2^2}{2l_1}\right)^2.$$

On obtient ainsi un cercle de rayon $R=\left(\dfrac{l_1^2+l_2^2}{2l_1}\right)$ et de centre $C=\left(\dfrac{l_1^2+l_2^2}{2l_1},0\right)$.



Lorsque $l_1=l_2=l$, $C=(l,0)$ et le rayon du cercle est égal à l.

• **Deuxième résolution :**

On cherche la courbe $y(x)$ (sur le plan d'eau) que doit suivre le baigneur pour se déplacer de P à Q en un temps minimal. En désignant par τ cette durée on a

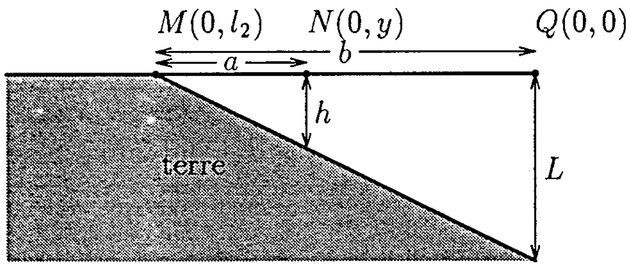
$$\tau = \int_{t_P=0}^{t_Q=\tau} \mathrm{d}t \; ;$$

or, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}s/v(h)$ avec $\mathrm{d}s = (1+y'^2(x))^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$ et $v(h) = v_0(1-h/L)$. D'autre part, par le théorème de Thalès nous avons (se référer à la figure ci-dessous)

$$\frac{h}{L} = \frac{a}{b} = \frac{l_2 - y}{l_2} = 1 - \frac{y}{l_2}$$

et donc

$$v = v_0\left(1 - 1 + \frac{y}{l_2}\right) = \frac{v_0}{l_2}\,y.$$



Ainsi

$$\tau = \int_{l_1}^{0} \frac{(1+y'^2(x))^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{v_0}{l_2}\right) y(x)}\,\mathrm{d}x \; ;$$

il s'agit donc de trouver l'équation d'Euler pour la fonction

$$F(y,y') = (1+y'^2)^{\frac{1}{2}} y^{-1}.$$

Equation d'Euler :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \; ;$$

le calcul donne, après simplification,

$y=y(x)$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial y'} &= (1+y'^2)^{-\frac{1}{2}} y' y^{-1}, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) &= -(1+y'^2)^{-\frac{3}{2}} y'^2 y'' y^{-1} + (1+y'^2)^{-\frac{1}{2}} y'' y^{-1} - (1+y'^2)^{-\frac{1}{2}} y'^2 y^{-2}, \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= -(1+y'^2)^{\frac{1}{2}} y^{-2}.
\end{aligned}
$$

De là l'équation d'Euler s'écrit après simplification

$$1 + y'^2 + y''y = 0.$$

Résolution de l'équation d'Euler : en remarquant que

$$(yy')' = yy'' + y'^2$$

on a successivement

$$
\begin{aligned}
(yy')' &= -1 \\
yy' &= -x + a \\
y\,\mathrm{d}y &= (-x+a)\mathrm{d}x\ ;
\end{aligned}
$$

en intégrant on obtient

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + ax + b.$$

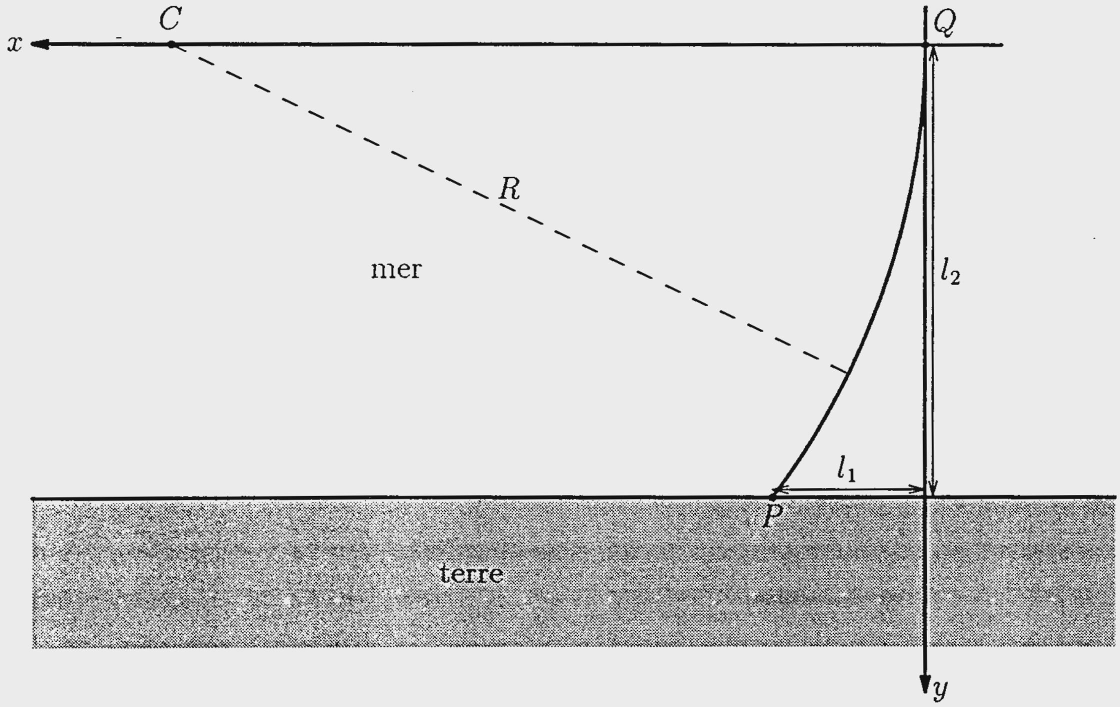
Les constantes d'intégration a et b sont déterminées en imposant le passage de $y(x)$ par Q et P :

$$
\begin{aligned}
&Q : \quad x = 0,\ y = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0 \\
&P : \quad x = l_1,\ y = l_2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{l_1^2 + l_2^2}{2l_1}.
\end{aligned}
$$

La solution finale est donnée par

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \left(-x^2 + \frac{l_1^2 + l_2^2}{l_1} x\right)^{\frac{1}{2}} \\
\Rightarrow \qquad y^2 + \left(x - \frac{l_1^2 + l_2^2}{2l_1}\right)^2 &= \left(\frac{l_1^2 + l_2^2}{2l_1}\right)^2.
\end{aligned}
$$

On obtient ainsi un cercle de rayon $R = \left(\frac{l_1^2 + l_2^2}{2l_1}\right)$ et de centre $C = \left(\frac{l_1^2 + l_2^2}{2l_1}, 0\right)$.



Lorsque $l_1 = l_2 = l$, $C = (l, 0)$ et le rayon du cercle est égal à l.

Exercices de mécanique analytique

17 novembre 1997

Exercice 15 : Considérer la surface de révolution obtenue en prenant une courbe dans le plan (x, y) passant par deux points extrêmes donnés, (x_1, y_1) et (x_2, y_2), et en la faisant tourner autour de l'axe y. Trouver la courbe pour laquelle l'aire de la surface est extrémale.

Exercice 16 : Vérifier que les équations de Newton d'un système de N points matériels soumis à des forces dérivant d'un potentiel $V(\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_N, t)$ sont les équations d'Euler-Lagrange résultant de la fonction lagrangienne :

$$\begin{aligned} L\left(\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_N, \dot{\vec{q}}_1, \ldots, \dot{\vec{q}}_N, t\right) &= T(\dot{\vec{q}}_1, \ldots, \dot{\vec{q}}_N) - V(\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_N, t) \\ \text{où} \qquad T(\dot{\vec{q}}_1, \ldots, \dot{\vec{q}}_N) &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2} m_n |\, \dot{\vec{q}}_n \,|^2 \;=\; \text{énergie cinétique totale.} \end{aligned}$$

Exercice 17 : Montrer que les deux fonctions lagrangiennes L et L' des mêmes variables $q = (q_1, \ldots, q_l)$, $\dot{q} = (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_l)$ et t donnent les mêmes équations d'Euler-Lagrange s'il existe une fonction $M(q, t)$ telle que :

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + (d_t M)(q, \dot{q}, t).$$

Série 5 Hiver 97/98

<u>Exercice 15 :</u> Considérer la surface de révolution obtenue en prenant une courbe dans le plan (x, y) passant par deux points extrêmes donnés, (x_1, y_1) et (x_2, y_2), et en la faisant tourner autour de l'axe y. Trouver la courbe pour laquelle l'aire de la surface est extrémale.

L'aire d'une bande de la surface vaut $2\pi x \mathrm{d}s = 2\pi x\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$ donc la surface totale mesure

$$S_{\text{tot}} = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x.$$

Pour que celle-ci soit extrémale, il faut établir et résoudre l'équation d'Euler

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

pour $f(x, y') = x\sqrt{1+y'^2}$.

Or $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, donc $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0$, soit

$$xy' = a\sqrt{1+y'^2}.$$

Pour résoudre cette équation, on l'élève au carré et on sépare les variables de $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

$$\begin{aligned} y'^2(x^2-a^2) &= a^2 \\ \mathrm{d}y &= \pm\frac{a\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}, \qquad \text{avec } a > 0. \end{aligned}$$

Pour assurer que y soit réel, on choisit $a < x$ et on trouve

$$y(x) = \pm a \operatorname{Arg\,ch}\left(\frac{x}{a}\right) + b.$$

On détermine a et b à partir des conditions $y(x_1) = y_1$ et $y(x_2) = y_2$. Remarquons que

$$x(y) = a \operatorname{ch}\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

est l'équation d'une chaînette.

Exercice 16 : Vérifier que les équations de Newton d'un système de N points matériels soumis à des forces dérivant d'un potentiel $V(\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_N, t)$ sont les équations d'Euler-Lagrange résultant de la fonction lagrangienne :

$$\begin{aligned} L\left(\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_N, \dot{\vec{q}}_1, \ldots, \dot{\vec{q}}_N, t\right) &= T(\dot{\vec{q}}_1, \ldots, \dot{\vec{q}}_N) - V(\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_N, t) \\ \text{où} \qquad T(\dot{\vec{q}}_1, \ldots, \dot{\vec{q}}_N) &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2} m_n |\dot{\vec{q}}_n|^2 \\ &= \text{énergie cinétique totale.} \end{aligned}$$

$$L(\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_N, \dot{\vec{q}}_1, \ldots, \dot{\vec{q}}_N, t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2} m_n |\dot{\vec{q}}_n|^2 - V(\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_N, t)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{n,i}} &= m_n \dot{q}_{n,i}, \qquad \mathrm{d}_t \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{n,i}}\right) = m_n \ddot{q}_{n,i}, \\ \frac{\partial L}{\partial q_{n,i}} &= -\frac{\partial}{\partial q_{n,i}} V(\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_N, t) = F_{n,i}(\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_N, t) \\ \vec{F}_n &= \text{force s'exerçant sur le } n\text{-ème point matériel.} \end{aligned}$$

Les équations d'Euler-Lagrange $\mathrm{d}_t \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{n,i}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_{n,i}} = 0$ donnent

$$m_n \ddot{\vec{q}}_n(t) - \vec{F}_n(\vec{q}_1(t), \ldots, \vec{q}_N(t), t) = 0, \qquad n = 1, \ldots, N.$$

Ce sont les équations de Newton du système de N points matériels.

<u>Exercice 17 :</u> Montrer que les deux fonctions lagrangiennes L et L' des mêmes variables $q = (q_1, \ldots, q_l)$, $\dot{q} = (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_l)$ et t donnent les mêmes équations d'Euler-Lagrange s'il existe une fonction $M(q,t)$ telle que :

$$L'(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + (d_t M)(q,\dot{q},t).$$

- 1ère méthode :

  Il faut vérifier que $\mathrm{d}_t \left(\frac{\partial(\mathrm{d}_t M)}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial(\mathrm{d}_t M)}{\partial q_n} \equiv 0, \qquad n = 1, \ldots, l.$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_t M &= \sum_{n=1}^{l} \frac{\partial M}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial M}{\partial t}, \qquad \frac{\partial(\mathrm{d}_t M)}{\partial \dot{q}_n} = \frac{\partial M}{\partial q_n}, \\
\mathrm{d}_t \left(\frac{\partial(\mathrm{d}_t M)}{\partial \dot{q}_n} \right) &= \sum_{n'=1}^{l} \frac{\partial^2 M}{\partial q_n \partial q_{n'}} \dot{q}_{n'} + \frac{\partial^2 M}{\partial q_n \partial t} \\
\frac{\partial(\mathrm{d}_t M)}{\partial q_n} &= \sum_{n'=1}^{l} \frac{\partial^2 M}{\partial q_n \partial q_{n'}} \dot{q}_{n'} + \frac{\partial^2 M}{\partial q_n \partial t}.
\end{aligned}$$

- 2e méthode :

  Comparer les actions A et A' :

$$\begin{aligned}
A[\alpha] &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L\Big(\alpha(t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha(t), t\Big) \\
A'[\alpha] &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L'\Big(\alpha(t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha(t), t\Big) \\
A'[\alpha] - A[\alpha] &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \underbrace{(\mathrm{d}_t M)(\alpha(t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha(t), t)}_{= (\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\, M(\alpha(t), t)} \\
&= M(\alpha(t_2), t_2) - M(\alpha(t_1), t_1)
\end{aligned}$$

Comme on impose $\alpha(t_1) = q^{(1)}$, $\alpha(t_2) = q^{(2)}$

$$\begin{aligned}
A'[\alpha] - A[\alpha] &= M(q^{(2)}, t_2) - M(q^{(1)}, t_1) \\
&= \text{constante indépendante de } \alpha
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $A'[\alpha]$ et $A[\alpha]$ sont extrémales pour le même mouvement α.

Exercices de mécanique analytique

24 novembre 1997

Exercice 18 : Un corps de masse m soumis à la pesanteur $\vec{g} = g\vec{e}_z$ quitte le point $z = 0$ à $t = 0$ et arrive au point $z = z_1$ à $t = t_1$ (système à un degré de liberté, $\vec{e}_z$: vecteur unité selon l'axe z).

En posant $\gamma(t) = at^2 + bt + c$ avec a, b et $c \in \mathbb{R}$:

- calculer l'action $A(\gamma) = \int_0^{t_1} L\left(\gamma(t), \frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t}\right) \mathrm{d}t$ en fonction des paramètres a, b et c ;
- en tenant compte des conditions aux bords de l'intervalle $[0, t_1]$ et en appliquant le principe de Hamilton, déterminer les paramètres a, b et c qui décrivent effectivement le mouvement du corps.

Exercice 19 : Utiliser le formalisme lagrangien pour écrire en coordonnées polaires les équations du mouvement d'un point matériel se déplaçant dans un plan et soumis à une force dérivant d'un potentiel $V(\vec{q})$.

Faire le même exercice avec les coordonnées sphériques d'un point matériel dans $\mathbb{R}^3$.

Etudier la relation entre la conservation du moment cinétique et les équations d'Euler-Lagrange.

Exercice 20 : On considère un pendule plan constitué d'un ressort de constante k et d'une masse m. Ecrire le lagrangien de ce système en coordonnées polaires et établir les équations de Lagrange correspondantes.

Exercice 21 : Considérer un système isolé autonome de N points matériels avec forces à deux corps centrales. Identifier les constantes du mouvement associées à l'invariance sous les translations et les rotations.

Série 6 Hiver 97/98

<u>Exercice 18 :</u> Un corps de masse m soumis à la pesanteur $\vec{g} = g\vec{e}_z$ quitte le point $z = 0$ à $t = 0$ et arrive au point $z = z_1$ à $t = t_1$ (système à un degré de liberté, $\vec{e}_z$: vecteur unité selon l'axe z). En posant $\gamma(t) = at^2 + bt + c$ avec a, b et $c \in \mathbb{R}$:

- calculer l'action $A(\gamma) = \displaystyle\int_0^{t_1} L\left(\gamma(t), \frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t}\right) \mathrm{d}t$ en fonction des paramètres a, b et c ;
- en tenant compte des conditions aux bords de l'intervalle $[0, t_1]$ et en appliquant le principe de Hamilton, déterminer les paramètres a, b et c qui décrivent effectivement le mouvement du corps.

- Energie cinétique : $T(\dot{z}) = \frac{m}{2}\dot{z}^2$.
- Potentiel : $V(z) = -mgz$.
- Lagrangien : $L(z, \dot{z}) = T(\dot{z}) - V(z) = \frac{m}{2}\dot{z}^2 + mgz$.

Avec $\gamma(t) = at^2 + bt + c$, $\frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t} = 2at + b$, l'action $A(\gamma)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} A(\gamma) &= \int_0^{t_1} L\left(\gamma(t), \frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t}\right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{m}{2}\int_0^{t_1} \left[2a(2a+g)t^2 + 2b(2a+g)t + b^2 + 2gc\right] \mathrm{d}t \end{aligned}$$

et l'intégration sur t donne :

$$A(a, b, c, t_1) = \frac{m}{2}t_1\left[\frac{2a}{3}(2a+g)t_1^2 + b(2a+g)t_1 + b^2 + 2gc\right]. \tag{1}$$

Les conditions aux bords de l'intervalle $[0, t_1]$ donnent :

$$\gamma(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = 0}$$

$$\gamma(t_1) = z_1 \quad \Rightarrow \quad z_1 = at_1^2 + bt_1 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{z_1}{t_1} - at_1 \tag{2}$$

et en insérant ces expressions dans (1) on obtient

$$A(a, z, t_1) = \frac{m}{2} t_1 \left[\frac{1}{3}(a^2 - ga)t_1^2 + \frac{z_1^2}{t_1^2} + g z_1 \right].$$

La condition d'extrémalisation $\frac{\partial A}{\partial a} = 0$ (principe de Hamilton) donne

$$\frac{\partial A}{\partial a}(a, z_1, t_1) = \frac{m}{6} t_1^3 (2a - g) = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{a = \frac{g}{2}}$$

et d'après (2) on trouve $\boxed{b = \frac{z_1}{t_1} - \frac{g}{2} t_1}$.

Le mouvement reliant 0 à z_1 pendant l'intervalle de temps $[0, t_1]$ qui est réellement effectué par le corps est

$$\gamma(t) = \frac{g}{2} t^2 + \left(\frac{z_1}{t_1} - \frac{g}{2} t_1 \right) t$$

[chute libre : accélération g, vitesse initiale $\frac{z_1}{t_1} - \frac{g}{2} t_1$].

Exercice 19 : Utiliser le formalisme lagrangien pour écrire en coordonnées polaires les équations du mouvement d'un point matériel se déplaçant dans un plan et soumis à une force dérivant d'un potentiel $V(\vec{q})$.
Faire le même exercice avec les coordonnées sphériques d'un point matériel dans $\mathbb{R}^3$.
Etudier la relation entre la conservation du moment cinétique et les équations d'Euler-Lagrange.

$$L = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \frac{1}{2} m |\dot{\vec{q}}|^2 - V(\vec{q})$$

1. Coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$: r, ϕ

$$\begin{aligned} q_1 &= r\cos\phi \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_1 = \dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi \\ q_2 &= r\sin\phi \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_2 = \dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi \end{aligned}$$

et $\qquad |\dot{\vec{q}}|^2 = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2$

$$\Rightarrow \quad \bar{L}(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}) = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) - \bar{V}(r, \phi)$$

• Equations d'Euler-Lagrange : avec $Q_1 = r$, $Q_2 = \phi$, les équations

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial Q_i} = 0, \quad i = 1, 2,$$

s'écrivent :

$$\begin{cases} m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 + \dfrac{\partial \bar{V}}{\partial r} = 0 \\ m\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\phi}) + \dfrac{\partial \bar{V}}{\partial \phi} = 0 \end{cases}$$

Si $\bar{V} = \bar{V}(r)$ (potentiel central) alors $\dfrac{\partial \bar{V}}{\partial \phi} = 0$ et la 2e équation ci-dessus exprime la conservation du moment cinétique $mr^2\dot{\phi}$.

2. Coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^3$: r, θ, ϕ

$$\begin{aligned}
q_1 = r\sin\theta\cos\phi \quad &\Rightarrow \quad \dot{q}_1 = (\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta)\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\theta\sin\phi \\
q_2 = r\sin\theta\sin\phi \quad &\Rightarrow \quad \dot{q}_2 = (\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta)\sin\phi + r\dot{\phi}\sin\theta\cos\phi \\
q_3 = r\cos\theta \quad &\Rightarrow \quad \dot{q}_3 = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta
\end{aligned}$$

et $\qquad |\dot{\vec{q}}|^2 = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2$

$$\Rightarrow \qquad \bar{L}(r,\theta,\phi,\dot{r},\dot{\theta},\dot{\phi}) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right) - \bar{V}(r,\theta,\phi)$$

- Equations d'Euler-Lagrange :

$$\left\{\begin{aligned}
m\ddot{r} &= mr(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2) - \frac{\partial\bar{V}}{\partial r} && (1)\\
m\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta}) &= mr^2\sin\theta\,\cos\theta\,\dot{\phi}^2 - \frac{\partial\bar{V}}{\partial\theta} && (2)\\
m\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}) &= -\frac{\partial\bar{V}}{\partial\phi} && (3)
\end{aligned}\right.$$

Relation avec la conservation du moment cinétique $\vec{J} = m\vec{q}\wedge\dot{\vec{q}}$.

Le calcul des expressions des J_i en coordonnées sphériques donne :

$$J_1 = -mr^2(\sin\phi\,\dot{\theta} + \cos\theta\,\sin\theta\,\cos\phi\,\dot{\phi}) \qquad (4)$$

$$J_2 = mr^2(\cos\phi\,\dot{\theta} - \cos\theta\,\sin\theta\,\sin\phi\,\dot{\phi}) \qquad (5)$$

$$J_3 = mr^2\sin^2\theta\,\dot{\phi} \qquad (6)$$

Compte tenu des équations (3) et (6) on trouve

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J_3 = -\frac{\partial\bar{V}}{\partial\phi}. \qquad (7)$$

D'autre part, l'équation (4) permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}J_1}{\mathrm{d}t} = &-m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta})\sin\phi - mr^2\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin\phi)\\
&-m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\sin^2\theta\dot{\phi}\right)\mathrm{cotg}\,\theta\cos\phi - mr^2\sin^2\theta\dot{\phi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{cotg}\,\theta\cos\phi).
\end{aligned}$$

Faisant usage des équations (2) et (3) on trouve :

$$\frac{\mathrm{d}J_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial \theta} \sin \phi + \frac{\partial \bar{V}}{\partial \phi} \mathrm{cotg}\, \theta \cos \phi. \tag{8}$$

Un calcul analogue à partir de l'équation (5) donne

$$\frac{\mathrm{d}J_2}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial \bar{V}}{\partial \theta} \cos \phi + \frac{\partial \bar{V}}{\partial \phi} \mathrm{cotg}\, \theta \sin \phi. \tag{9}$$

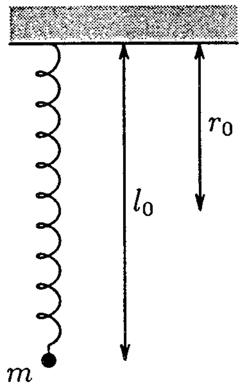
Si $\bar{V} = \bar{V}(r)$ (potentiel central) alors $\dfrac{\partial \bar{V}}{\partial \theta} = 0, \dfrac{\partial \bar{V}}{\partial \phi} = 0$, et les équations (7), (8) et (9) expriment la conservation du moment cinétique $\vec{J}$.

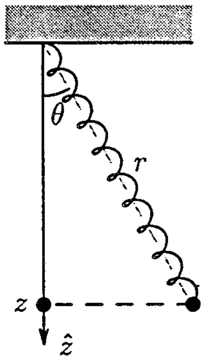
On a par ailleurs $|\vec{J}\,|^2 = m^2 r^4 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta\, \dot{\phi}^2)$ = constante de mouvement. Ceci permet d'écrire (1) de la manière suivante :

$$m\ddot{r} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{force centrifuge}}}{\frac{|\vec{J}\,|^2}{mr^3}} - \frac{\mathrm{d}\bar{V}(r)}{\mathrm{d}r},$$

équation différentielle pour $r = r(t)$.

Exercice 20 : On considère un pendule plan constitué d'un ressort de constante k et d'une masse m. Ecrire le lagrangien de ce système en coordonnées polaires et établir les équations de Lagrange correspondantes.





Energie cinétique : $T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$

Potentiel : $V = V_{\text{ressort}} + V_{\text{grav}}$

$V_{\text{ressort}} = \frac{k}{2}(r - r_0)^2, \qquad r_0 =$ longueur à vide du ressort.

$v_{\text{grav}} = -mgz + C = -mgr\cos\theta + C$

$V_{\text{grav}} = 0$ si $z = l_0 \quad \Rightarrow \quad C = mgl_0 \quad \Rightarrow \quad V_{\text{grav}} = mg(l_0 - r\cos\theta)$.

Lagrangien : $L = T - V$

$$L(r,\theta,\dot{r},\dot{\theta}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k}{2}(r - r_0)^2 - mg(l_0 - r\cos\theta).$$

Equations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = \frac{\partial L}{\partial r} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{r}) = mr\dot{\theta}^2 - k(r - r_0) + mg\cos\theta$$

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -k(r - r_0) + mg\cos\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mr^2\dot{\theta}) = -mgr\sin\theta$$

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = -g\sin\theta.$$

Exercice 21 : Considérer un système isolé autonome de N points matériels avec forces à deux corps centrales. Identifier les constantes du mouvement associées à l'invariance sous les translations et les rotations.

1. **Translations**

   Notation : $\vec{q}_n$ = vecteur-lieu du $n$ième point matériel $= (q_{n,1}, q_{n,2}, q_{n,3})$.

$$\begin{aligned} q_{n,i} &\mapsto Q_{n,i} = \phi^{\epsilon}_{n,i}(q) = q_{n,i} + \epsilon a_i, \quad |\vec{a}\,| = 1. \\ \dot{Q}_{n,i} &= \dot{q}_{n,i} \\ L(q,\dot{q}) &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} m_n |\dot{\vec{q}}_n|^2 - \frac{1}{2}\sum_{\substack{n,m=1 \\ n\neq m}}^{N} V_{n,m}\left(|\vec{q}_n - \vec{q}_m|\right) \\ \bar{L}(Q,\dot{Q}) &= L\left(q(Q), \dot{q}(Q,\dot{Q})\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} m_n |\dot{\vec{Q}}_n|^2 - \frac{1}{2}\sum_{\substack{n,m=1 \\ n\neq m}}^{N} V_{n,m}\left(|\vec{Q}_n - \vec{Q}_m|\right) \\ &= L(Q,\dot{Q}) \end{aligned}$$

   $\Rightarrow$ les translations sont des symétries.

   Théorème de Nœther :

$$G = \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{n,i}} \frac{\partial \phi^{\epsilon}_{n,i}}{\partial \epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} = \text{constante du mouvement.}$$

   $\Rightarrow \quad G = \left(\sum_{n=1}^{N} m_n \dot{\vec{q}}_n\right) \cdot \vec{a}$ = projection de la quantité de mouvement totale sur $\vec{a}$. $\vec{a}$ étant quelconque, la quantité de mouvement totale est une constante du mouvement.

2. **Rotations**

$$q_{n,i} \mapsto Q_{n,i} = \phi^{\epsilon}_{n,i}(q) = (\Lambda(\epsilon)\vec{q}_n)_i = \sum_{j=1}^{3} \Lambda_{ij}(\epsilon) q_{n,j}$$

   $\Lambda(\epsilon) = \{\Lambda_{ij}(\epsilon)\}_{i,j=1}^{3}$ est une matrice décrivant une rotation d'angle ϵ autour d'un axe porté par un vecteur $\vec{\lambda}$.

$$\dot{Q}_{n,i} = \sum_{j=1}^{3} \Lambda_{ij}(\epsilon) \dot{q}_{n,j}$$

La norme d'un vecteur étant invariante sous une rotation, on vérifie que $\bar{L}(Q,\dot{Q}) = L(Q,\dot{Q})$: les rotations sont des symétries.

Théorème de Nœther :

$$G = \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{n,i}} \left.\frac{\partial \phi^{\epsilon}_{n,i}}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \text{ constante du mouvement.}$$

Considérer le cas où $\vec{\lambda}$ est parallèle à l'axe 3 :

$$\Lambda(\epsilon) = \begin{pmatrix} \cos\epsilon & \sin\epsilon & 0 \\ -\sin\epsilon & \cos\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{On a} \quad \frac{\partial \phi^{\epsilon}_{n,i}(q)}{\partial \epsilon} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \Lambda_{ij}(\epsilon)}{\partial \epsilon} q_{n,j}, \quad \text{et} \quad \left.\frac{\partial \Lambda(\epsilon)}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

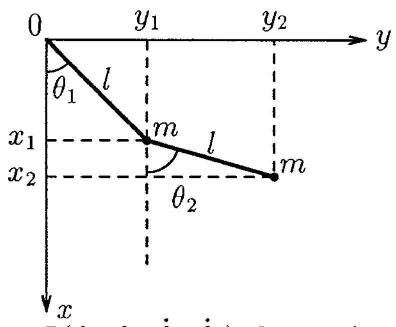
$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad G &= \sum_{n=1}^{N}\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{n,i}} \left.\frac{\partial \Lambda_{ij}(\epsilon)}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} q_{n,j} \\ &= \sum_{n=1}^{N} m_n \left(\dot{q}_{n,1} q_{n,2} - \dot{q}_{n,2} q_{n,1}\right) \\ &= -\sum_{n=1}^{N} m_n \left(\vec{q}_n \wedge \dot{\vec{q}}_n\right)_3 \\ &= \text{3e composante du moment cinétique total.} \end{aligned}$$

Série 8 Hiver 1997/98

Exercices de mécanique analytique

8 décembre 1997

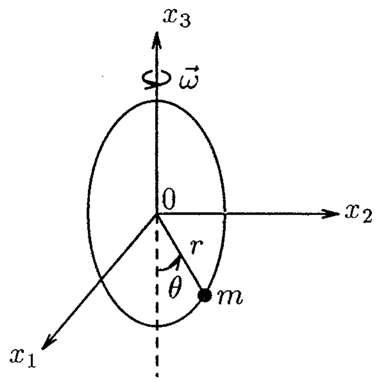
Exercice 25 : Considérer un pendule double plan (masses : m, longueurs : l) :



1. Ecrire le lagrangien $L(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$ du système et établir les équations d'Euler-Lagrange correspondantes.

2. Ecrire ces équations lorsque les oscillations sont lentes et de faible amplitude. Trouver, dans cette approximation, les fréquences propres et les modes normaux du pendule.

Exercice 26 : Une bille de masse m glisse sans frottement sous l'effet de la pesanteur sur un cercle de rayon r tournant à la vitesse angulaire ω constante autour de son axe vertical. × c.f. méc.

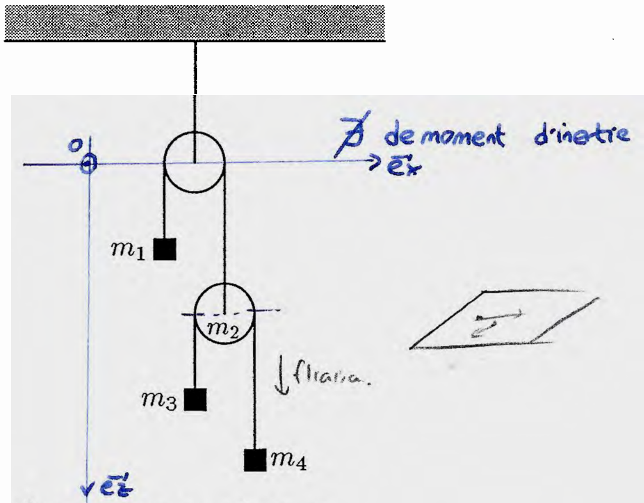


1. Ecrire le lagrangien $L(\theta, \dot{\theta})$ du système et établir l'équation du mouvement de la bille.

2. Etudier les positions d'équilibre de la bille. En particulier, montrer qu'il existe une vitesse angulaire critique ω_c au dessus de laquelle la bille a deux positions d'équilibre $\pm\theta_0$ qui dépendent de la valeur de ω. Déterminer ω_c et θ_0 explicitement. Quelle est la valeur limite de θ_0 lorsque $\omega \to \infty$?

(tourner s.v.p)

Exercice 27 : Considérer le dispositif suivant (machine d'Atwood) :



Déterminer l'accélération des masses m_1 et m_3 ;

1. à l'aide du formalisme lagrangien (fonction lagrangienne du système et équations d'Euler-Lagrange) ;

2. à l'aide des équations de Lagrange de 1ère espèce (principe de d'Alembert et multiplicateurs de Lagrange).

Exercice subsidiaire : Etudier les mouvements d'un pendule sphérique à l'aide du formalisme lagrangien.
[Indications : Utiliser des coordonnées sphériques, montrer que l'une des composantes du moment cinétique est conservée, combiner ce résultat avec la conservation de l'énergie pour obtenir une équation différentielle du premier ordre pour l'angle polaire, en déduire les propriétés des mouvements.]

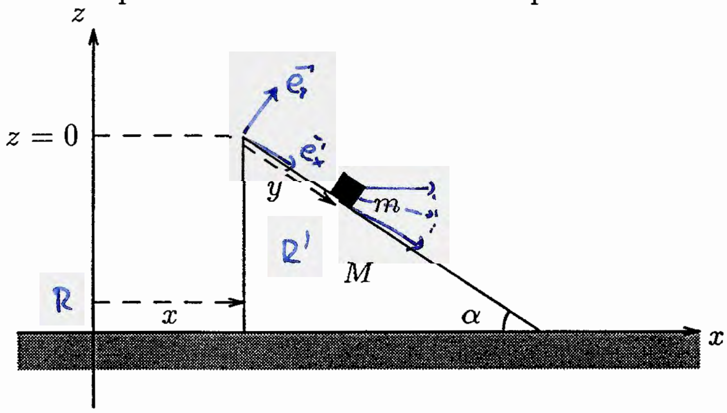
tjs. éqn. de Lagrange

Exercices de mécanique analytique

1 décembre 1997

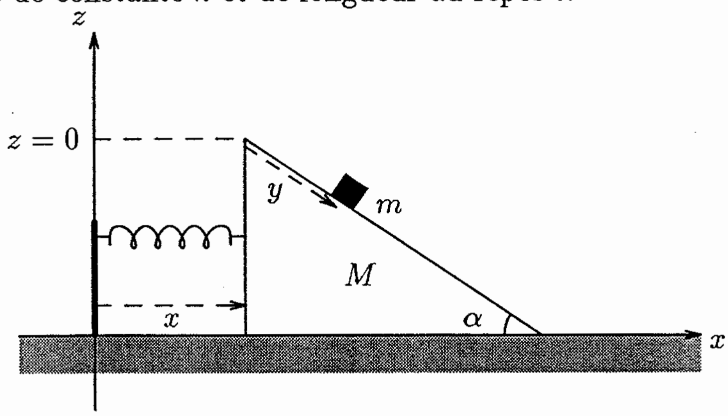
Exercice 22 :

1. Un corps de masse m glisse sans frottement sous l'influence de la pesanteur sur un coin de masse M (plan incliné d'angle α, $0 < \alpha < \pi/2$)). Ce coin peut se déplacer sans frottement sur un plan horizontal.



Ecrire le lagrangien $L(\dot{x}, y, \dot{y})$ de ce système. Déterminer et identifier les constantes du mouvement. Etablir les équations d'Euler-Lagrange et les résoudre en déterminant $x(t)$ et $y(t)$ pour les conditions initiales $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$.

2. Considérer le système lorsque le coin est attaché à un support par un ressort de constante k et de longueur au repos l.



Ecrire le lagrangien $L(x, \dot{x}, y, \dot{y})$ de ce nouveau système. Déterminer et identifier les constantes du mouvement. Etablir les équations d'Euler-Lagrange et les résoudre en déterminant $x(t)$ et $y(t)$ pour les conditions initiales $x(0) = l$, $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$.

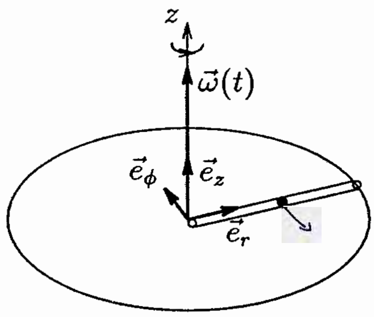
Est-ce que la masse m peut remonter pendant un certain intervalle de temps ? Faut-il imposer des conditions sur m, M et α pour que cela soit possible ?

(tourner s.v.p.)

Exercice 23 :

- Etablir l'équation du mouvement pour une particule de masse m dans un repère en rotation *non* uniforme ($\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$, non constant).

- Considérer une bille mobile sans frottements à l'intérieur d'un tube fixé dans la direction $\vec{e}_r$ sur un disque horizontal qui peut tourner autour de l'axe z.



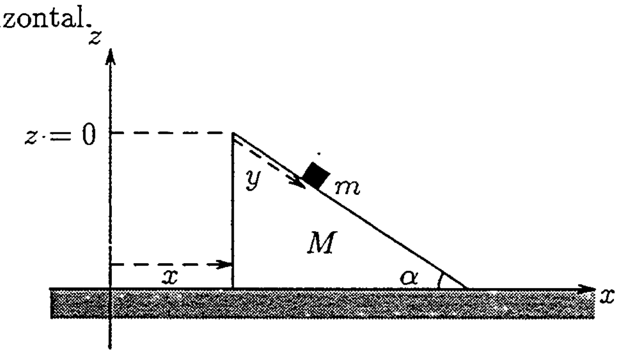
Si on fait tourner le disque avec une vitesse angulaire $\omega(t) = \omega_0 + \Omega \sin t$ où $\omega_0 > \Omega > 0$, déterminer le mouvement $r(t)$ (avec $r(0) = r_0$) que l'on doit imposer à la bille pour que la composante latérale de la force qu'elle ressent soit toujours nulle.

Exercice 24 : Une masse m est fixée à l'une des extrémités d'une barre de masse négligeable. L'autre extrémité de la barre est fixe. Le système est isolé et la force que la barre exerce sur la masse dérive du potentiel $V(r) = \frac{1}{2}k(r - R)^2$. Etudier le mouvement de la masse pour de grandes valeurs de la constante élastique k.

Série 7 Hiver 97/98

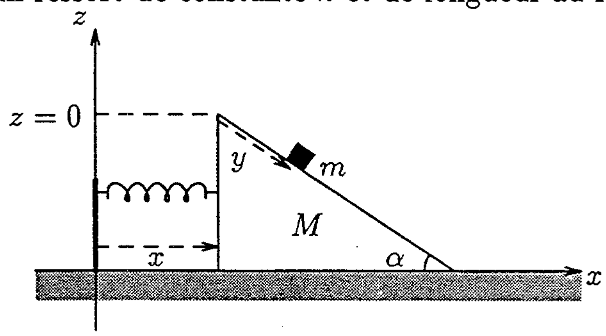
Exercice 22 :

1. Un corps de masse m glisse sans frottement sous l'influence de la pesanteur sur un coin de masse M (plan incliné d'angle α). Ce coin peut se déplacer sans frottement sur un plan horizontal.



Ecrire le lagrangien $L(x, \dot{x}, y, \dot{y})$ de ce système. Déterminer et identifier les constantes du mouvement. Etablir les équations d'Euler-Lagrange et les résoudre en déterminant $x(t)$ et $y(t)$ pour les conditions initiales $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$.

2. Considérer le système lorsque le coin est attaché à un support par un ressort de constante k et de longueur au repos l.

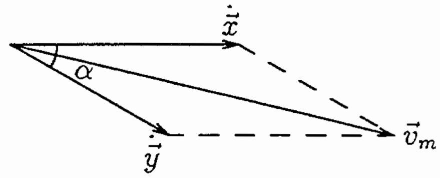


Ecrire le lagrangien $L(x, \dot{x}, y, \dot{y})$ de ce nouveau système. Déterminer et identifier les constantes du mouvement. Etablir les équations d'Euler-Lagrange et les résoudre en déterminant $x(t)$ et $y(t)$ pour les conditions initiales $x(0) = l$, $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$.

Est-ce que la masse m peut remonter pendant un certain intervalle de temps ? Faut-il imposer des conditions sur m, M et α pour que cela soit possible ?

1) • Vitesse de M : $v_M = \dot{x}$

• Vitesse de m : $v_m^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\cos\alpha$



• Potentiel :

$$V_{\text{grav}} = mgz = -mgy\sin\alpha$$

Lagrangien :

$$\begin{aligned} L &= \frac{M}{2}v_M^2 + \frac{m}{2}v_m^2 - V_{\text{grav}} \\ L(\dot{x}, y, \dot{y}) &= \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\dot{y}^2 + m\dot{x}\dot{y}\cos\alpha + mgy\sin\alpha \end{aligned}$$

L indépendant de t $\Rightarrow$ l'énergie totale du système

$$E = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\dot{y}^2 + m\dot{x}\dot{y}\cos\alpha - mgy\sin\alpha$$

est une constante du mouvement.

L indépendant de x $\Rightarrow$ x est une variable cyclique et son moment conjugué

$$p_x \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + m\dot{y}\cos\alpha$$

est une constante du mouvement. C'est la composante horizontale de la quantité de mouvement totale du système.

Equations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \quad \rightarrow \quad (M+m)\ddot{x} + m\ddot{y}\cos\alpha = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{\partial L}{\partial y} \quad \rightarrow \quad \ddot{y} + \ddot{x}\cos\alpha = g\sin\alpha \qquad (2)$$

L'équation (1) donne :

$$\ddot{x} = -\frac{m\cos\alpha}{M+m}\ddot{y} \qquad (3)$$

et en insérant dans (2) on obtient

$$\ddot{y} = \frac{(M+m)g\sin\alpha}{M+m\sin^2\alpha}.$$

Solution :

$$y(t) = \frac{(M+m)g\sin\alpha}{2(M+m\sin^2\alpha)}t^2 + At + B.$$

Condition initiales : $y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 0 \ \rightarrow\ A = B = 0.$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{(M+m)g\sin\alpha}{2(M+m\sin^2\alpha)}t^2}$$

Avec cette expression, l'équation (3) devient :

$$\ddot{x} = -\frac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{M+m\sin^2\alpha}.$$

Solution :

$$x(t) = -\frac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{2(M+m\sin^2\alpha)}t^2 + A't + B'.$$

Conditions initiales : $x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = 0 \ \rightarrow\ A' = 0,\ B' = x_0,$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = -\frac{mg\sin 2\alpha}{4(M+m\sin^2\alpha)}t^2 + x_0}$$

2) • Vitesse de M : $v_M = \dot{x}$

- Vitesse de m : $v_m^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\cos\alpha$
- Potentiels :

$$\begin{aligned} V_{\text{grav}} &= mgz = -mgy\sin\alpha \\ V_{\text{ressort}} &= \frac{k}{2}(x-l)^2 \end{aligned}$$

Lagrangien :

$$\begin{aligned} L &= \frac{M}{2}v_M^2 + \frac{m}{2}v_m^2 - V_{\text{grav}} - V_{\text{ressort}} \\ L(x,\dot{x},y,\dot{y}) &= \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\dot{y}^2 + m\dot{x}\dot{y}\cos\alpha + mgy\sin\alpha - \frac{k}{2}(x-l)^2 \end{aligned}$$

L indépendant de t $\Rightarrow$ l'énergie totale du système

$$E = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\dot{y}^2 + m\dot{x}\dot{y}\cos\alpha - mgy\sin\alpha + \frac{k}{2}(x-l)^2$$

est une constante du mouvement.

Equations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \quad \rightarrow \quad (M+m)\ddot{x} + m\ddot{y}\cos\alpha = -k(x-l) \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{\partial L}{\partial y} \quad \rightarrow \quad \ddot{y} + \ddot{x}\cos\alpha = g\sin\alpha \tag{5}$$

En insérant (5) dans (4) on trouve :

$$(M + m\sin^2\alpha)\ddot{x} + \frac{mg}{2}\sin 2\alpha + k(x-l) = 0$$

que l'on récrit sous la forme

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \beta = 0, \ \text{avec}\ \omega^2 \equiv \frac{k}{M + m\sin^2\alpha} \ \text{et}\ \beta \equiv \frac{mg\sin 2\alpha - 2kl}{2(M + m\sin^2\alpha)}.$$

Solution :

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta) - \frac{\beta}{\omega^2}$$

Conditions initiales :

$$\begin{aligned} \dot{x}(0) = 0 &\quad \rightarrow \quad A\omega\sin\delta = 0 \ \rightarrow \ \delta = 0 \\ x(0) = l &\quad \rightarrow \quad A = \frac{\beta}{\omega^2} + l \ = \ \frac{mg}{2k}\sin 2\alpha \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x(t) = \frac{mg}{2k}\sin 2\alpha\,[\cos\omega t - 1] + l}$$

En intégrant (5) on obtient :

$$y = -x \cos\alpha + \frac{1}{2} g t^2 \sin\alpha + Ct + D.$$

Conditions initiales :

$$\dot{y}(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C = 0$$
$$y(0) = 0 \quad \rightarrow \quad D = l \cos\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y(t) = -\frac{mg}{2k} \sin 2\alpha \cos\alpha \left[\cos\omega t - 1\right] + \frac{1}{2} g t^2 \sin\alpha.}$$

La masse m peut remonter si pendant un certain intervalle Δt de temps $\dot{y}(t) < 0$.

On peut écrire :

$$\dot{y}(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

avec

$$f_1(t) \equiv \frac{mg\omega \sin 2\alpha \cos\alpha}{2k} \sin\omega t$$
$$f_2(t) = gt \sin\alpha$$

car le sin est minimal pour $\frac{3}{2}\pi$, i.e. égal à -1. Ainsi :

Une condition suffisante pour avoir $\dot{y} < 0$ pendant Δt est :

$$\left| f_1\left(\frac{3\pi}{2\omega}\right) \right| \geq f_2\left(\frac{3\pi}{2\omega}\right)$$
$$\Rightarrow \quad \frac{mg\omega \sin 2\alpha \cos\alpha}{2k} \geq \frac{3\pi}{2\omega} g \sin\alpha$$
$$\frac{m\omega^2 \cos^2\alpha}{k} \geq \frac{3\pi}{2}$$

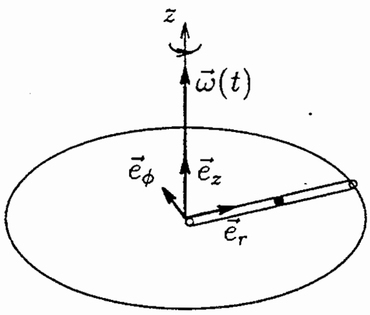
$$\dot{y}(t) = -\frac{mg\omega \sin 2\alpha \cos\alpha}{2k} + gt\sin\alpha \Big|_{t=\frac{3}{2}\frac{\pi}{\omega}}$$
$$\Rightarrow \frac{mg\omega \sin 2\alpha \cos\alpha}{2k} \geqslant gt\sin\alpha \Big|_{t=\frac{3}{2}\frac{\pi}{\omega}}$$
$$\Rightarrow \frac{m\omega^2 \sin 2\alpha \cdot \cos\alpha}{2k} \geqslant \frac{3}{2}\pi \cdot \sin\alpha$$
$$\Rightarrow \frac{m\omega^2 \sin 2\alpha \cdot \cos\alpha}{k \sin\alpha} \geqslant 3\pi$$

En remplaçant ω par son expression on obtient la condition

$$\frac{m \cos^2\alpha}{M + m \sin^2\alpha} \geq \frac{3\pi}{2}.$$

Exercice 23 :

- Etablir l'équation du mouvement pour une particule de masse m dans un repère en rotation *non* uniforme ($\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$, non constant).
- Considérer une bille mobile sans frottements à l'intérieur d'un tube fixé dans la direction $\vec{e}_r$ sur un disque horizontal qui peut tourner autour de l'axe z.



Si on fait tourner le disque avec une vitesse angulaire $\omega(t) = \omega_0 + \Omega \sin t$ où $\omega_0 > \Omega > 0$, déterminer le mouvement $r(t)$ (avec $r(0) = r_0$) que l'on doit imposer à la bille pour que la composante latérale de la force qu'elle ressent soit toujours nulle.

- Le lagrangien dans le repère en rotation non uniforme s'écrit ($\vec{q}$, $\dot{\vec{q}}$: variables dans le repère tournant, $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$)

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \frac{m}{2} \left[\dot{\vec{q}} + (\vec{\omega} \wedge \vec{q})\right]^2 - V(\vec{q}, t).$$

Equations du mouvement :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) &= m \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dot{q}_i + (\vec{\omega} \wedge \vec{q})_i\right] \\
&= m\ddot{q}_i + m(\dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{q})_i + m(\vec{\omega} \wedge \dot{\vec{q}})_i \\
\frac{\partial L}{\partial q_i} &= -m(\vec{\omega} \wedge \dot{\vec{q}})_i - m\left[\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{q})\right]_i - \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad \text{(cf. cours, § 2.5)}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{\vec{q}} = \underbrace{-m(\dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{q})}_{\vec{F}} \underbrace{-2m(\vec{\omega} \wedge \dot{\vec{q}})}_{\vec{F}_{\text{coriolis}}} \underbrace{-m\left[\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{q})\right]}_{\vec{F}_{\text{centrifuge}}} - \overrightarrow{\text{grad}}\ V.$$

$\vec{F}$: force fictive due à la rotation non uniforme du repère.

• Avec $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$, $\vec{q} = r\vec{e}_r$, $\dot{\vec{q}} = \dot{r}\vec{e}_r$,
$(\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$: repère fixé au tube.

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{\text{coriolis}} &= -2m\omega\dot{r}\vec{e}_z \wedge \vec{e}_r = -2m\omega\dot{r}\vec{e}_\phi \\
\vec{F}_{\text{centrifuge}} &= -m\omega^2 r\left[\vec{e}_z \wedge (\vec{e}_z \wedge \vec{e}_r)\right] = m\omega^2 r\vec{e}_r. \\
\vec{F} &= -m\dot{\omega}r\vec{e}_z \wedge \vec{e}_r = -m\dot{\omega}r\vec{e}_\phi.
\end{aligned}$$

Composante latérale de la force : $\vec{R} = -(2m\omega\dot{r} + m\dot{\omega}r)\vec{e}_\phi$

$$|\vec{R}\,| = 0 \Leftrightarrow \frac{\dot{\omega}}{\omega} = -2\frac{\dot{r}}{r}.$$

Avec $\omega = \omega_0 + \Omega \sin t$ on obtient l'équation différentielle pour r :

$$-2\frac{\dot{r}}{r} = \frac{\Omega\cos t}{\omega_0 + \Omega\sin t}.$$

Par intégration on obtient : $\log\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 = \log\left(\frac{\omega_0 + \Omega\sin t}{\omega_0}\right)$.

D'où $r(t) = r_0\left[\frac{\omega_0}{\omega_0 + \Omega\sin t}\right]^{\frac{1}{2}}$.

> Exercice 24 : Une masse m est fixée à l'une des extrémités d'une barre de masse négligeable. L'autre extrémité de la barre est fixe. Le système est isolé et la force que la barre exerce sur la masse dérive du potentiel $V(r) = \frac{1}{2}k(r-R)^2$. Etudier le mouvement de la masse pour de grandes valeurs de la constante élastique k.

La conservation du moment cinétique implique que le mouvement de la barre est plan : coordonnées polaires (r, ϕ) en choisissant l'axe z dans la direction du vecteur moment cinétique.

$$L = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + T(r,\dot{\phi}) - V(r), \quad \text{avec } T(r,\dot{\phi}) = \frac{m}{2}r^2\dot{\phi}^2 \text{ et } V(r) = \frac{1}{2}k(r-R)^2$$

Equations d'Euler-Lagrange :

$$m\ddot{r} = mr\dot{\phi}^2 + F(r), \qquad F(r) = -k(r-R)$$

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\phi}) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad mr^2\dot{\phi} = J = \text{ moment cinétique.}$$

$$m\ddot{r} = \frac{J^2}{mr^3} - k(r-R)$$

Si k est grand les mouvements sont tels que $r(t) \simeq R$. Poser $r = R + \rho$ et développer le 2e membre de l'équation au premier ordre en ρ :

$$\begin{aligned}
\text{avec } \frac{1}{r^3} &= \frac{1}{R^3} - \frac{3}{R^4}\rho + \ldots \text{ on obtient} \\
\ddot{\rho} &= -\omega^2(\rho - \rho_0) \\
\text{où} \quad \omega^2 &= \frac{1}{m}\left(k + 3\frac{J^2}{mR^4}\right) \quad \text{et} \quad \rho_0 = \frac{J^2}{m^2R^3}\frac{1}{\omega^2}
\end{aligned}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}\left(1 + O(\frac{1}{k})\right), \qquad \rho_0 = \frac{J^2}{mR^3}\frac{1}{k}\left(1 + O(\frac{1}{k})\right) \qquad \text{pour } k \text{ grand.}$$

$$\text{Solution : } \quad r(t) \simeq R + \rho_0 + A\cos(\omega t + \theta)$$

$$\text{puisque} \quad E = T + V \quad \Rightarrow \quad V(r) \leq E \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}k\rho^2 \leq E,$$

comme $\rho_0 = O(\frac{1}{k})$, A est au plus $O(\frac{1}{\sqrt{k}})$.

Equation pour ϕ :

$$\begin{aligned}
\dot{\phi} &= \frac{J}{mr^2} = \frac{J}{m(R+\rho_0)^2} - \frac{2J}{m(R+\rho_0)^3} A\cos(\omega t+\theta) + \dots \\
\Rightarrow \quad \phi(t) &= \phi_0 + \frac{J}{mR^2}\left(1+O(\frac{1}{k})\right)t - \frac{2J}{mR^3} \underbrace{\frac{1}{\omega}A}_{O(\frac{1}{k})} \sin(\omega t+\theta) + \dots \\
\Rightarrow \quad \phi(t) &\simeq \phi_0(t) + \phi_1(t) \\
\text{avec } \phi_0(t) &= \phi_0 + \frac{J}{mR^2}t \text{ et } \phi_1(t) = -\frac{2JA}{mR^3\omega}\sin(\omega t+\theta)
\end{aligned}$$

La composante $\phi_0(t)$ vérifie l'équation d'Euler-Lagrange $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L_*}{\partial\dot{\phi}}\right) = \frac{\partial L_*}{\partial\phi}$ issue du lagrangien $L_*(\dot{\phi}) = T(R,\dot{\phi})$.

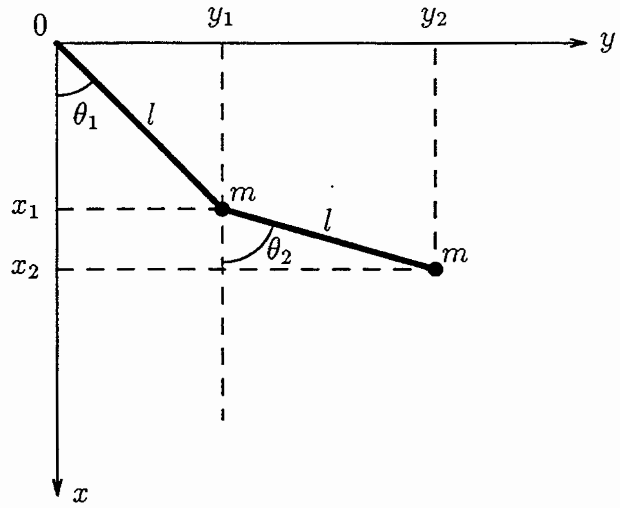
Par ailleurs, dans la limite $k \to \infty$, on trouve :

$$\begin{aligned}
r(t) &\to R \qquad \dot{r}(t) \to -\omega A\sin(\omega t+\theta) \\
\phi(t) &\to \phi_0 + \frac{J}{mR^2}t \qquad \dot{\phi}(t) \to \frac{J}{mR^2}
\end{aligned}$$

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + V(r) \to \underbrace{\frac{1}{2}kA^2}_{\text{énergie du mouvement radial}} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{J^2}{mR^2}}_{\text{énergie du mouvement transverse avec contrainte parfaite}} .$$

Série 8 Hiver 97/98

Exercice 25 : Considérer un pendule double plan (masses : m, longueurs : l) :



1. Ecrire le lagrangien $L(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$ du système et établir les équations d'Euler-Lagrange correspondantes.

2. Ecrire ces équations lorsque les oscillations sont lentes et de faible amplitude. Trouver, dans cette approximation, les fréquences propres et les modes normaux du pendule.

1. • Variables θ_1 et θ_2,

on a : $\begin{cases} x_1 = l\cos\theta_1 \\ y_1 = l\sin\theta_1 \end{cases}$ et $\begin{cases} x_2 = l(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) \\ y_2 = l(\sin\theta_1 + \sin\theta_2) \end{cases}$

ainsi que : $\begin{cases} \dot{x}_1 = -l\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 \\ \dot{y}_1 = l\dot{\theta}_1\cos\theta_1 \end{cases}$ et $\begin{cases} \dot{x}_2 = -l(\dot{\theta}_1\sin\theta_1 + \dot{\theta}_2\sin\theta_2) \\ \dot{y}_2 = l(\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + \dot{\theta}_2\cos\theta_2) \end{cases}$

• Lagrangien :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) \\ &= \frac{1}{2}ml^2\left[2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right] \\ V &= -mgx_1 - mgx_2 \\ &= -mgl(2\cos\theta_1 + \cos\theta_2) \\ L &= T - V \end{aligned}$$

$$L = \frac{1}{2}ml^2\left[2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\right] + mgl(2\cos\theta_1 + \cos\theta_2) \quad (1)$$

- Equations de Lagrange :

pour θ_1 : $$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2l\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) + l\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1-\theta_2) = -2g\sin\theta_1 \quad (2)$$

pour θ_2 : $$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad l\ddot{\theta}_2 + l\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2) - l\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1-\theta_2) = -g\sin\theta_2 \quad (3)$$

2. Oscillations lentes de faible amplitude

- On a $\cos\theta \simeq 1$, $\sin\theta \simeq \theta$ et on néglige les termes en $\dot{\theta}^2\theta$. Les équations (2) et (3) deviennent

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2l\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2 &=& -2g\theta_1 \\ l\ddot{\theta}_2 + l\ddot{\theta}_1 &=& -g\theta_2 \end{array}\right. \quad (4)$$

- Fréquences propres :
Posant $\theta_1 = A_1\cos\omega t$ et $\theta_2 = A_2\cos\omega t$ dans (4), on a

$$\left\{\begin{array}{l} 2(g-l\omega^2)A_1 - l\omega^2 A_2 = 0 \\ -l\omega^2 A_1 + (g-l\omega^2)A_2 = 0 \end{array}\right. \quad (5)$$

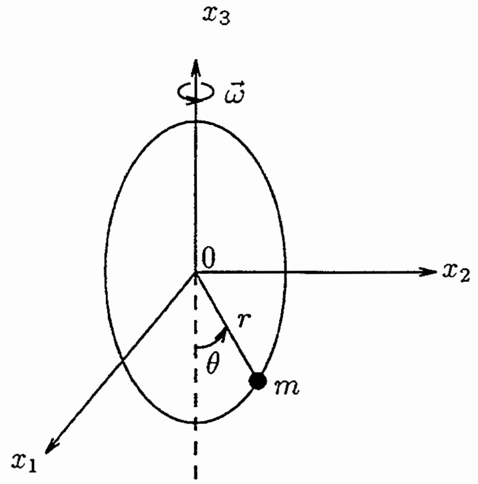
A_1 et $A_2 \neq 0 \Rightarrow \det = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 2(g-l\omega^2) & -l\omega^2 \\ -l\omega^2 & g-l\omega^2 \end{vmatrix} \\ &= 2(g-l\omega^2)^2 - l^2\omega^4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{g}{l}(2\pm\sqrt{2})} \quad (6)$$

- Modes propres :
  i) $\omega = \omega_1$, dans (5) $\Rightarrow$ $A_2 = -\sqrt{2}A_1$, déplacement des masses en sens contraire ;
  ii) $\omega = \omega_2$, dans (5) $\Rightarrow$ $A_2 = \sqrt{2}A_1$, déplacement des masses en même sens.

Exercice 26 : Une bille de masse m glisse sans frottement sous l'effet de la pesanteur sur un cercle de rayon r tournant à la vitesse angulaire ω constante autour de son axe vertical.



1. Ecrire le lagrangien $L(\theta, \dot{\theta})$ du système et établir l'équation du mouvement de la bille.
2. Etudier les positions d'équilibre de la bille. En particulier, montrer qu'il existe une vitesse angulaire critique ω_c au dessus de laquelle la bille a deux positions d'équilibre $\pm\theta_0$ qui dépendent de la valeur de ω. Déterminer ω_c et θ_0 explicitement.
3. Quelle est la valeur limite de θ_0 lorsque $\omega \to \infty$?

1. L'expression des coordonnées cartésiennes en termes de la coordonnée généralisée θ est :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= r \sin\theta \cos \omega t \\
x_2 &= r \sin\theta \sin \omega t \\
x_3 &= -r \cos\theta
\end{aligned}
$$

Posant $x = x_1 + \mathrm{i}x_2 = r \sin\theta\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, on obtient

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= r\left(\dot{\theta}\cos\theta + \mathrm{i}\omega\sin\theta\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \\
\dot{x}_3 &= r\dot{\theta}\sin\theta
\end{aligned}
$$

Energie cinétique : $\dfrac{m}{2}\left(|\dot{x}|^2 + \dot{x}_3^2\right) = \dfrac{m}{2}r^2\left(\dot{\theta}^2 + \omega^2\sin^2\theta\right)$

Potentiel : $V = mgx_3 = -mgr\cos\theta$.

Le lagrangien de la bille soumise à la contrainte s'écrit :

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{mr^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2\theta\right) + mgr\cos\theta \tag{1}$$

Equation d'Euler-Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad \Rightarrow \quad r\ddot{\theta} = (r\omega^2\cos\theta - g)\sin\theta.$$

2. Positions d'équilibre de la bille :

   L'expression (1) montre que la fonction lagrangienne est celle d'un point matériel de "masse" mr^2 sur une droite et soumis au potentiel

$$V(\theta) = -\frac{mr^2}{2}\omega^2\sin^2\theta - mgr\,\cos\theta$$

   Etude des extremums de $V(\theta)$. L'équation

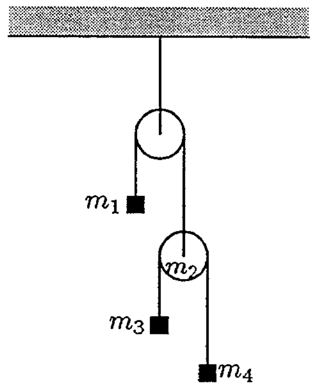
$$\frac{\mathrm{d}V(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = -mr\sin\theta(r\omega^2\cos\theta - g) = 0$$

   donne les relations :

   - Si $\omega < \omega_c = \sqrt{(g/r)}$ (rotation lente) :
     minimum en $\theta = 0$ (équilibre stable)
     maximums en $\theta = \pm\pi$ (équilibre instable).
   - Si $\omega > \omega_c = \sqrt{(g/r)}$ (rotation rapide) :
     maximums en $\theta = 0,\ \theta = \pm\pi$ (équilibre instable)
     minimums en $\theta = \pm\theta_0$ où $\theta_0 = \arccos(g/(r\omega^2))$ (équilibre stable).

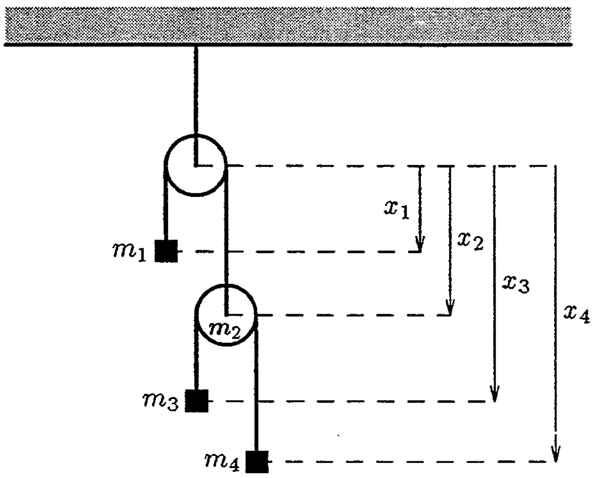
3. $\lim_{\omega\to\infty}\theta_0 = \lim_{\omega\to\infty}\arccos\left(\frac{g}{r\omega^2}\right) = \frac{\pi}{2}.$

Exercice 27 : Considérer le dispositif suivant (machine d'Atwood) :



Déterminer l'accélération des masses m_1 et m_3 ;

1. à l'aide du formalisme lagrangien (fonction lagrangienne du système et équations d'Euler-Lagrange) ;
2. à l'aide des équations de Lagrange de 1ère espèce (principe de d'Alembert et multiplicateurs de Lagrange).



1. Le système est constitué de quatre masses, positions $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, 4$. Les fils ayant une longueur fixée, il y a deux contraintes holonômes :

$$x_1 + x_2 = a_1 = \text{ constante}, \qquad x_3 + x_4 - 2x_2 = a_2 = \text{ constante}.$$

Le système a deux degrés de liberté : on choisit x_1 et x_3 comme coordonnées.

- Lagrangien en absence de liaisons :

$$L=\sum_{i=1}^{4}\frac{m_i}{2}\dot{x}_i^2+\sum_{i=1}^{4}m_i g x_i$$

- les contraintes impliquent $\dot{x}_2=-\dot{x}_1$ et $\dot{x}_4=-\dot{x}_3+2\dot{x}_2=-\dot{x}_3-2\dot{x}_1$ et le lagrangien qui tient compte des liaisons s'écrit :

$$\begin{aligned}L(x_1,\dot{x}_1,x_3,\dot{x}_3)=&\frac{m_1+m_2}{2}\dot{x}_1^2+\frac{m_3}{2}\dot{x}_3^2+\frac{m_4}{2}\left(\dot{x}_3+2\dot{x}_1\right)^2+m_1gx_1\\&+m_2g(a_1-x_1)+m_3gx_3+m_4g\left(a_2+2a_1-x_3-2x_1\right).\end{aligned}$$

Equation d'Euler-Lagrange :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)=\frac{\partial L}{\partial x_1}\quad&\Rightarrow\quad(m_1+m_2+4m_4)\ddot{x}_1+2m_4\ddot{x}_3\\&\qquad=(m_1-m_2-2m_4)g, &(1)\\\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3}\right)=\frac{\partial L}{\partial x_3}\quad&\Rightarrow\quad(m_3+m_4)\ddot{x}_3+2m_4\ddot{x}_1=(m_3-m_4)g. &(2)\end{aligned}$$

De l'équation (2) on obtient :

$$\ddot{x}_3=\frac{(m_3-m_4)g-2m_4\ddot{x}_1}{m_3+m_4}\tag{3}$$

et en insérant dans (1) on trouve

$$\ddot{x}_1=\frac{(m_1-m_2)(m_3+m_4)-4m_3m_4}{(m_1+m_2)(m_3+m_4)+4m_3m_4}g,$$

qui est l'expression de l'accélération de la masse m_1. En l'insérant dans (3) on obtient l'expression de l'accélération de la masse m_3 :

$$\ddot{x}_3=\frac{(m_1+m_2)(m_3-m_4)-2m_4(m_1-m_2-2m_3)}{(m_1+m_2)(m_3+m_4)+4m_3m_4}g.$$

2. Les contraintes $\dot{x}_1+\dot{x}_2=0$ et $-2\dot{x}_2+\dot{x}_3+\dot{x}_4=0$ s'écrivent sous la forme $\sum_{i=1}^{4}\omega_i^\mu\dot{x}_i=0$ pour $\mu=1,2$, avec

$$\begin{aligned}&\omega_1^1=1,\quad \omega_2^1=1,\quad \omega_3^1=0,\quad \omega_4^1=0,\\&\omega_1^2=0,\quad \omega_2^2=-2,\quad \omega_3^2=1,\quad \omega_4^2=1.\end{aligned}$$

Les équations de Lagrange de 1ère espèce (λ_1, λ_2 : multiplicateurs de Lagrange) :

$$
\begin{aligned}
m_1(\ddot{x}_1 - g) &= \lambda_1\omega_1^1 + \lambda_2\omega_1^2 = \lambda_1 && (4)\\
m_2(\ddot{x}_2 - g) &= \lambda_1\omega_2^1 + \lambda_2\omega_2^2 = \lambda_1 - 2\lambda_2 && (5)\\
m_3(\ddot{x}_3 - g) &= \lambda_1\omega_3^1 + \lambda_2\omega_3^2 = \lambda_2 && (6)\\
m_4(\ddot{x}_4 - g) &= \lambda_1\omega_4^1 + \lambda_2\omega_4^2 = \lambda_2 && (7)\\
\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 &= 0 && (8)\\
-2\ddot{x}_2 + \ddot{x}_3 + \ddot{x}_4 &= 0. && (9)
\end{aligned}
$$

donnent un système de 6 équations différentielles pour les 6 inconnues x_1, x_2, x_3, x_4, λ_1 et λ_2.

Résolution pour $\ddot{x}_1$ et $\ddot{x}_3$:

De (8) et (9) on obtient $\ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1$ et $\ddot{x}_4 = -2\ddot{x}_1 - \ddot{x}_3$ et en insérant dans (5) et (7) il vient

$$
\begin{aligned}
-m_2\ddot{x}_1 - \lambda_1 + 2\lambda_2 &= m_2 g\\
-2m_4\ddot{x}_2 - m_4\ddot{x}_3 - \lambda_2 &= m_4 g.
\end{aligned}
$$

En insérant dans les équations ci-dessus les expressions (4) et (6) donnant λ_1 et λ_2 on trouve le système suivant pour les inconnues $\ddot{x}_1$ et $\ddot{x}_3$:

$$
\begin{cases}
(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 - 2m_3\ddot{x}_3 = (m_1 - m_2 - 2m_3)g\\
2m_4\ddot{x}_1 + (m_3 + m_4)\ddot{x}_3 = (m_3 - m_4)g.
\end{cases}
$$

La solution donne les accélérations des masses m_1 et m_3 :

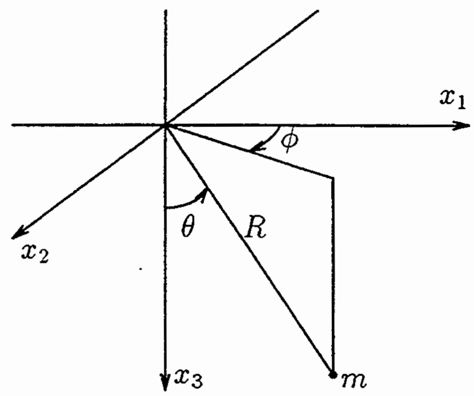
$$
\begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= \frac{(m_1 - m_2)(m_3 + m_4) - 4m_3m_4}{(m_1 + m_2)(m_3 + m_4) + 4m_3m_4}g, && (10)\\
\ddot{x}_3 &= \frac{(m_1 + m_2)(m_3 - m_4) - 2m_4(m_1 - m_2 - 2m_3)}{(m_1 + m_2)(m_3 + m_4) + 4m_3m_4}g. && (11)
\end{aligned}
$$

Les forces R_1 et R_3 dues aux liaisons s'exercant sur les masses m_1 et m_3 sont données par

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \lambda_1\omega_1^1 + \lambda_2\omega_1^2 = \lambda_1\\
R_3 &= \lambda_1\omega_3^1 + \lambda_2\omega_3^2 = \lambda_2
\end{aligned}
$$

et peuvent être explicitement calculées à partir des équations (4), (6) et des expressions (10) et (11).

<u>Exercice subsidiaire :</u> Etudier les mouvements d'un pendule sphérique à l'aide du formalisme lagrangien.



Formalisme lagrangien

Coordonnées sphériques :

$$x_1 = R\sin\theta\,\cos\phi \qquad x_2 = R\sin\theta\,\sin\phi \qquad x_3 = R\cos\theta$$

$$|\dot{\vec{x}}|^2 = R^2\left(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\dot\phi^2\right)$$

$$L = \frac{1}{2}mR^2\left(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\dot\phi^2\right) + mgR\cos\theta$$

- Equation d'Euler-Lagrange pour ϕ :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot\phi} = 0 \quad\rightarrow\quad \begin{aligned} mR^2\sin^2\theta\dot\phi &= mR^2J \\ &= \text{3e composante du moment cinétique} \\ &= \text{constante.} \end{aligned}$$

- Conservation de l'énergie

$$\begin{aligned} mR^2E &= T + V = \frac{1}{2}mR^2\left(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\dot\phi^2\right) - mgR\cos\theta \\ &= \frac{1}{2}mR^2\left(\dot\theta^2 + \frac{J^2}{\sin^2\theta}\right) - mgR\cos\theta \\ \dot\theta^2 &= 2\left(E + \frac{g}{R}\cos\theta\right) - \frac{J^2}{\sin^2\theta} \end{aligned}$$

- Changement de variable : $u = \cos\theta$

$$\dot u = -\sin\theta\dot\theta \qquad \dot\theta = -\frac{\dot u}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\dot{u}^2 = 2\left(E + \frac{g}{R}u\right)(1-u^2) - J^2 \doteq F(u) - J^2 \tag{1}$$

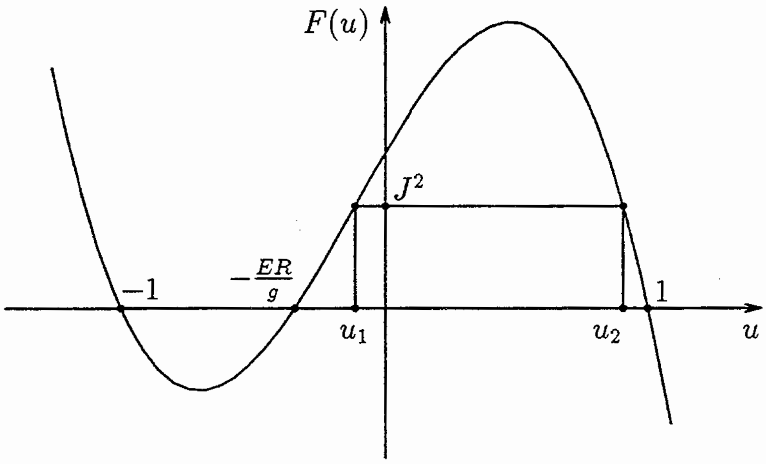
Cette équation détermine la projection du portrait des états sur le plan $(u, \dot{u})$.

$$F(u) = \dot{u}^2 + J^2 > 0 \text{ et } u \in [-1,1] \quad \Rightarrow \quad E > -\frac{g}{R}$$

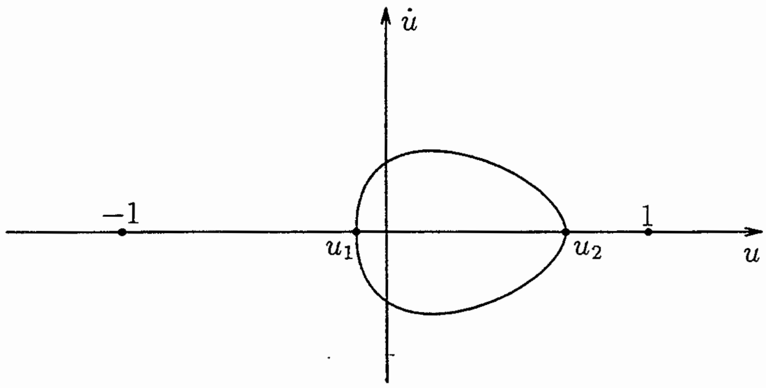
$$\dot{u}^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad J^2 < F(u)$$

Les valeurs de u atteintes dans un mouvement d'énergie E et de moment cinétique J sont celles pour lesquelles $F(u) > J^2$.

a) $-\frac{g}{R} < E < \frac{g}{R}$. Pour ces valeurs de l'énergie, $F(u)$ possède un zéro dans $[-1, +1]$.



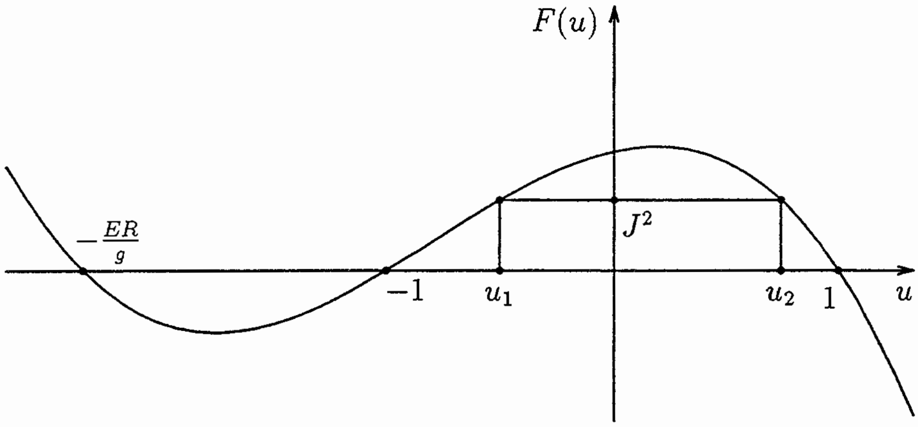
u oscille périodiquement entre u_1 et u_2.



u_1 et u_2 sont tels que :

$$-\frac{ER}{g} \leq u_1 < u_2 \leq 1, \qquad \text{les égalités ont lieu si } J = 0.$$

b) $E > \frac{g}{R}$. $F(u)$ ne s'annule pas dans $[-1, +1]$.



A nouveau, oscillation périodique entre u_1 et u_2.

$$-1 \leq u_1 < u_2 \leq 1, \quad \text{égalités si } J = 0.$$

- Période du mouvement en u :

$$T = 2\int_{u_1}^{u_2} \mathrm{d}u \, \frac{1}{\sqrt{F(u) - J^2}}$$

- Le mouvement selon u détermine le mouvement selon ϕ.

$$\sin^2\theta\dot{\phi} = J \;\rightarrow\; (1-u^2)\dot{\phi} = J$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{J}{1-u^2} \qquad \dot{u} = \sqrt{F(u) - J^2} \\ \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}u} &= J\frac{1}{(1-u^2)\sqrt{F(u) - J^2}} \end{aligned}$$

Cette formule permet de calculer l'acroissement de ϕ pendant la période T :

$$\Delta\phi = 2J\int_{u_1}^{u_2} \mathrm{d}u \, \frac{1}{(1-u^2)\sqrt{F(u) - J^2}}$$

En général, $\Delta\phi$ n'est pas un multiple rationnel de 2π et le mouvement complet du pendule n'est pas périodique.

Si $\Delta\phi = (p/q)2\pi$, p et q entiers et premiers entre eux, le mouvement complet est périodique, de période qT.

Exercices de mécanique analytique

15 décembre 1997

Exercice 28 : Considérer le système isolé constitué de deux corps de masses m_1 et m_2 dans $\mathbb{R}^3$ (positions $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$).

Ecrire le lagrangien de ce système en termes de la coordonnée du centre de masse et de la coordonnée relative.

Etablir les équations de Lagrange en introduisant les coordonnées polaires (r, ϕ) pour décrire le mouvement relatif.

Déduire l'équation donnant l'évolution de $r(\phi)$ (r en fonction de ϕ) et trouver sa solution générale.

[Indication : Exprimer $\ddot{r}$ en fonction de $\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}\phi^2}$ avec $\rho = \frac{1}{r}$ et déduire une équation différentielle du 2e ordre pour ρ.]

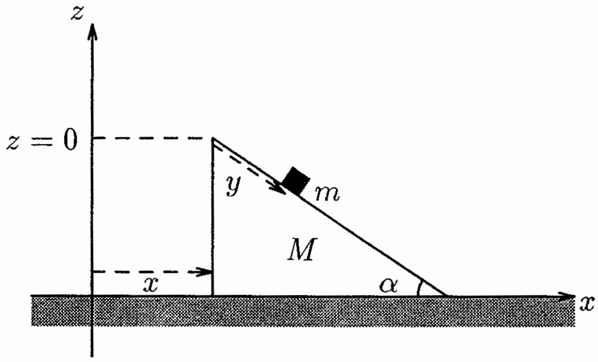
Exercice 29 : Déterminer les mouvements possibles du "patin à glace libre" : deux points matériels de masse m définissent un segment de droite de longueur fixe et se meuvent sans frottement dans un plan. Les mouvements sont tels que la vitesse du centre de masse est parallèle au segment. Les seules forces agissant sur les masses sont celles dues aux liaisons.

[Indications : Ecrire les équations définissant les contraintes et les équations de Lagrange de 1ère espèce. Déterminer quelles grandeurs sont des constantes du mouvement. Déterminer le mouvement du patin par rapport à son centre de masse. Déterminer le mouvement du centre de massse à l'aide d'un choix judicieux de coordonnées polaires.]

origine

(*tourner s.v.p.*)

Exercice 30 :



Un corps de masse m se déplace sous l'influence de la pesanteur sur un coin de masse M (plan incliné d'angle α). Ce coin glisse sans frottement sur un plan horizontal. On suppose qu'il y a une force de frottement $\vec{F}_f = -\eta \dot{y} \hat{y}$ ($\eta > 0$, $\hat{y}$: vecteur unité selon la direction y) entre la masse m et le coin. Ecrire le lagrangien de ce système, établir les équations de Lagrange et les résoudre pour les conditions initiales $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$. Etudier la limite de $\dot{y}(t)$ lorsque $t \to \infty$.

Exercice subsidiaire : Etudier les mouvements d'un pendule sphérique à l'aide des équations de Lagrange de 1ère espèce.

[Indications : Examiner comment on retrouve l'équation differentielle établie dans l'exercice subsidiaire de la série 8 à partir des équations de Lagrange de 1ère espèce décrivant le pendule.]

Série 9 Hiver 97/98

<u>Exercice 28 :</u> Considérer le système isolé constitué de deux corps de masses m_1 et m_2 dans $\mathbb{R}^3$ (positions $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$).
Ecrire le lagrangien de ce système en termes de la coordonnée du centre de masse et de la coordonnée relative.
Etablir les équations de Lagrange en introduisant les coordonnées polaires (r, ϕ) pour décrire le mouvement relatif.
Déduire l'équation donnant l'évolution de $r(\phi)$ (r en fonction de ϕ) et trouver sa solution générale.
[Indication : Exprimer $\ddot{r}$ en fonction de $\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}\phi^2}$ avec $\rho = \frac{1}{r}$ et déduire une équation différentielle du 2e ordre pour ρ.]

- Lagrangien du système :

$$L = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{x}}_2^2 + \frac{K}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}$$

avec $K = Gm_1m_2$, $G =$ constante de gravitation.

Coordonnée du centre de masse :

$$\vec{X} = \frac{m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2}{M}, \qquad M = m_1 + m_2.$$

Coordonnée relative : $\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$.

Exprimant $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ en fonction de $\vec{X}$ et $\vec{r}$ on trouve :

$$L = \frac{M}{2}\dot{\vec{X}}^2 + \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^2 + \frac{K}{r} \quad \text{où } \mu = \frac{m_1m_2}{M} \quad \text{(masse réduite).}$$

Conservation du moment cinétique $\Rightarrow$ le mouvement relatif décrit par $\vec{r}$ est plan $\Rightarrow$ coordonnées polaires (r, ϕ) :

$$L = \frac{M}{2}\dot{\vec{X}}^2 + \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + \frac{K}{r}.$$

- Equations de Lagrange :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial X_i} \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M\dot{X}_i) = 0$$

$\Rightarrow$ La quantité de mouvement du centre de masse est une constante du mouvement.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \phi} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mu r^2 \dot{\phi}) = 0$$

$\Rightarrow \quad \mu r^2 \dot{\phi} = J =$ constante (moment cinétique).

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = \frac{\partial L}{\partial r} \Rightarrow \mu \ddot{r} - \mu r \dot{\phi}^2 + \frac{K}{r^2} = 0. \tag{1}$$

- Déduction de l'équation pour $r(\phi)$:

La conservation du moment cinétique permet d'écrire

$$\dot{\phi} = \frac{J}{\mu r^2}. \tag{2}$$

D'autre part on a (utiliser (2) et poser $\rho = 1/r$) :

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\dot{\phi} = \frac{J}{\mu r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi} = -\frac{J}{\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{J}{\mu}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\phi} \\ \ddot{r} &= \frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}\phi}\dot{\phi} = -\frac{J^2}{\mu^2 r^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\phi^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{J^2}{\mu^2}\rho^2\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}\phi^2} \end{aligned} \tag{3}$$

Insérant (2) et (3) dans (1) on trouve :

$$\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}\phi^2} + \rho = \frac{K\mu}{J^2}.$$

C'est une équation différentielle non homogène du 2e ordre pour $\rho(\phi)$. La solution générale est

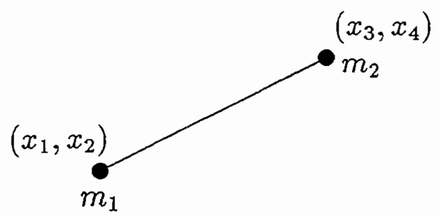
$$\rho(\phi) = A\cos(\phi + \delta) + \alpha \quad \text{avec } \alpha = \frac{K\mu}{J^2}$$

où A et δ sont à déterminer par les condition initiales.

$$\Rightarrow \quad \boxed{r(\phi) = \frac{d}{1 + \epsilon\cos(\phi + \delta)}} \text{ avec } d = \frac{1}{\alpha} \text{ et } \epsilon = \frac{A}{\alpha}.$$

C'est l'équation générale d'une conique en coordonnées polaires, d'excentricité ϵ, avec l'origine à l'un des foyers.

Exercice 29 : Déterminer les mouvements possibles du "patin à glace libre" : deux points matériels de masse m définissent un segment de droite de longueur fixe et se meuvent sans frottement dans un plan. Les mouvements sont tels que la vitesse du centre de masse est parallèle au segment. Les seules forces agissant sur les masses sont celles dues aux liaisons.
[Ecrire les équations définissant les contraintes et les équations de Lagrange de 1ère espèce. Déterminer quelles grandeurs sont des constantes du mouvement. Déterminer le mouvement du patin par rapport à son centre de masse. Déterminer le mouvement du centre de masse à l'aide d'un choix judicieux de coordonnées polaires.]



- 1 liaison holonôme : $(x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 = l^2$ (1)

$\Rightarrow (x_1 - x_3)(\dot{x}_1 - \dot{x}_3) + (x_2 - x_4)(\dot{x}_2 - \dot{x}_4) = 0$ (1')

- 1 liaison non-holonôme ($m_1 = m_2 = m$) :

$$\frac{\dot{x}_2 + \dot{x}_4}{\dot{x}_1 + \dot{x}_3} = \frac{x_2 - x_4}{x_1 - x_3}$$

$$(x_1 - x_3)(\dot{x}_2 + \dot{x}_4) - (x_2 - x_4)(\dot{x}_1 + \dot{x}_3) = 0 \qquad (2)$$

Ces conditions s'écrivent $\sum_{i=1}^{4} \omega_i^\mu \dot{x}_i = 0$, $\mu = 1, 2$, avec :

$$\omega_1^1 = x_1 - x_3, \quad \omega_2^1 = x_2 - x_4, \quad \omega_3^1 = -\omega_1^1, \quad \omega_4^1 = -\omega_2^1$$

$$\omega_1^2 = x_4 - x_2, \quad \omega_2^2 = x_1 - x_3, \quad \omega_3^2 = \omega_1^2, \quad \omega_4^2 = \omega_2^2$$

- Les équations du mouvement sont les équations de Lagrange de 1ère espèce :

$$m\ddot{x}_i = \sum_{\mu=1}^{2} \lambda_\mu \omega_i^\mu$$

Explicitement :

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= \lambda_1(x_1 - x_3) + \lambda_2(x_4 - x_2) \\ m\ddot{x}_2 &= \lambda_1(x_2 - x_4) + \lambda_2(x_1 - x_3) \\ m\ddot{x}_3 &= \lambda_1(x_3 - x_1) + \lambda_2(x_4 - x_2) \\ m\ddot{x}_4 &= \lambda_1(x_4 - x_2) + \lambda_2(x_1 - x_3) \end{aligned} \tag{3}$$

Ces équations donnent :

$$\sum_{i=1}^{4} m\dot{x}_i\ddot{x}_i = \sum_{\mu=1}^{2} \lambda_\mu \underbrace{\sum_{i=1}^{4} \omega_i^\mu \dot{x}_i}_{=0} = 0$$

Il résulte de là que $T = \frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{4}(\dot{x}_i)^2$ = énergie cinétique totale est une constante du mouvement.

- Passage aux coordonnées de CM et aux coordonnées relatives :

$$X_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_3), \quad X_2 = \frac{1}{2}(x_2 + x_4), \quad u_1 = (x_1 - x_3), \quad u_2 = (x_2 - x_4)$$

Les contraintes (1) et (2) s'écrivent :

$$u_1^2 + u_2^2 = l^2, \qquad u_2\dot{X}_1 - u_1\dot{X}_2 = 0$$

et les équations du mouvement (3) deviennent :

$$m\ddot{X}_1 = -\lambda_2 u_2, \qquad m\ddot{X}_2 = +\lambda_2 u_1 \tag{4}$$

$$m\ddot{u}_1 = 2\lambda_1 u_1, \qquad m\ddot{u}_2 = 2\lambda_1 u_2 \tag{5}$$

On tire de (4) :

$$m\left(\dot{X}_1\ddot{X}_1 + \dot{X}_2\ddot{X}_2\right) = -\lambda_2 \underbrace{\left(u_2\dot{X}_1 - u_1\dot{X}_2\right)}_{=0} = 0.$$

Cette équation implique que $T_{CM} = m\left((\dot{X}_1)^2 + (\dot{X}_2)^2\right)$ = énergie cinétique du CM est une constante du mouvement.

De manière analogue, (5) donne :

$T_{\text{rel}} = \frac{1}{4}m\left((\dot{u}_1)^2 + (\dot{u}_2)^2\right)$ = énergie cinétique du mouvement relatif est une constante du mouvement.

- Poser : $u_1(t) = l\cos\phi(t), \qquad u_2(t) = l\sin\phi(t)$.

$$T_{\text{rel}} = \text{ cste } \rightarrow \dot{\phi} = \text{ cste } \rightarrow \phi(t) = \phi_0 + \omega t \tag{6}$$

Le mouvement relatif est un mouvement de rotation uniforme. Le CM décrit une courbe Γ dont la tangente au point $\vec{X}(t)$ forme un angle $\phi(t)$ avec l'axe horizontal. Comme $|\dot{\vec{X}}| = V =$ cste (parce que $T_{CM} =$ cste), $\dot{X}_1 = V\cos\phi$, $\dot{X}_2 = V\sin\phi$.

En coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} X_1(t) &= r(t)\cos\theta(t) \\ X_2(t) &= r(t)\sin\theta(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\cdot\dot{\theta} &= V\cos\phi \\ \dot{X}_2(t) &= \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\cdot\dot{\theta} &= V\sin\phi \end{aligned} \tag{7}$$

Résolvant ces équations par rapport à $\dot{r}$ et $r\dot{\theta}$ on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{r} &= V\cos(\theta - \phi) \\ r\dot{\theta} &= V\sin(\theta - \phi) \end{aligned} \tag{8}$$

Choisir l'origine des coordonnées polaires (r, θ) de manière à ce qu'elle coïncide avec le centre du cercle osculateur à Γ en $\vec{X}(0)$. Avec ce choix : $\dot{r}(0) = \ddot{r}(0) = 0$. Les équations (8) impliquent alors :

$$\theta(0) = \phi_0 \pm \frac{\pi}{2}, \qquad \dot{\theta}(0) = \pm V/r(0), \qquad \dot{\theta}(0) = \dot{\phi}(0) = \omega.$$

La dernière condition est obtenue à partir de la dérivée par rapport au temps de la première équation (8).

Une conséquence de ces conditions est : $\omega = \pm V/r(0)$.

Le choix de l'origine nous conduit à rechercher la solution de (8) vérifiant les conditions initiales : $r(0) = V/|\omega|$, $\theta(0) = \phi_0 \pm \frac{\pi}{2}$. L'on constate que $r(t) = r(0)$, $\theta(t) = \phi(t) \pm \frac{\pi}{2}$ vérifie (8) et satisfait les conditions initiales. La solution du problème étant unique, on a trouvé la solution du problème.

Le CM décrit un cercle de rayon $V/|\omega|$ avec une vitesse de rotation constante ω ; ω et V sont déterminés par $T_{CM} = mV^2$ et $T_{\mathrm{rel}} = \frac{1}{4}ml^2\omega^2$.

- Les équations (4) et (5) donnent les valeurs des multiplicateurs de Lagrange (indépendants du temps dans le cas présent) :

$$\lambda_1 = \frac{m}{2}\frac{\ddot{u}_1}{u_1} = -\frac{m}{2}\omega^2, \qquad \lambda_2 = -m\frac{\ddot{X}_1}{u_2} = -m\frac{r(0)}{l}\omega^2. \tag{9}$$

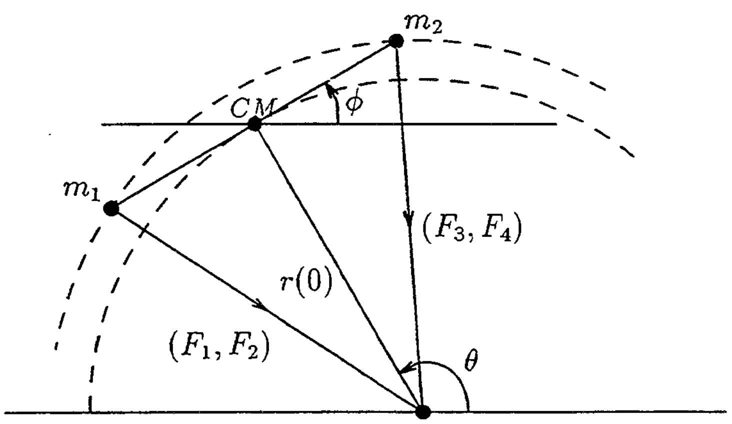
Ce résultat permet de calculer les composantes des forces agissant sur les masses m_1 et m_2 :

$$F_i = \sum_{\mu=1}^{2} \lambda_\mu \omega_i^\mu .$$

L'on obtient :

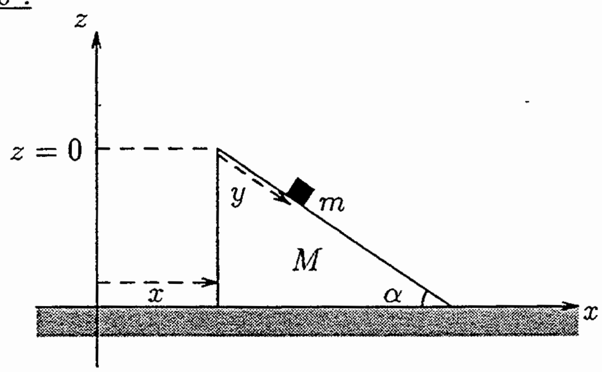
$$\text{masse } m_1 \ : \quad \begin{aligned} F_1 &= -m\omega^2(-r(0)\sin\phi + \frac{l}{2}\cos\phi) \\ F_2 &= -m\omega^2(r(0)\cos\phi + \frac{l}{2}\sin\phi) \end{aligned} \tag{10}$$

$$\text{masse } m_2 \ : \quad \begin{aligned} F_3 &= -m\omega^2(-r(0)\sin\phi - \frac{l}{2}\cos\phi) \\ F_4 &= -m\omega^2(r(0)\cos\phi - \frac{l}{2}\sin\phi) \end{aligned} \tag{11}$$



Les masses m_1 et m_2 décrivent un cercle. (10) et (11) montrent que les liaisons exercent des forces sur elles qui compensent exactement les forces centrifuges résultant de leur mouvement de rotation.

Exercice 30 :



Un corps de masse m se déplace sous l'influence de la pesanteur sur un coin de masse M (plan incliné d'angle α). Ce coin glisse sans frottement sur un plan horizontal. On suppose qu'il y a une force de frottement $\vec{F}_f = -\eta \dot{y}\hat{y}$ ($\eta > 0$, $\hat{y}$: vecteur untié selon la direction y) entre la masse m et le coin. Ecrire le lagrangien de ce système, établir les équations de Lagrange et les résoudre pour les conditions initiales $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$. Etudier la limite de $\dot{y}(t)$ lorsque $t \to \infty$.

Le lagrangien du système est le même que celui de l'exercice 20 mais sans tenir compte du potentiel dû au ressort :

$$L(\dot{x}, y, \dot{y}) = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\dot{y}^2 + m\cos\alpha\,\dot{x}\dot{y} + mg\sin\alpha\, y.$$

Equations de Lagrange :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad (M+m)\ddot{x} + m\cos\alpha\,\ddot{y} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = \underbrace{-\eta\dot{y}}_{\text{frottement}} \quad \Rightarrow \quad m\cos\alpha\,\ddot{x} + m\ddot{y} = mg\sin\alpha - \eta\dot{y}. \tag{2}$$

D'après (1) ; $\ddot{x} = -\dfrac{m\cos\alpha}{M+m}\ddot{y}$. Insérant dans (2) on trouve :

$$\left(m - \frac{m^2\cos^2\alpha}{M+m}\right)\ddot{y} + \eta\dot{y} = mg\sin\alpha.$$

C'est une équation différentielle inhomogène du 2e ordre pour y.

Solution particulière ; $y_1(t) = \dfrac{mg\sin\alpha}{\eta}\,t.$

Equation homogène associée :

$$\ddot{y} + \beta\dot{y} = 0 \qquad \text{avec} \qquad \beta \equiv \frac{\eta}{m - \frac{m^2\cos^2\alpha}{M+m}} = \frac{\eta(m+M)}{mM + m^2\sin^2\alpha} > 0.$$

Solution : $y_2(t) = A\mathrm{e}^{-\beta t} + \dfrac{B}{\beta} \qquad (A, B = \text{constantes}).$

Solution générale :

$$y(t) = y_2(t) + y_1(t) = A\mathrm{e}^{-\beta t} + \frac{B}{\beta} + \frac{mg\sin\alpha}{\eta}\,t$$

Conditions initiales :

$$\dot{y}(0) = 0 \;\Rightarrow\; A = \frac{mg\sin\alpha}{\eta\beta}$$

$$y(0) = 0 \;\Rightarrow\; B = -\beta A = -\frac{mg\sin\alpha}{\eta}$$

D'où : $\boxed{y(t) = \dfrac{mg\sin\alpha}{\eta\beta}\left(\mathrm{e}^{-\beta t} - 1 + \beta t\right)}$

De l'équation (1) on obtient :

$$x(t) = -\frac{m\cos\alpha}{M+m}\,y(t) + Ct + D \qquad (C, D = \text{ constantes}).$$

$\dot{x}(0) = 0$ et $x(0) = 0 \Rightarrow C = D = 0$. Donc

$$\boxed{x(t) = -\frac{m^2 g\sin 2\alpha}{2(M+m)\eta\beta}\left(\mathrm{e}^{-\beta t} - 1 + \beta t\right)}$$

$$\lim_{t\to\infty}\dot{y}(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{mg\sin\alpha}{\eta}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta t}\right) = \frac{mg\sin\alpha}{\eta}.$$

Exercice subsidiaire : Etudier les mouvements d'un pendule sphérique à l'aide des équations de Lagrange de 1ère espèce. [Indications : Examiner comment on retrouve l'équation différentielle établie dans l'exercice 25 (série 8) à partir des équations de Lagrange de 1ère espèce décrivant le pendule.]

Equations d'Euler-Lagrange de première espèce :

On tire de la condition

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$$

la contrainte suivante sur les vitesses :

$$x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 + x_3\dot{x}_3 = 0 \qquad \text{(1 contrainte).} \tag{1}$$

Cette contrainte a la forme

$$\sum_{i=1}^{3} \omega_i \dot{x}_i = 0, \tag{2}$$

avec $\omega_i = x_i$.

Equations du mouvement.

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 - \lambda x_1 &= 0 && (3)\\ m\ddot{x}_2 - \lambda x_2 &= 0 && (4)\\ m\ddot{x}_3 - mg - \lambda x_3 &= 0 && (5) \end{aligned}$$

ici on a 1 seule masse, et on a posé que
$m_i = m \quad , i = 1, .., 3$
(normalement chaque $\ddot{X}_i$ a une masse m_i)
↓ je ne crois pas : on a 1 seul objet, et lorsque il accélère, que ce soit dans la direction X ou Y ou Z, il entraînera tjs la masse m avec lui

$\lambda =$ multiplicateur de Lagrange.

• (3), (4) et (5) $\Rightarrow$

$$m\left(\dot{x}_1\ddot{x}_1 + \dot{x}_2\ddot{x}_2 + \dot{x}_3\ddot{x}_3\right) - mg\dot{x}_3 - \lambda\underbrace{(x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 + x_3\dot{x}_3)}_{=0} = 0$$

$\Rightarrow$ conservation de l'énergie :

$$mR^2E = \frac{1}{2}m|\dot{\vec{x}}|^2 - mgx_3 = \text{ constante} \tag{6}$$

• Chercher une expression de λ en termes des x_i :

$$(3),(4) \text{ et } (5) \quad \Rightarrow \quad m\left(x_1\ddot{x}_1 + x_2\ddot{x}_2 + x_3\ddot{x}_3\right) - mgx_3 - \lambda\underbrace{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}_{R^2} = 0$$

Par ailleurs, on a, par dérivation de (1) par rapport à t

$$\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 + x_1\ddot{x}_1 + x_2\ddot{x}_2 + x_3\ddot{x}_3 = 0.$$

Ceci donne :

$$\lambda = -\frac{m}{R^2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 + gx_3\right). \tag{7}$$

Utiliser la conservation de l'énergie (6) :

$$\lambda = -2m\left(E + \frac{3}{2}\frac{g}{R^2}x_3\right), \tag{8}$$

insérer cette expression de λ dans (5)

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_3 &= mg - 2m\left(E + \frac{3}{2}\frac{g}{R^2}x_3\right)x_3 \\ \Rightarrow \dot{x}_3\ddot{x}_3 &= g\dot{x}_3 - 2Ex_3\dot{x}_3 - 3\frac{g}{R^2}x_3^2\dot{x}_3 \end{aligned}$$

primitive de cette équation :

$$\frac{1}{2}\dot{x}_3^2 = gx_3 - Ex_3^2 - \frac{g}{R^2}x_3^3 + C. \tag{9}$$

Retour à la variable u (cf. exercice subsidiaire série 8) :

$$\begin{aligned} x_3 &= Ru, \qquad u = \cos\theta \\ \frac{1}{2}\dot{u}^2 &= \frac{g}{R}u - Eu^2 - \frac{g}{R}u^3 + C\frac{1}{R^2} \\ \dot{u}^2 &= 2\frac{g}{R}u(1-u^2) - 2Eu^2 + 2C\frac{1}{R^2} \end{aligned}$$

$$\dot{u}^2 = 2\left(E + \frac{g}{R}u\right)(1-u^2) + 2\left(\frac{C}{R^2} - E\right) \tag{10}$$

Cette équation est identique à l'équation (1) de l'exercice subsidiaire série 8 si $J^2 = 2\left(E - \frac{C}{R^2}\right)$. Pour vérifier cette égalité, il faut évaluer J.

$$
\begin{aligned}
(3) \text{ et } (4) \quad \Rightarrow \quad & m(x_1\ddot{x}_2 - x_2\ddot{x}_1) = 0 \\
& m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1) = 0 \\
\Rightarrow \; mR^2 J \quad = \quad & m(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1) = \text{ constante}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J^2 &= \frac{1}{R^4}\left(x_1^2\dot{x}_2^2 + x_2^2\dot{x}_1^2 - 2x_1x_2\dot{x}_1\dot{x}_2\right) \\
&= \frac{1}{R^4}\left[(x_1^2 + x_2^2)(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - (x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2)^2\right] \\
&= \frac{1}{R^4}\left[2(R^2E + gx_3)(R^2 - x_3^2) - R^2\dot{x}_3^2\right]
\end{aligned}
$$

Insérant l'expression (9) de $\dot{x}_3^2$ dans cette expression on trouve bien la relation cherchée.

Exercice 28 : En plus simple

i) Lagrangien :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + G \cdot \frac{m_1 m_2}{(x_1 - x_2)} \qquad (1)$$

ii) Coordonnée relative u et du centre de masse X

$$\begin{cases} X = \frac{1}{M}(m_1 x_1 + m_2 x_2) \\ u = x_1 - x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = X + \frac{m_2}{M} u \\ x_2 = X - \frac{m_1}{M} \cdot u \end{cases}$$

– dans l'ancien Lagrangien, on obtient le nouveau :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M \dot{X}^2 + \frac{1}{2} \chi \cdot \dot{u}^2 + G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{u} \qquad (2)$$

– avec : $M = m_1 + m_2$

$\chi = \frac{m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2}{M}$: masse réduite

iii) Coordonnées polaires pour le mvt. relatif

– comme l'énergie cinétique est un scalaire, alors : $\dot{u}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$, ainsi : $(u = r)$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M \dot{X}^2 + \frac{1}{2} \chi \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \chi r^2 \dot{\theta}^2 + G \frac{m_1 \cdot m_2}{r} \qquad (3)$$

iv) Equations de Lagrange

– On remarque déjà que le problème est holonôme à 1 deg. liberté, paramètre r, ceci car :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} = 0 \Rightarrow P_X = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}} = M \cdot \dot{X} \qquad \text{(qtté mvt. totale)}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow P_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \chi \cdot r^2 \cdot \dot{\theta} \qquad \text{(mo. cinétique sur } \vec{e}_\theta)$$

– Ainsi :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} &= \chi \cdot r \cdot \dot{\theta}^2 - G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} &= \chi \cdot \dot{r} \end{aligned}\right\} \quad \chi \cdot \ddot{r} - \chi \cdot r \cdot \dot{\theta}^2 + G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} = 0 \qquad (4)$$

– Pour résoudre (4), on a : $\dot{\theta}^2 = \left(\frac{P_\theta}{\chi r^2}\right)^2$, donc :

$$\ddot{r} - \frac{P_\theta^2}{\chi^2} \cdot \frac{1}{r^3} + \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{\chi} \cdot \frac{1}{r^2} = 0 \qquad (5)$$

v) Résolution

– On a un mvt. central, alors l'éqn. de Binet est valable :

$$\ddot{r} = -\frac{C^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\right] \quad , C = r^2 \dot{\theta} = \frac{P_\theta}{\chi} \qquad (6)$$

– (6) et (5) donnent :

$$+\frac{P_\theta^2}{\chi^2} \cdot \frac{1}{r^3} - \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{\chi} \cdot \frac{1}{r^2} = -\frac{P_\theta^2}{\chi^2} \cdot \frac{1}{r^2}\left(\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -2 \cdot \frac{1}{r} + \frac{\chi \cdot G \cdot m_1 \cdot m_2}{P_\theta^2}$$

– Soit $\rho = 1/r$; $\alpha = \frac{\chi \cdot G \, m_1 \cdot m_2}{P_\theta^2}$, alors :

$$\rho'' + 2 \cdot \rho = \alpha$$

– soit $x = \rho - 1/2\,\alpha$, alors :

$$x'' + 2 \cdot x = 0 \Longrightarrow x(\theta) = A \cdot \cos(\sqrt{2} \cdot \theta) + B \sin(\sqrt{2} \cdot \theta)$$

$$\Longrightarrow r(\theta) = \frac{1}{A \cdot \cos(\sqrt{2} \cdot \theta) + B \cdot \sin(\sqrt{2} \cdot \theta) + 1/2 \cdot \alpha}$$

– Avec les C.I. $\dot{r}(0) = 0$, $r(0) = L$, on trouve :

$$r(\theta) = \frac{1}{\left(\frac{1}{L} - \frac{1}{2}\alpha\right) \cdot \cos(\sqrt{2} \cdot \theta) + 1/2\,\alpha}$$

#

Série 10 Hiver 1997/98

Exercices de mécanique analytique

5 janvier 1998

Exercice 31 :

1. Calculer la transformée de Legendre $f_*(y)$ pour

   i) $f(x) = x^2$,

   ii) $f(x) = x^3 \quad (x > 0)$.

2. Calculer la transformée de Legendre du lagrangien (écrit en coordonnées sphériques, voir exercice 19) décrivant un point matériel dans $\mathbb{R}^3$ soumis à un potentiel central. Etablir les équations canoniques correspondantes à l'hamiltonien obtenu.

le résultat de cet exercice permet de retrouver l'Hamiltonien très rapidement.

Exercice 32 : Considérer un système lagrangien dont l'énergie cinétique $T(q, \dot{q})$ est une forme quadratique homogène en les vitesses généralisées :

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^{l} t_{nm}(q) \dot{q}_n \dot{q}_m$$

où la matrice $t(q) = \{t_{nm}(q)\}_{n,m=1}^{l}$ est symétrique et définie positive.

i) Montrer que la transformée de Legendre par rapport aux $\dot{q}_n$ de l'énergie cinétique est donnée par

$$T_*(q, p) = \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^{l} t_{nm}^{-1}(q) p_n p_m, \quad = \frac{1}{2} p^t \cdot A^{-1} \cdot p$$

, et si $\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \\ \Rightarrow H = T + V \end{cases}$

où $\{t_{nm}^{-1}(q)\}_{n,m=1}^{l}$ désignent les éléments de la matrice $t^{-1}(q)$.

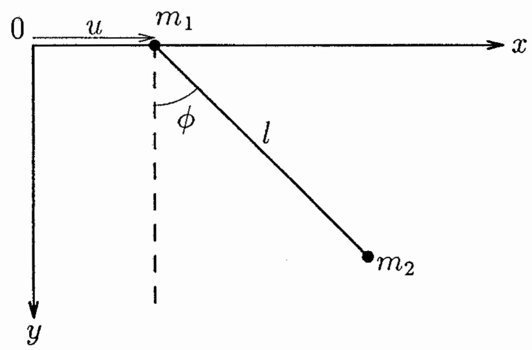
ii) Vérifier que $T_*(q, p)$ est l'énergie cinétique du système exprimée comme fonction des q et p. $T_*(q,p) = T(q, \dot{q}(q,p))$

(tourner s.v.p.)

Exercice 33 : Soient L et L' deux fonctions lagrangiennes équivalentes (voir exercice 17).

Etablir la relation entre les fonctions hamiltoniennes H et H' correspondantes. Vérifier l'équivalence des équations canoniques du mouvement résultant de H et H'.

Exercice 34 :



Un pendule plan de longueur l et de masse m_2 est soumis à l'action de la pesanteur. Son point de suspension de masse m_1 peut se déplacer sans frottement sur l'axe horizontal x.

Ecrire la fonction lagrangienne de ce système en termes des coordonnées généralisées u et ϕ, établir les équations d'Euler-Lagrange, déterminer et caractériser les constantes du mouvement.

Considérer les conditions initiales $u(0) = 0$, $\phi(0) = \alpha$, $\dot{u}(0) = v_0$ et $\dot{\phi}(0) = 0$:

- obtenir une expression donnant $u(t)$ en fonction de $\phi(t)$,
- établir l'équation différentielle du 2e ordre décrivant l'évolution de $\phi(t)$ et la résoudre dans l'approximation des oscillations lentes et de faible amplitude (considérer ϕ petit et négliger les termes du type $\dot{\phi}^2\phi$).

Ecrire la fonction hamiltonienne du système en introduisant les moments conjugués p_u et p_ϕ.

Série 10 Hiver 97/98

Exercice 31 :

1. Calculer la transformée de Legendre $f_*(y)$ pour

   i) $f(x) = x^2$,

   ii) $f(x) = x^3 \quad (x > 0)$.

2. Calculer la transformée de Legendre du lagrangien (écrit en coordonnées sphériques, voir exercice 19) décrivant un point matériel dans $\mathbb{R}^3$ soumis à un potentiel central. Etablir les équations canoniques correspondantes à l'hamiltonien obtenu.

1. i) $f(x) = x^2, \qquad y = f'(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad x = \phi(y) = \frac{1}{2}y$

   Transformée de Legendre :

$$f^*(y) = y\,\phi(y) - f(\phi(y)) = \frac{1}{2}y^2 - (\frac{1}{2}y)^2 = \frac{1}{4}y^2$$

   ii) $f(x) = x^3, \qquad y = f'(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \phi(y) = \left(\frac{y}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$

   Transformée de Legendre :

$$f^*(y) = y\,\phi(y) - f(\phi(y)) = \frac{1}{\sqrt{3}}y^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{y}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}y^{\frac{3}{2}}$$

2. Le lagrangien, en coordonnées sphériques, d'un point matériel soumis à un potentiel central s'écrit (exercice 19) :

$$L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right) - V(r).$$

   Les moments conjugués sont :

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad \longrightarrow \quad \dot{r} = \frac{1}{m}p_r \tag{1}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \quad \longrightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{1}{mr^2}p_\theta \tag{2}$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\sin^2\theta\dot{\phi} \quad \longrightarrow \quad \dot{\phi} = \frac{1}{mr^2\sin^2\theta}p_\phi \tag{3}$$

   La transformation de Legendre de L donne la fonction hamiltonienne :

$$H(r, \theta, p_r, p_\theta, p_\phi) = p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} + p_\phi\dot{\phi} - L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$$

où on exprime $\dot{r}$, $\dot{\theta}$ et $\dot{\phi}$ en fonction de p_r, p_θ et p_ϕ d'après les relations (1)-(3). On obtient :

$$\begin{aligned}
H(r,\theta,p_r,p_\theta,p_\phi) &= \frac{1}{m}p_r^2 + \frac{1}{mr^2}p_\theta^2 + \frac{1}{mr^2\sin^2\theta}p_\phi^2 \\
&\quad -\frac{m}{2}\left[\frac{p_r^2}{m^2} + r^2\frac{p_\theta^2}{m^2r^4} + r^2\sin^2\theta\frac{p_\phi^2}{m^2r^4\sin^4\theta} - V(r)\right] \\
&= \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) + V(r).
\end{aligned}$$

Equations canoniques :

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, \qquad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \qquad \dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2\sin^2\theta},$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{\partial V(r)}{\partial r} + \frac{1}{mr^3}(p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}),$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\phi^2\cos\theta}{mr^2\sin^3\theta},$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \quad \Rightarrow \qquad \text{conservation de } p_\phi$$

(3e composante du moment cinétique $\vec{J}$).

Exercice 32 : Considérer un système lagrangien dont l'énergie cinétique $T(q, \dot{q})$ est une forme quadratique homogène en les vitesses généralisées :

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^{l} t_{nm}(q) \dot{q}_n \dot{q}_m$$

où la matrice $t(q) = \{t_{nm}(q)\}_{n,m=1}^{l}$ est symétrique et définie positive.
Montrer que la transformée de Legendre par rapport aux $\dot{q}_n$ de l'énergie cinétique est donnée par

$$T_*(q, p) = \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^{l} t_{nm}^{-1}(q) p_n p_m,$$

où $\{t_{nm}^{-1}(q)\}_{n,m=1}^{l}$ désignent les éléments de la matrice $t^{-1}(q)$.
Vérifier que $T_*(q, p)$ est l'énergie cinétique du système exprimée comme fonction des q et p.

Transformée de Legendre par rapport aux $\dot{q}_n$ de l'énergie cinétique :

$$T_*(q, p) = \sum_{n=1}^{l} p_n \dot{q}_n - T(q, \dot{q})$$

où les $\dot{q}_n$ sont exprimés en fonction de q et de p d'après la relation :

$$\dot{q}_n = \sum_{m=1}^{l} t_{nm}^{-1}(q) p_m,$$

où $\{t_{nm}^{-1}(q)\}_{n,m=1}^{l}$ désignent les éléments de la matrice $t^{-1}(q)$.

On a donc :

- $$\sum_{n=1}^{l} p_n \dot{q}_n = \sum_{n,m=1}^{l} t_{nm}^{-1}(q) p_n p_m \qquad (1)$$

$$\bullet \quad \begin{aligned} T(q,\dot{q}) &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{l} t_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{l} t_{ij}(q)\sum_{m=1}^{l} t_{im}^{-1}(q)p_m \sum_{n=1}^{l} t_{jn}^{-1}(q)p_n \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n,m=1}^{l}\sum_{i=1}^{l} t_{im}^{-1}(q)\delta_{in}p_n p_m \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n,m=1}^{l} t_{nm}^{-1}(q)p_n p_m \end{aligned} \qquad (2)$$

Par soustraction (1)-(2) on obtient $T_*(q,p) = \frac{1}{2}\sum_{n,m=1}^{l} t_{nm}^{-1}(q)p_n p_m$.

Comparant cette expression avec (2) on vérifie que $T_*(q,p)$ est l'énergie cinétique du système exprimée comme fonction des q et p.

Exercice 33 : Soient L et L' deux fonctions lagrangiennes équivalentes.
Etablir la relation entre les fonctions hamiltoniennes H et H' correspondantes.
Vérifier l'équivalence des équations canoniques du mouvement résultant de H et H'.

Les fonctions lagrangiennes $L(q,\dot{q},t)$ et $L'(q,\dot{q},t)$ conduisant aux mêmes équations d'Euler-Lagrange, il existe une fonction $M(q,t)$ telle que [Exercice 17] :

$$L'(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + (\mathrm{d}_t M)(q,\dot{q},t) \tag{1}$$

- Les moments conjugués associés à L et L' sont :

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_i}, \\ p'_i &= \frac{\partial L'(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_i} = p_i(q,\dot{q},t) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}(\mathrm{d}_t M)(q,\dot{q},t) \\ &= p_i(q,\dot{q},t) + \frac{\partial M(q,t)}{\partial q_i} \end{aligned}$$

Cette équation donne p'_1 comme fonction des p et q :

$$p'_i = p_i + \frac{\partial}{\partial q_i} M(q,t) \tag{2}$$

- La fonction hamiltonienne H' correspondant à L' est donnée par :

$$H'(q,p',t) = \sum_i \dot{q}_i p'_i - L'(q,\dot{q},t)$$

Compte tenu de (1) et (2)

$$H'(q,p',t) = H(q,p(q,p',t),t) - \frac{\partial M(q,t)}{\partial t} \tag{3}$$

- Vérifions que les équations canoniques en H et H' sont bien équivalentes.

Ecrire les équations en H' :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q_i &= \frac{\partial H'(q,p',t)}{\partial p'_i} = \frac{\partial H(q,p(q,p',t),t)}{\partial p'_i} \\ &= \sum_j \frac{\partial H(q,p(q,p',t),t)}{\partial p_j} \frac{\partial p_j(q,p',t)}{\partial p'_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{aligned} \tag{4}$$

On a utilisé la relation $\partial p_j(q,p',t)/\partial p'_i = \delta_{ij}$ qui résulte de (2) et l'on trouve l'équation canonique du mouvement pour q_i.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p'_i &= -\frac{\partial H'(q,p',t)}{\partial q_i} = -\frac{\partial H(q,p(q,p',t),t)}{\partial q_i} \\ &-\sum_j \frac{\partial H(q,p(q,p',t),t)}{\partial p_j} \underbrace{\frac{\partial p_j(q,p',t)}{\partial q_i}}_{\substack{-\partial^2 M(q,t)/(\partial q_j \partial q_i) \\ \text{en vertu de (2)}}} + \frac{\partial^2 M(q,t)}{\partial t \partial q_i} \qquad (5)\end{aligned}$$

D'autre part (2) donne directement :

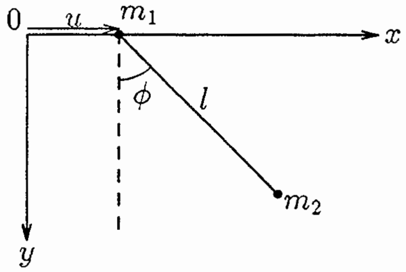
$$\frac{\mathrm{d}p'_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} + \sum_j \frac{\partial^2 M(q,t)}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q_j + \frac{\partial^2 M(q,t)}{\partial q_i \partial t}. \qquad (6)$$

L'insertion de (6) dans (5) conduit à :

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\sum_j \frac{\partial^2 M}{\partial q_i \partial q_j}\left(\frac{\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial H}{\partial p_j}\right). \qquad (7)$$

Le second membre de (7) est nul en vertu de (4). Cette équation conduit à l'équation canonique du mouvement pour p_i.

Exercice 34 :



Un pendule plan de longueur l et de masse m_2 est soumis à l'action de la pesanteur. Son point de suspension de masse m_1 peut se déplacer sans frottement sur l'axe horizontal x.
Ecrire la fonction lagrangienne de ce système en termes des coordonnées généralisées u et ϕ, établir les équations d'Euler-Lagrange, déterminer et caractériser les constantes du mouvement.
Considérer les conditions initiales $u(0) = 0$, $\phi(0) = \alpha$, $\dot{u}(0) = v_0$ et $\dot{\phi}(0) = 0$:

- obtenir une expression donnant $u(t)$ en fonction de $\phi(t)$,
- établir l'équation différentielle du 2e ordre décrivant l'évolution de $\phi(t)$ et la résoudre dans l'approximation des oscillations lentes et de faible amplitude (considérer ϕ petit et négliger les termes du type $\dot{\phi}^2\phi$).

Ecrire la fonction hamiltonienne du système en introduisant les moments conjugués p_u et p_ϕ.

masse m_1 : $x_1 = u, \quad \dot{x}_1 = \dot{u}$
$y_1 = 0, \quad \dot{y}_1 = 0.$

masse m_2 : $x_2 = u + l\sin\phi, \quad \to \quad \dot{x}_2 = \dot{u} + l\dot{\phi}\cos\phi$
$y_2 = l\cos\phi, \quad \to \quad \dot{y}_2 = -l\dot{\phi}\sin\phi.$

Energie cinétique :

$$T = \frac{m_1}{2}\dot{u}^2 + \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{u}^2 + \frac{m_2}{2}l^2\dot{\phi}^2 + m_2 l\dot{u}\dot{\phi}\cos\phi.$$

Potentiel :

$$V = -m_2 g y_2 = -m_2 g l\cos\phi.$$

Lagrangien :

$$L(\phi, \dot{u}, \dot{\phi}) = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{u}^2 + \frac{m_2}{2}l^2\dot{\phi}^2 + m_2 l \dot{u}\dot{\phi}\cos\phi + m_2 g l \cos\phi.$$

Equations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}\right) = \frac{\partial L}{\partial u} \quad \Rightarrow \quad (m_1 + m_2)\ddot{u} + m_2 l\ddot{\phi}\cos\phi - m_2 l\dot{\phi}^2\sin\phi = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \phi} \quad \Rightarrow \quad l\ddot{\phi} + \ddot{u}\cos\phi + g\sin\phi = 0. \tag{2}$$

Constantes de mouvement :

L indépendant de t	$\Rightarrow$	$H(\phi, p_u, p_\phi)$ est une constante de mouvement.
L indépendant de u	$\Rightarrow$	$p_u \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = (m_1+m_2)\dot{u} + m_2 l\dot{\phi}\cos\phi$. La composante horizontale de la quantité de mouvement totale est une constante de mouvement.

• Expression de $u(t)$ en fonction de $\phi(t)$:

L'intégration de $(m_1 + m_2)\dot{u} + m_2 l\dot{\phi}\cos\phi = C$ donne

$$u(t) = \frac{C}{m_1 + m_2}t - \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}\sin\phi(t) + D$$

où les constantes $C = (m_1 + m_2)v_0$ et $D = \frac{m_2 l}{m_1+m_2}\sin\alpha$ sont déterminées par les conditions initiales. On trouve donc :

$$u(t) = v_0 t - \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}\left[\sin\phi(t) - \sin\alpha\right]$$

• Equation différentielle du 2e ordre pour ϕ :

Exprimant $\ddot{u}$ à partir de (1) et insérant dans (2) on trouve :

$$\left(l - \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}\cos^2\phi\right)\ddot{\phi} + \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}\dot{\phi}^2\sin\phi\cos\phi + g\sin\phi = 0.$$

Avec l'approximation des faibles amplitudes ($\cos\phi \simeq 1$, $\sin\phi \simeq \phi$) et en négligeant le terme $\dot{\phi}^2\phi$ (oscillations lentes), on obtient l'équation

$$\ddot{\phi} + \frac{g(m_1 + m_2)}{m_1 l}\phi = 0$$

qui (tenant compte des conditions initiales) a pour solution

$$\phi(t) = \alpha \cos \sqrt{\frac{g(m_1 + m_2)}{m_1 l}}\, t$$

• Hamiltonien du système :

L'énergie cinétique étant une forme quadratique en $\dot{u}$ et $\dot{\phi}$, on calcule les moments conjugués

$$\begin{aligned} p_u &= \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} &=& (m_1 + m_2)\dot{u} + m_2 l \dot{\phi} \cos\phi \\ p_\phi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &=& m_2 l \cos\phi \dot{u} + m_2 l^2 \dot{\phi}, \end{aligned}$$

et on exprime l'énergie cinétique $T(\phi, \dot{u}, \dot{\phi})$ comme fonction de ϕ, p_u et p_ϕ en inversant la matrice :

$$\begin{pmatrix} m_1 + m_2 & m_2 l \cos\phi \\ m_2 l \cos\phi & m_2 l^2 \end{pmatrix}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} H(\phi, p_u, p_\phi) &= T\left(\phi, \dot{u}(\phi, p_u, p_\phi), \dot{\phi}(\phi, p_u, p_\phi)\right) + V(\phi) \\ &= \frac{m_2 l^2 p_u^2 + (m_1 + m_2) p_\phi^2 - 2 m_2 l \cos\phi\, p_u p_\phi}{2 m_2 l^2 (m_1 + m_2 \sin^2\phi)} - m_2 g l \cos\phi \end{aligned}$$

$\mathcal{L}(\theta,\dot\theta) = \frac{mr^2}{2}\left(\dot\theta^2 + \omega^2 \sin^2\theta\right) + mgr\cos\theta$

Série 11 Hiver 1997/98

Exercices de mécanique analytique

12 janvier 1998

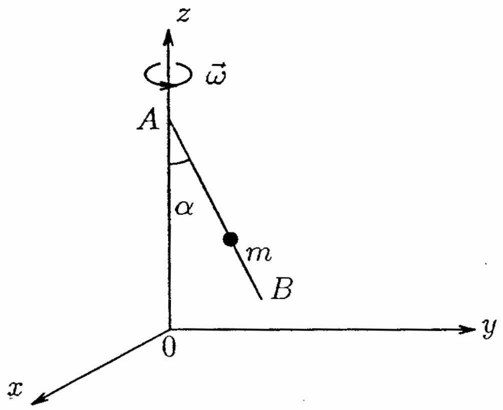
Exercice 35 : Déterminer l'hamiltonien du système décrit dans l'exercice 26 de la série 8. Cet hamiltonien est-il une constante du mouvement ? Représente-t-il l'énergie totale de la bille ?
Etablir les équations canoniques du mouvement de la bille.

Exercice 36 : On considère un point matériel de masse m sur la droite soumis au potentiel $V(q)$. Ecrire l'hamiltonien $H(q,p)$ de ce point matériel et résoudre les équations canoniques dans les deux cas suivants :

1) $V(q) = -\frac{k}{2}q^4 \qquad (k > 0).$
Conditions initales : $q(0) = \alpha$, $p(0) = \sqrt{mk}\,\alpha^2$ où α est une constante positive fixée.

2) $V(q) = -\frac{k}{2}q^2 \qquad (k > 0).$
Conditions initales : $q(0) = 0$, $p(0) = p_0 > 0$.

Exercice 37 : Une bille de masse m se déplace sans frottement sur un rail rectiligne AB attaché en A sur l'axe vertical $0z$ selon la direction définie par l'angle α constant. La distance $0A = h$ et le rail tourne autour de $0z$ avec une vitesse angulaire constante ω.



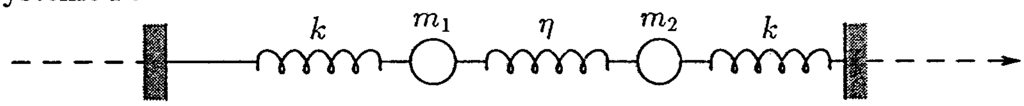
(tourner s.v.p.)

Ecrire le lagrangien de la bille dans des coordonnées adaptées au système. Etablir les équations d'Euler-Lagrange et déterminer le mouvement de la bille à un instant quelconque si on suppose qu'elle se trouve immobile en A à l'instant $t = 0$.

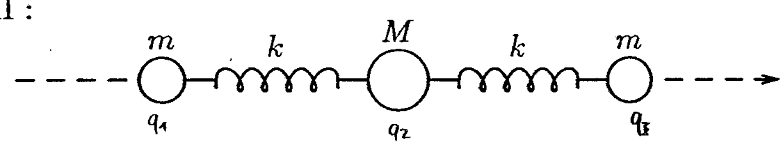
Déterminer l'hamiltonien de la bille et établir les équations canoniques du mouvement. L'hamiltonien est-il une constante du mouvement ? S'agit-il de l'énergie totale de la bille ?

<u>Exercice 38 :</u> Considérer les deux systèmes suivants d'oscillateurs couplés unidimensionnels (oscillations sans frottement le long d'un axe horizontal).

Système I :



Système II :



Ecrire l'hamiltonien et établir les équations canoniques du mouvement pour chacun des systèmes.

Série 11 Hiver 97/98

Exercice 35 : Déterminer l'hamiltonien du système décrit dans l'exercice 26 de la série 8. Cet hamiltonien est-il une constante du mouvement ? Représente-t-il l'énergie totale de la bille ?
Etablir les équations canoniques du mouvement de la bille.

Le lagrangien de la bille du système considéré est donné par (voir équation (1) du corrigé de l'exercice 26, série 8) :

$$L(\theta,\dot{\theta}) = \frac{mr^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2\theta) + mgr\cos\theta.$$

L'énergie cinétique $T(\theta,\dot{\theta}) = \frac{mr^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \omega^2\sin^2\theta)$ n'est pas une forme quadratique *homogène* en $\dot{\theta}$: l'hamiltonien $H(\theta,p_\theta)$ de la bille s'obtient en effectuant explicitement la transformation de Legendre de $L(\theta,\dot{\theta})$ par rapport à $\dot{\theta}$:

$$\begin{aligned}
H(\theta,p_\theta) &= p_\theta\dot{\theta} - L(\theta,\dot{\theta}) \\
\text{avec} \qquad p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \qquad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \\
\Rightarrow \quad H(\theta,p_\theta) &= \frac{p_\theta^2}{mr^2} - \frac{mr^2}{2}\left(\frac{p_\theta^2}{m^2r^4} + \omega^2\sin^2\theta\right) - mgr\cos\theta \\
&= \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{mr^2\omega^2}{2}\sin^2\theta - mgr\cos\theta.
\end{aligned}$$

- $H(\theta,p_\theta)$ ne dépend pas explicitement du temps $\Rightarrow$ l'hamiltonien est une constante du mouvement.
- L'énergie cinétique $T(\theta,\dot{\theta})$ n'est pas une forme quadratique *homogène* en $\dot{\theta}$ $\Rightarrow$ l'hamiltonien ne représente pas l'énergie totale de la bille.

Equations canoniques :

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \qquad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial\theta} = mr\sin\theta(r\omega^2\cos\theta - g).$$

Exercice 36 : On considère un point matériel de masse m sur la droite soumis au potentiel $V(q)$. Ecrire l'hamiltonien $H(q,p)$ de ce point matériel et résoudre les équations canoniques dans les deux cas suivants :

1) $V(q) = -\frac{k}{2}q^4 \qquad (k > 0)$.
Conditions initales : $q(0) = \alpha$, $p(0) = \sqrt{mk}\,\alpha^2$ où α est une constante positive fixée.

2) $V(q) = -\frac{k}{2}q^2 \qquad (k > 0)$.
Conditions initales : $q(0) = 0$, $p(0) = p_0 > 0$.

1. Hamiltonien $H(q,p) = \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{2}q^4$.

Equations canoniques :

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{1}{m}p \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = 2kq^3 \end{aligned} \qquad (1)$$

- 1ère méthode de résolution

$H(q,p) = E$ constante de mouvement déterminée par les conditions initiales :

$$E = \frac{p(0)^2}{2m} - \frac{k}{2}q(0)^4 = 0.$$

Donc $p = \sqrt{km}\,q^2$ (choix du signe déterminé par les conditions initiales) et l'équation (1) donne

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{k}{m}}\,q^2.$$

Par intégration on trouve :

$$t = \sqrt{\frac{m}{k}}\int_\alpha^{q(t)} \frac{1}{q^2}\mathrm{d}q = -\sqrt{\frac{m}{k}}\left[\frac{1}{q(t)} - \frac{1}{\alpha}\right],$$

ce qui donne : $\boxed{q(t) = \frac{\alpha\sqrt{m}}{\sqrt{m} - \alpha\sqrt{k}t}}$

et $$\boxed{p(t) = m\dot{q}(t) = \frac{m^{\frac{3}{2}}\sqrt{k}\alpha^2}{(\sqrt{m} - \alpha\sqrt{k}t)^2}}.$$

- 2ème méthode de résolution

  Des équations canoniques :

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{1}{m}p \; ; \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = 2kq^3,$$

on obtient $\ddot{q} = \dfrac{2k}{m}q^3$.

La multiplication par $\dot{q}$ de cette équation permet d'écrire :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{q}^2 - \frac{k}{m}q^4\right) = 0.$$

$$\text{D'où } \dot{q}^2 = A + \frac{k}{m}q^4 \text{ avec } A = \text{ constante.} \tag{2}$$

Condition initiales :

$$\begin{aligned} q(0) &= \alpha > 0 \\ p(0) &= m\dot{q}(0) = \sqrt{mk}\alpha^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{q}(0) = \sqrt{\frac{k}{m}}\alpha^2. \end{aligned}$$

L'équation (2) $\Rightarrow A = 0$ et $\dot{q} = \sqrt{\dfrac{k}{m}}q^2$.

Cette équation peut être récrite sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{q}\right) = -\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

En intégrant avec la condition initiale $q(0) = \alpha$ on obtient :

$$\frac{1}{q(t)} - \frac{1}{\alpha} = -\sqrt{\frac{k}{m}}t,$$

qui donne la solution

$$q(t) = \frac{\alpha\sqrt{m}}{\sqrt{m} - \alpha\sqrt{k}t} \qquad \text{et} \qquad p(t) = m\dot{q}(t) = \frac{m^{\frac{3}{2}}\sqrt{k}\alpha^2}{(\sqrt{m} - \alpha\sqrt{k}t)^2}.$$

2. Hamiltonien $H(q,p) = \dfrac{p^2}{2m} - \dfrac{k}{2}q^2$ Equations canoniques :

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{1}{m}p \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = kq. \end{aligned} \tag{3}$$

- 1ère méthode de résolution

  $H(q,p) = E$ constante de mouvement déterminée par les conditions initiales :

  $$E = \frac{p(0)^2}{2m} - \frac{k}{2}q(0)^2 = \frac{p_0^2}{2m}.$$

  Donc $p = p_0 \left[1 + \dfrac{km}{p_0^2}q^2\right]^{\frac{1}{2}}$ (choix du signe déterminé par les conditions initiales) et l'équation (3) donne :

  $$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{p_0}{m}\left[1 + \frac{km}{p_0^2}q^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

  Par intégration on trouve :

  $$t = \frac{m}{p_0}\int_0^{q(t)}\left[1 + \frac{km}{p_0^2}q^2\right]^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}q = \sqrt{\frac{m}{k}}\,\mathrm{Argsh}\frac{\sqrt{km}}{p_0}q(t),$$

  ce qui donne : $\boxed{q(t) = \dfrac{p_0}{\sqrt{km}}\,\mathrm{sh}\sqrt{\dfrac{k}{m}}t}$

  et $\boxed{p(t) = m\dot{q}(t) = p_0\,\mathrm{ch}\sqrt{\dfrac{k}{m}}t}$.

- 2ème méthode de résolution

  Des équations canoniques on obtient :

  $$\ddot{q} - \omega^2 q = 0 \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

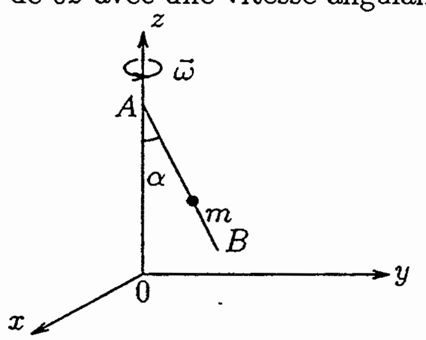
  Solution : $q(t) = A\mathrm{e}^{\omega t} + B\mathrm{e}^{-\omega t}$ où les constantes A et B se déterminent à partir des conditions initiales :

  $$\begin{aligned} q(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad B = -A \\ \dot{q}(0) = \frac{p(0)}{m} = \frac{p_0}{m} \quad &\Rightarrow \quad A = \frac{p_0}{2m\omega} = \frac{p_0}{2\sqrt{km}}. \end{aligned}$$

D'où :

$$
\begin{aligned}
q(t) &= \frac{p_0}{\sqrt{km}} \frac{\mathrm{e}^{\omega t} - \mathrm{e}^{-\omega t}}{2} &= \frac{p_0}{\sqrt{km}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{k}{m}} t \\
p(t) &= m\dot{q}(t) &= p_0 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{k}{m}} t.
\end{aligned}
$$

Exercice 37 : Une bille de masse m se déplace sans frottement sur un rail rectiligne AB attaché en A sur l'axe vertical $0z$ selon la direction définie par l'angle α constant. La distance $0A = h$ et le rail tourne autour de $0z$ avec une vitesse angulaire constante ω.



Ecrire le lagrangien de la bille dans des coordonnées adaptées au système. Etablir les équations d'Euler-Lagrange et déterminer le mouvement de la bille à un instant quelconque si on suppose qu'elle se trouve immobile en A à l'instant $t = 0$. Déterminer l'hamiltonien de la bille et établir les équations canoniques du mouvement. L'hamiltonien est-il une constante du mouvement ? S'agit-il de l'énergie totale de la bille ?

L'expression des coordonnées cartésiennes en termes de la variable généralisée r (distance de la bille au point A) est :

$$\begin{aligned} x &= r \sin\alpha \cos\omega t \\ y &= r \sin\alpha \sin\omega t \\ z &= h - r \cos\alpha \end{aligned}$$

Posant $X = x + \mathrm{i}y = r \sin\alpha \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ on obtient

$$\begin{aligned} \dot{X} &= (\dot{r} \sin\alpha + \mathrm{i}\omega r \sin\alpha) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \\ \dot{z} &= -\dot{r} \cos\alpha \end{aligned}$$

Energie cinétique : $T = \frac{m}{2}\left(|\dot{X}|^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\omega^2 \sin^2\alpha\right)$.

Energie potentielle : $V = mgz = mg(h - r \cos\alpha)$.

Le lagrangien de la bille est :

$$L(r, \dot{r}) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\omega^2 \sin^2\alpha\right) - mg(h - r \cos\alpha)$$

Equation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right) = \frac{\partial L}{\partial r} \Rightarrow \ddot r - \Omega^2 r = g\,\cos\alpha \text{ où } \Omega^2 \equiv \omega^2 \sin^2\alpha.$$

Solution :

$$r(t) = Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t} - \frac{g\,\cos\alpha}{\Omega^2}$$

Conditions initiales $r(0) = 0$, $\dot r(0) = 0 \Rightarrow A = B = \dfrac{g\,\cos\alpha}{2\Omega^2}$.

Donc

$$\boxed{r(t) = \frac{g\,\cos\alpha}{\Omega^2}\left[\mathrm{ch}(\Omega t) - 1\right]}$$

L'hamiltonien :

$$H(r, p_r) = p_r \dot r - L(r, \dot r)$$

avec $p_r = \dfrac{\partial L}{\partial \dot r} = m\dot r, \qquad \dot r = \dfrac{p_r}{m}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad H(r,p_r) &= \frac{p_r^2}{m} - \frac{m}{2}\left(\frac{p_r^2}{m^2} + r^2\omega^2\sin^2\alpha\right) + mg(h - r\cos\alpha) \\ &= \frac{p_r^2}{2m} - \frac{mr^2\omega^2}{2}\sin^2\alpha + mg(h - r\cos\alpha). \end{aligned}$$

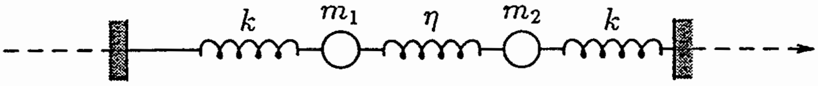
Equations canoniques :

$$\dot r = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, \qquad \dot p_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = m(r\omega^2\sin^2\alpha + g\cos\alpha).$$

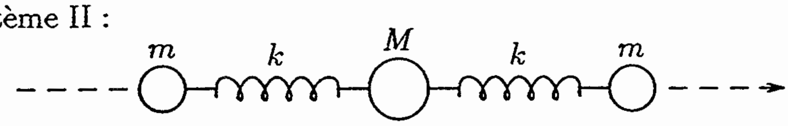
$H(r, p_r)$ est une constante du mouvement, ce n'est pas l'énergie totale de la bille $[T(r,\dot r) = \frac{m}{2}(\dot r^2 - r^2\omega^2\sin^2\alpha)$ n'est pas une forme quadratique *homogène* en $\dot r]$.

Exercice 38 : Considérer les deux systèmes suivants d'oscillateurs couplés unidimensionnels (oscillations sans frottement le long d'un axe horizontal).

Système I :

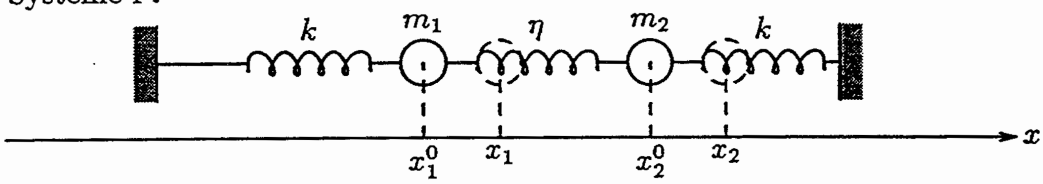


Système II :



Ecrire l'hamiltonien et établir les équations canoniques du mouvement pour chacun des systèmes.

• Système I :



Soient x_i^0 les positions d'équilibre des masses m_i, x_i leur position à un instant t et $q_i \equiv x_i - x_i^0$ les écarts par rapport au point d'équilibre ($i = 1, 2$).

L'élongation du ressort de constante η étant

$$(x_2 - x_1) - (x_2^0 - x_1^0) = q_2 - q_1,$$

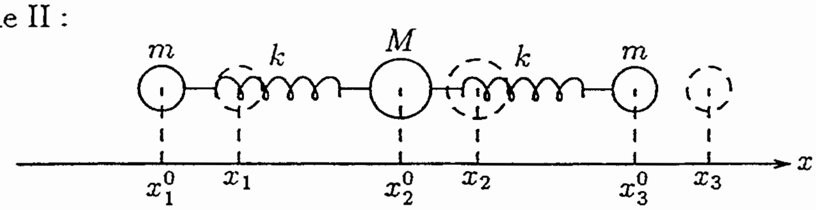
l'hamiltonien du système s'écrit

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{k}{2}q_1^2 + \frac{k}{2}q_2^2 + \frac{\eta}{2}(q_1 - q_2)^2.$$

Equations canoniques du mouvement :

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m_1} \qquad \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = -kq_1 - \eta(q_1 - q_2)$$
$$\dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{m_2} \qquad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = -kq_2 + \eta(q_1 - q_2).$$

• Système II :



Elongation du 1er ressort : $(x_2 - x_1) - (x_2^0 - x_1^0) = q_2 - q_1$

Elongation du 2e ressort : $(x_3 - x_2) - (x_3^0 - x_2^0) = q_3 - q_2$

Hamiltonien :

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_3^2) + \frac{1}{2M}p_2^2 + \frac{k}{2}(q_2 - q_1)^2 + \frac{k}{2}(q_3 - q_2)^2$$

Equations canoniques du mouvement :

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m} \qquad \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = k(q_2 - q_1)$$
$$\dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{M} \qquad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = -k(q_2 - q_1) + k(q_3 - q_2)$$
$$\dot{q}_3 = \frac{\partial H}{\partial p_3} = \frac{p_3}{m} \qquad \dot{p}_3 = -\frac{\partial H}{\partial q_3} = -k(q_3 - q_2)$$

Exercices de mécanique analytique

19 janvier 1998

Exercice 39 : Considérer dans $\mathbb{R}^3$ un système de trois points matériels libres : masses m_i, positions $\vec{x}_i$, $i = 1, 2, 3$. On définit les coordonnées de Jacobi $\vec{\rho}_i$:

$$\begin{aligned} \vec{\rho}_1 &= \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \\ \vec{\rho}_2 &= \vec{x}_3 - (m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2)/(m_1 + m_2) \qquad \vec{\rho}_2 = \vec{x}_3 - \tfrac{1}{2}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \\ \vec{\rho}_3 &= (m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2 + m_3\vec{x}_3)/(m_1 + m_2 + m_3) \qquad \vec{\rho}_3 = \frac{m(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + m_3 \cdot \vec{x}_3}{2m + m_3} \end{aligned}$$

Dans le cas où $m_1 = m_2 = m$, déterminer les moments conjugués $\vec{\pi}_i$ des $\vec{\rho}_i$ et donner l'expression de l'énergie cinétique totale des trois points matériels en termes de ces moments.

Montrer explicitement que la transformation qui fait passer des vecteurs-lieux $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ et des quantités de mouvement $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ des 3 points matériels aux coordonnées de Jacobi $\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, \vec{\rho}_3$ et leurs moments conjugués $\vec{\pi}_1, \vec{\pi}_2, \vec{\pi}_3$ est une transformation canonique.

Exercice 40 : Considérer les deux systèmes hamiltoniens suivants à un degré de liberté (m, k : constantes positives) :

i) $H(q,p) = \dfrac{p^2}{2m} + kq$

ii) $H(q,p) = \dfrac{p^2}{2m} - \dfrac{k}{2}q^2$

Pour chacun d'eux :

- établir les équations canoniques et les résoudre en déterminant $q(t)$ et $p(t)$ pour les conditions initiales $q(0) = q_0$, $p(0) = p_0$.
- vérifier explicitement que la transformation

  $$\phi^t \; : \; (q_0, p_0) \mapsto (q(t), p(t))$$

  est canonique pour tout t.

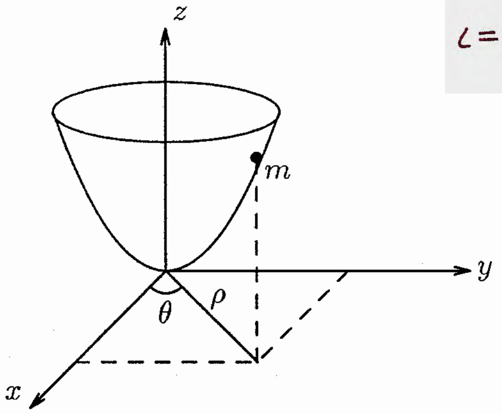
(*tourner s.v.p.*)

Exercice 41 : On considère une particule de masse m qui, sous l'influence de la pesanteur, est contrainte à se déplacer sans frottement sur la surface intérieure d'un paraboloïde défini par l'équation

$$az = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \qquad (a \text{ est une constante positive})$$

$$z = \frac{1}{2a} r^2$$
$$\dot{z} = \frac{1}{a} r \dot{r}$$

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{r^2 \dot{r}^2}{\alpha^2} \right) - \frac{mg}{2\alpha} \cdot r^2$$



Ecrire le lagrangien de la particule en utilisant comme variables ρ et θ.
Etablir les équations de Lagrange et trouver les constantes de mouvement de ce système.
Déterminer $\theta(t)$ pour que le mouvement de cette particule ait lieu dans un plan horizontal situé à une hauteur h du fond du paraboloïde.
De quelle façon $\theta(t)$ dépent-il de h ?
Etudier la stabilité de ce mouvement. conseil : réfléchir avec l'énergie du système et d'interpréter cette énergie comme pot. à 1 dimension

Exercice 42 : Une goutte d'eau sphérique de rayon r tombe verticalement sous l'influence de la pesanteur dans un milieu saturé de vapeur d'eau. Lors de la chute on neglige tout frottement mais on suppose que la condensation provoque une augmentation continue du rayon de la goutte qui est linéaire dans le temps ($\dot{r} = \alpha, \alpha > 0$). Ecrire le lagrangien décrivant cette goutte. (déterminer la masse de la goutte) $\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho$
Etablir l'équation de Lagrange correspondante et déterminer la vitesse de chute $v(t)$ de la goutte pour les conditions initiales $r(0) = r_0$ et $v(0) = v_0$.
L'hamiltonien est-il une constante du mouvement? Justifiez la réponse.

Série 12 Hiver 97/98

Exercice 39 : Considérer dans $\mathbb{R}^3$ un système de trois points matériels libres : masses m_i, positions $\vec{x}_i$, $i = 1, 2, 3$. On définit les coordonnées de Jacobi $\vec{\rho}_i$:

$$\begin{aligned}
\vec{\rho}_1 &= \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \\
\vec{\rho}_2 &= \vec{x}_3 - (m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2)/(m_1 + m_2) \\
\vec{\rho}_3 &= (m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2 + m_3\vec{x}_3)/(m_1 + m_2 + m_3)
\end{aligned}$$

Dans le cas où $m_1 = m_2 = m$, déterminer les moments conjugués $\vec{\pi}_i$ des $\vec{\rho}_i$ et donner l'expression de l'énergie cinétique totale des trois points matériels en termes de ces moments.
Montrer explicitement que la transformation qui fait passer des vecteurs-lieux $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ et des quantités de mouvement $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ des 3 points matériels aux coordonnées de Jacobi $\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, \vec{\rho}_3$ et leurs moments conjugués $\vec{\pi}_1, \vec{\pi}_2, \vec{\pi}_3$ est une transformation canonique.

- Exprimer les $\vec{x}_i$ en termes des $\vec{\rho}_j$ lorsque $m_1 = m_2 = m$. On a dans ce cas :

$$\begin{aligned}
\vec{\rho}_1 &= \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \\
\vec{\rho}_2 &= \vec{x}_3 - \frac{1}{2}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \\
\vec{\rho}_3 &= \frac{1}{M}\left(m(2\vec{x}_3 - 2\vec{\rho}_2) + m_3\vec{x}_3\right) \\
\rightarrow &\quad \Big| \quad \vec{x}_3 = \vec{\rho}_3 + \frac{2m}{M}\vec{\rho}_2 \\
\vec{x}_1 + \vec{x}_2 &= 2(\vec{x}_3 - \vec{\rho}_2) \;=\; 2\left(\vec{\rho}_3 - \frac{m_3}{M}\vec{\rho}_2\right) \\
M &= 2m + m_3, \qquad \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \;=\; \vec{\rho}_1 \\
\rightarrow &\quad \left| \begin{array}{l} \vec{x}_1 = (\vec{\rho}_3 - (m_3/M)\,\vec{\rho}_2) + \frac{1}{2}\vec{\rho}_1 \\ \vec{x}_2 = (\vec{\rho}_3 - (m_3/M)\,\vec{\rho}_2) - \frac{1}{2}\vec{\rho}_1 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

- Energie cinétique :

$$T = \frac{1}{2}\left(m|\dot{\vec{x}}_1|^2 + m|\dot{\vec{x}}_2|^2 + m|\dot{\vec{x}}_3|^2\right)$$

L'insertion des expressions des $\dot{\vec{x}}_i$ en termes des $\dot{\vec{\rho}}_i$ donne :

$$T(\dot{\rho}) = \frac{1}{4}m|\dot{\vec{\rho}}_1|^2 + \frac{mm_3}{M}|\dot{\vec{\rho}}_2|^2 + \frac{1}{2}M|\dot{\vec{\rho}}_3|^2$$

$\vec{\pi}_i =$ moment conjugué de $\vec{\rho}_i$:

$$\left| \quad \vec{\pi}_1 = \frac{1}{2}m\dot{\vec{\rho}}_1, \quad \vec{\pi}_2 = 2\frac{mm_3}{M}\dot{\vec{\rho}}_2, \quad \vec{\pi}_3 = M\dot{\vec{\rho}}_3 \right.$$

$$\rightarrow \left| \quad T(\pi) = \frac{1}{m}|\vec{\pi}_1|^2 + \frac{1}{4}\frac{M}{mm_3}|\vec{\pi}_2|^2 + \frac{1}{2M}|\vec{\pi}_3|^2 \right.$$

- Transformation canonique

Notations :

$$\begin{aligned} y &= (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) \\ Y &= (\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, \vec{\rho}_3, \vec{\pi}_1, \vec{\pi}_2, \vec{\pi}_3). \end{aligned}$$

On a : $Y = My$ où M est une matrice 18×18. M a la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \qquad A, B = \text{ matrices } 9 \times 9.$$

$$A = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & -\mathbb{1} & 0 \\ -\frac{1}{2}\mathbb{1} & -\frac{1}{2}\mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \frac{m}{M}\mathbb{1} & \frac{m}{M}\mathbb{1} & \frac{m_3}{M}\mathbb{1} \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{1} = \text{ matrice unité } 3 \times 3,$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathbb{1} & -\frac{1}{2}\mathbb{1} & 0 \\ -\frac{m_3}{M}\mathbb{1} & -\frac{m_3}{M}\mathbb{1} & \frac{2m}{M}\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

La transformation $y \rightarrow Y$ est canonique si $M \in \mathrm{Sp}(9, \mathbb{R})$, c'est-à-dire $M^T J M = J$,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{9\times 9} \\ -\mathbb{1}_{9\times 9} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$JM = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{9\times 9} \\ -\mathbb{1}_{9\times 9} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ -A & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^T J M = \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ 0 & B^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B \\ -A & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A^T B \\ -B^T A & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^T B = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & -\frac{1}{2}\mathbb{1} & \frac{m}{M}\mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & -\frac{1}{2}\mathbb{1} & \frac{m}{M}\mathbb{1} \\ 0 & \mathbb{1} & \frac{m_3}{M}\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathbb{1} & -\frac{1}{2}\mathbb{1} & 0 \\ -\frac{m_3}{M}\mathbb{1} & -\frac{m_3}{M}\mathbb{1} & \frac{2m}{M}\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{m_3}{M} + \frac{m}{M}\right)\mathbb{1} & \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{m_3}{M} + \frac{m}{M}\right)\mathbb{1} & 0 \\ \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{m_3}{M} + \frac{m}{M}\right)\mathbb{1} & \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{m_3}{M} + \frac{m}{M}\right)\mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} = \mathbb{1}_{9\times 9}.$$

$$A^T B = \mathbb{1}_{9\times 9}, \qquad -B^T A = -(A^T B)^T = -\mathbb{1}_{9\times 9},$$

$$M^T J M = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{9\times 9} \\ -\mathbb{1}_{9\times 9} & 0 \end{pmatrix} = J.$$

Exercice 40 : Considérer les deux systèmes hamiltoniens suivants à un degré de liberté (m, k : constantes positives) :

i) $H(q,p) = \dfrac{p^2}{2m} + kq$

ii) $H(q,p) = \dfrac{p^2}{2m} - \dfrac{k}{2}q^2$

Pour chacun d'eux :

- établir les équations canoniques et les résoudre en déterminant $q(t)$ et $p(t)$ pour les conditions initiales $q(0) = q_0$, $p(0) = p_0$.
- vérifier explicitement que la transformation

$$\phi^t \; : \; (q_0, p_0) \mapsto (q(t), p(t))$$

est canonique pour tout t.

i) $H(q,p) = \dfrac{p^2}{2m} + kq$

- Equations canoniques : $$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -k \end{aligned}$$

Solutions : $$\begin{aligned} p(t) &= -kt + p_0 \\ q(t) &= -\frac{k}{2m}t^2 + \frac{p_0}{m}t + q_0 \end{aligned}$$

- Transformation $\phi^t \, : \, (q_0, p_0) \mapsto (q(t), p(t))$

$$\begin{aligned} \phi_1^t(q_0, p_0) &= -\frac{k}{2m}t^2 + \frac{p_0}{m}t + q_0 \\ \phi_2^t(q_0, p_0) &= p_0 - kt \end{aligned}$$

Soit $D \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \phi_1^t}{\partial q_0} & \dfrac{\partial \phi_1^t}{\partial p_0} \\ \dfrac{\partial \phi_2^t}{\partial q_0} & \dfrac{\partial \phi_2^t}{\partial p_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t/m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

La transformation est canonique si $D \in \mathrm{Sp}(1, \mathbb{R})$:

$$D^T J D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t/m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t/m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t/m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -t/m \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = J$$

ii) $H(q,p) = \dfrac{p^2}{2m} - \dfrac{k}{2}q^2$

- Equations canoniques : $\left.\begin{aligned} \dot q &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot p &= -\frac{\partial H}{\partial q} = kq \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ddot q - \omega^2 q = 0$ avec $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$

Solutions : $\begin{aligned} q(t) &= A \,\mathrm{ch}\, \omega t + B \,\mathrm{sh}\, \omega t \\ p(t) &= m\omega\, A \mathrm{sh}\, \omega t + m\omega\, B \,\mathrm{ch}\, \omega t \end{aligned}$

Conditions initiales $\Rightarrow$ $A = q_0$, $B = \dfrac{p_0}{m\omega}$

- Transformation $\phi^t : (q_0, p_0) \mapsto (q(t), p(t))$

$$\begin{aligned} \phi_1^t(q_0,p_0) &= q_0 \,\mathrm{ch}\, \omega t + \frac{p_0}{m\omega} \mathrm{sh}\, \omega t \\ \phi_2^t(q_0,p_0) &= m\omega q_0 \,\mathrm{sh}\, \omega t + p_0 \,\mathrm{ch}\, \omega t \end{aligned}$$

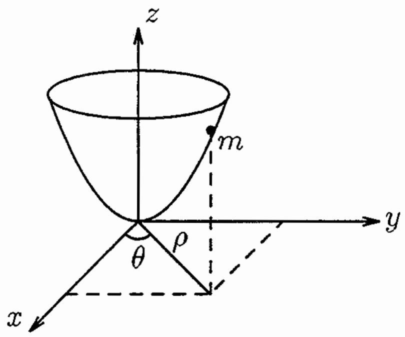
Soit $D \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \phi_1^t}{\partial q_0} & \dfrac{\partial \phi_1^t}{\partial p_0} \\ \dfrac{\partial \phi_2^t}{\partial q_0} & \dfrac{\partial \phi_2^t}{\partial p_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\, \omega t & \frac{1}{m\omega}\mathrm{sh}\, \omega t \\ m\omega \,\mathrm{sh}\, \omega t & \mathrm{ch}\, \omega t \end{pmatrix}$

La transformation est canonique si $D \in \mathrm{Sp}(1, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} D^T J D &= \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\, \omega t & m\omega \,\mathrm{sh}\, \omega t \\ \frac{1}{m\omega}\mathrm{sh}\, \omega t & \mathrm{ch}\, \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\, \omega t & \frac{1}{m\omega}\mathrm{sh}\, \omega t \\ m\omega \,\mathrm{sh}\, \omega t & \mathrm{ch}\, \omega t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\, \omega t & m\omega \,\mathrm{sh}\, \omega t \\ \frac{1}{m\omega}\mathrm{sh}\, \omega t & \mathrm{ch}\, \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m\omega \,\mathrm{sh}\, \omega t & \mathrm{ch}\, \omega t \\ -\mathrm{ch}\, \omega t & -\frac{1}{m\omega}\mathrm{sh}\, \omega t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{ch}^2 \omega t - \mathrm{sh}^2 \omega t \\ \mathrm{sh}^2 \omega t - \mathrm{ch}^2 \omega t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = J \end{aligned}$$

Exercice 41 : On considère une particule de masse m qui, sous l'influence de la pesanteur, est contrainte à se déplacer sans frottement sur la surface intérieure d'un paraboloïde défini par l'équation

$$az = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \qquad (a \text{ est une constante positive})$$



Ecrire le lagrangien de la particule en utilisant comme variables ρ et θ.
Etablir les équations de Lagrange et trouver les constantes de mouvement de ce système.
Déterminer $\theta(t)$ pour que le mouvement de cette particule ait lieu dans un plan horizontal situé à une hauteur h du fond du paraboloïde.
De quelle façon $\theta(t)$ dépent-il de h ?
Etudier la stabilité de ce mouvement.

On utilise les coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) :

$$x = \rho \cos\theta, \qquad y = \rho \sin\theta$$

Energie cinétique : $T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right).$

Potentiel : $V = mgz$

$$\text{Contrainte :} \qquad az = \frac{\rho^2}{2} \Rightarrow \begin{cases} z = \dfrac{\rho^2}{2a} \\ \dot{z} = \dfrac{\dot{\rho}\rho}{a} \end{cases} \tag{1}$$

Le lagrangien décrivant la particule se déplaçant sur la surface intérieure du paraboloïde s'écrit :

$$L(\rho, \dot{\rho}, \dot{\theta}) = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \frac{\dot{\rho}^2\rho^2}{a^2} - \frac{g}{a}\rho^2\right)$$

Equations d'Euler-Lagrange :

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \rho} \;\Rightarrow\; \ddot{\rho} + \frac{1}{a^2}\ddot{\rho}\rho^2 + \frac{2}{a^2}\dot{\rho}^2\rho = \rho\dot{\theta}^2 + \frac{1}{a^2}\dot{\rho}^2\rho - \frac{g}{a}\rho$

D'où : $\boxed{\ddot{\rho} + \frac{\rho}{a^2}(\rho\ddot{\rho} + \dot{\rho}^2) - \rho\dot{\theta}^2 + \frac{g}{a}\rho = 0}$ (2)

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \;\Rightarrow\; m\rho^2\dot{\theta} = J_0 =$ constante du mouvement (moment cinétique)

Le lagrangien ne dépend pas explicitement de t

$$\Rightarrow \quad E = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \frac{\dot{\rho}^2\rho^2}{a^2} + \frac{g}{a}\rho^2\right) = \text{ constante du mouvement (énergie).}$$

Mouvement dans un plan horizontal : $z = h$

Les équations (1) impliquent :

$$\rho = \sqrt{2ah} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\rho} = 0, \quad \ddot{\rho} = 0$$

et l'équation (2) devient :

$$\dot{\theta}^2 - \frac{g}{a} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \theta(t) = \sqrt{\frac{g}{a}}\,t + \delta, \quad \theta(t) \text{ ne dépend pas de } h.$$

La trajectoire de la particule est un cercle de rayon $\rho_0 = \sqrt{2ah}$ parcouru avec une vitesse angulaire constante $\omega = \sqrt{g/a}$ et $J_0 = m\rho_0^2\omega$.

Stabilité du mouvement :

Avec $\dot{\theta} = \frac{J_0}{m\rho^2} = \frac{\rho_0^2\omega}{\rho^2}$, l'expression de l'énergie s'écrit

$$E = \frac{m}{2}\left(1 + \frac{\rho^2}{a^2}\right)\dot{\rho}^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{\omega^2\rho_0^4}{\rho^2} + \omega^2\rho^2\right)$$

et peut être interprétée comme celle d'un point matériel de "masse" $m\left(1+\frac{\rho^2}{a^2}\right)$ sur une droite soumis au potentiel

$$V(\rho) = \frac{m}{2}\left(\frac{\omega^2\rho_0^4}{\rho^2} + \omega^2\rho^2\right).$$

Puisque

$$\left.\frac{\mathrm{d}V(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right|_{\rho=\rho_0} = 0 \qquad \text{et} \qquad \left.\frac{\mathrm{d}^2V(\rho)}{\mathrm{d}\rho^2}\right|_{\rho=\rho_0} = 4m\omega^2 > 0,$$

ρ_0 est un minimum de $V(\rho)$. Le mouvement de la particule sur le cercle de rayon ρ_0 est donc stable.

Exercice 42 : Une goutte d'eau sphérique de rayon r tombe verticalement sous l'influence de la pesanteur dans un milieu saturé de vapeur d'eau. Lors de la chute on neglige tout frottement mais on suppose que la condensation provoque une augmentation continue du rayon de la goutte qui est linéaire dans le temps ($\dot{r} = \alpha, \alpha > 0$).
Ecrire le lagrangien décrivant cette goutte.
Etablir l'équation de Lagrange correspondante et déterminer la vitesse de chute $v(t)$ de la goutte pour les conditions initiales $r(0) = r_0$ et $v(0) = v_0$.
L'hamiltonien est-il une constante du mouvement? Justifier la réponse.

Lors de la chute, le rayon de la goutte s'accroit linéairement selon l'expression $r(t) = \alpha t + r_0$. La masse de la goutte depend du temps et vaut

$$m(t) = \frac{4\pi\rho}{3} r(t)^3 = \frac{4\pi\rho}{3}(\alpha t + r_0)^3$$

où ρ est la masse volumique de l'eau.

- Lagrangien de la goutte (axe $\hat{z}$ orienté vers le bas):

$$L(z, \dot{z}, t) = \frac{m(t)}{2}\dot{z}^2 + m(t)gz = \frac{4\pi\rho}{3}(\alpha t + r_0)^3 \left[\frac{\dot{z}^2}{2} + gz\right].$$

- Equation d'Euler-Lagrange

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) &= \frac{\partial L}{\partial z} \qquad \Rightarrow \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(\alpha t + r_0)^3 \dot{z}\right] &= g(\alpha t + r_0)^3 \qquad \Rightarrow \\
\ddot{z} + \frac{3\alpha}{\alpha t + r_0}\dot{z} &= g \qquad (1)
\end{aligned}$$

Avec $v = \dot{z}$ (vitesse de chute de la goutte) et

$$f(t) = \frac{3\alpha}{\alpha t + r_0},$$

l'expression (1) donne une équation différentielle du premier ordre à coefficients non constants pour v:

$$\dot{v} + f(t)v = g.$$

Solution (méthode de la "variation des constantes"):

$$v(t) = e^{-F(t)}\left[A + gG(t)\right].$$

où $F(t)$ est une primitive de $f(t)$, $G(t)$ est une primitive de $e^{F(t)}$ et A une constante.

Puisque $f(t) = \frac{3\alpha}{\alpha t + r_0}$ on obtient

$$F(t) = \ln(\alpha t + r_0)^3, \qquad G(t) = \frac{(\alpha t + r_0)^4}{4\alpha}$$

et

$$v(t) = \frac{A}{(\alpha t + r_0)^3} + \frac{g}{4\alpha}(\alpha t + r_0).$$

$L(z, \dot{z}, t)$ dépend explicitement du temps $\Rightarrow$ l'hamiltonien $H(z, p, t)$ dépend explicitement du temps $\Rightarrow$ H n'est pas une constante du mouvement.

Exercices de mécanique analytique

26 janvier 1998

Exercice 43 : [les questions 1) et 2) sont indépendantes l'une de l'autre]

1. Pour un système à l degrés de liberté, considérer la transformation:

$$\phi^t \; : \; \begin{array}{l} q_i \mapsto Q_i = q_i + \dfrac{\partial g(p,t)}{\partial p_i} \\ p_i \mapsto P_i = p_i + \dfrac{\partial f(q,t)}{\partial q_i} \end{array} \qquad i = 1, \ldots, l,$$

   où $g(p,t)$ et $f(q,t)$ sont respectivement des fonctions des variables $(p = (p_1, \ldots, p_l), t)$ et $(q = (q_1, \ldots, q_l), t)$.

   Est-ce que cette transformation est canonique ?

2. Pour un système ayant un espace de phase de dimension 2, est-ce que la transformation définie par

$$\phi \; : \; \begin{array}{l} q \mapsto Q = \mathrm{Arctg}(q/p) \\ p \mapsto P = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) \end{array}$$

   est canonique ?

Exercice 44 : Considérer $\mathbb{R}^6$ comme espace de phase ($\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$, $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$). Quelles fonctions parmi les deux suivantes sont des fonctions génératrices acceptables de transformations canoniques ?

vérifier les conditions du cours.

a) $S_1(\vec{q}, \vec{Q}) = |\vec{q}\,|^2 - |\vec{Q}\,|^4$

b) $S_1(\vec{q}, \vec{Q}) = \vec{q} \cdot \vec{Q} + |\vec{q}\,|^4 + |\vec{Q}\,|^4$

Dans les cas admissibles, déterminer les relations $\vec{q} \equiv \vec{q}(\vec{Q}, \vec{P}\,)$ et $\vec{p} \equiv \vec{p}(\vec{Q}, \vec{P}\,)$ (s'arrêter avant la dernière étape du cours) exprimant les anciennes variables $\vec{q}, \vec{p}$ en fonction des nouvelles $\vec{Q}, \vec{P}$.

(*tourner s.v.p.*)

Exercice 45 : Considérer la transformation canonique de rotation définie par :
(c'est canonique)

$$\phi \; : \begin{array}{l} q_i \mapsto Q_i = (Rq)_i \\ p_i \mapsto P_i = (Rp)_i \end{array} \qquad i = 1, \ldots, l.$$

L'espace de phase est de dimension $2l$ ($q = (q_1, \ldots, q_l)$, $p = (p_1, \ldots, p_l)$) et $R = \{R_{nm}\}_{n,m=1}^{l}$ est la matrice représentant la rotation.

Trouver une fonction génératrice $S_2(q, P)$ (du type $2^{\text{ème}}$ espèce) de la transformation ϕ.

Exercice 46 : Pour un système à l degrés de liberté, considérer la fonction

2nd espèce

$$S_2(q, P, t) = \sum_{k=1}^{l} f_k(q, t) P_k + g(q, t)$$

où $f_1(q, t), f_2(q, t), ..., f_l(q, t)$ et $g(q, t)$ sont des fonctions arbitraires de q et de t. Quelles conditions doit-on imposer sur ces fonctions pour que $S_2(q, P, t)$ soit une fonction génératrice de $2^{\text{ème}}$ espèce d'une transformation canonique?

$\det\left(\partial f_i / \partial q_j\right) \neq 0$

En supposant ces conditions vérifiées, déterminer les relations $Q \equiv Q(q, p, t)$ et $P \equiv P(q, p, t)$ exprimant les nouvelles variables Q, P en fonction des anciennes q, p.

(interpréter la transf. canonique obtenue)

Série 13 Hiver 1997/98

Exercice 43 : [les questions 1) et 2) sont indépendantes l'une de l'autre]

1. Pour un système à l degrés de liberté, considérer la transformation:

$$\phi^t : \begin{array}{l} q_i \mapsto Q_i = q_i + \dfrac{\partial g(p,t)}{\partial p_i} \\ p_i \mapsto P_i = p_i + \dfrac{\partial f(q,t)}{\partial q_i} \end{array} \qquad i = 1, \ldots, l,$$

   où $g(p,t)$ et $f(q,t)$ sont respectivement des fonctions des variables $(p = (p_1, \ldots, p_l), t)$ et $(q = (q_1, \ldots, q_l), t)$.
   Est-ce que cette transformation est canonique ?

2. Pour un système ayant un espace de phase de dimension 2, est-ce que la transformation définie par

$$\phi : \begin{array}{l} q \mapsto Q = \mathrm{Arctg}(q/p) \\ p \mapsto P = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) \end{array}$$

   est canonique ?

1. La matrice jacobienne de la transformation s'écrit :

$$\begin{aligned} (D\phi^t) &= \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{l\times l} & A \\ B & \mathbb{1}_{l\times l} \end{pmatrix} \qquad \text{où} \\ A &= \left\{ A_{ij} = \frac{\partial^2 g(p,t)}{\partial p_j \partial p_i} \right\}_{i,j=1}^{l} = A^T \\ B &= \left\{ B_{ij} = \frac{\partial^2 f(q,t)}{\partial q_j \partial q_i} \right\}_{i,j=1}^{l} = B^T \end{aligned}$$

$$(D\phi^t)^T J (D\phi^t) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{l\times l} & B \\ A & \mathbb{1}_{l\times l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{l\times l} \\ -\mathbb{1}_{l\times l} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{l\times l} & A \\ B & \mathbb{1}_{l\times l} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{l\times l} & B \\ A & \mathbb{1}_{l\times l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & \mathbb{1}_{l\times l} \\ -\mathbb{1}_{l\times l} & -A \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{l\times l} - BA \\ AB - \mathbb{1}_{l\times l} & 0 \end{pmatrix} \neq J.$$

La transformation n'est pas canonique pour un choix quelconque des fonctions f et g. ϕ^t est canonique si $A = 0_{l\times l}$ ou $B = 0_{l\times l}$. Ceci a lieu si g est une fonction linéaire des variables $\{p_i\}_{i=1}^l$ ou si f est une fonction linéaire des variables $\{q_i\}_{i=1}^l$.

2. La matrice Jacobienne de la transformation est

$$\begin{aligned}
(D\phi) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p}{p^2+q^2} & -\frac{q}{p^2+q^2} \\ q & p \end{pmatrix} \\
(D\phi)^T J (D\phi) &= \begin{pmatrix} \frac{p}{p^2+q^2} & q \\ -\frac{q}{p^2+q^2} & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{p}{p^2+q^2} & -\frac{q}{p^2+q^2} \\ q & p \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{p}{p^2+q^2} & q \\ -\frac{q}{p^2+q^2} & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & p \\ -\frac{p}{p^2+q^2} & \frac{q}{p^2+q^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = J
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ ϕ est une transformation canonique.

Exercice 44 : Considérer $\mathbb{R}^6$ comme espace de phase ($\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$, $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$). Quelles fonctions parmi les deux suivantes sont des fonctions génératrices acceptables de transformations canoniques ?

a) $\quad S_1(\vec{q}, \vec{Q}) = |\vec{q}\,|^2 - |\vec{Q}\,|^4$

b) $\quad S_1(\vec{q}, \vec{Q}) = \vec{q} \cdot \vec{Q} + |\vec{q}\,|^4 + |\vec{Q}\,|^4$

Dans les cas admissibles, déterminer les relations $\vec{q} \equiv \vec{q}(\vec{Q}, \vec{P}\,)$ et $\vec{p} \equiv \vec{p}(\vec{Q}, \vec{P}\,)$ exprimant les anciennes variables $\vec{q}, \vec{p}$ en fonction des nouvelles $\vec{Q}, \vec{P}$.

a) $$S_1(\vec{q}, \vec{Q}) = |\vec{q}\,|^2 - |\vec{Q}\,|^4 = \sum_{k=1}^{3} q_k^2 - \left[\sum_{k=1}^{3} Q_k^2\right]^2$$

- $$\frac{\partial^2 S_1(\vec{q}, \vec{Q}\,)}{\partial q_j \partial Q_i} = -\frac{\partial}{\partial q_j}\left[\frac{\partial}{\partial Q_i}\left(\sum_{k=1}^{3} Q_k^2\right)^2\right] = 0, \quad \forall\, i, j,$$

$\Rightarrow$ Fonction pas acceptable comme fonction génératrice de 1ère espèce d'une transformation canonique.

b) $$\begin{aligned} S_1(\vec{q}, \vec{Q}) &= \vec{q} \cdot \vec{Q} + |\vec{q}\,|^4 + |\vec{Q}\,|^4 \\ &= \sum_{k=1}^{3} q_k Q_k + \left[\sum_{k=1}^{3} q_k^2\right]^2 + \left[\sum_{k=1}^{3} Q_k^2\right]^2 \end{aligned}$$

- $$\frac{\partial^2 S_1(\vec{q}, \vec{Q}\,)}{\partial q_j \partial Q_i} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left[q_i + \frac{\partial}{\partial Q_i}\left(\sum_{k=1}^{3} Q_k^2\right)^2\right] = \delta_{ij}.$$

Donc $\mathrm{Det}\left\{\dfrac{\partial^2 S_1(\vec{q}, \vec{Q}\,)}{\partial q_j \partial Q_i}\right\}_{i,j=1}^{l} \neq 0$, c'est une fonction acceptable comme fonction génératrice de 1ère espèce d'une transformation canonique.

On a :

$$\begin{aligned} P_i &= -\frac{\partial S_1(\vec{q}, \vec{Q}\,)}{\partial Q_i} = -q_i - \frac{\partial}{\partial Q_i}\left[\sum_{k=1}^{3} Q_k^2\right]^2 \\ &= -q_i - 2\left(\sum_{k=1}^{3} Q_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{3} 2Q_k \frac{\partial Q_k}{\partial Q_i}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -q_i - 4|\vec{Q}\,|^2 Q_i \\
\Rightarrow \quad \vec{P} &= -\vec{q} - 4|\vec{Q}\,|^2\vec{Q}. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_i &= \frac{\partial S_1(\vec{q},\vec{Q}\,)}{\partial q_i} = Q_i + \frac{\partial}{\partial q_i}\left[\sum_{k=1}^{3} q_k^2\right]^2 \\
&= Q_i + 2\left(\sum_{k=1}^{3} q_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{3} 2q_k \frac{\partial q_k}{\partial q_i}\right) \\
&= Q_i + 4|\vec{q}\,|^2 q_i \\
\Rightarrow \quad \vec{p} &= \vec{Q} + 4|\vec{q}\,|^2\vec{q}. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

De l'équation (1) on déduit :

$$\boxed{\vec{q}(\vec{Q},\vec{P}) = -\vec{P} - 4|\vec{Q}\,|^2\vec{Q}}$$

En substituant dans (2) on obtient :

$$\boxed{\vec{p}(\vec{Q},\vec{P}) = \vec{Q} - 4\left|\vec{P} + 4|\vec{Q}\,|^2\vec{Q}\,\right|^2\left(\vec{P} + 4|\vec{Q}\,|^2\vec{Q}\right)}$$

Exercice 45 : Considérer la transformation canonique de rotation définie par :

$$\phi : \begin{array}{l} q_i \mapsto Q_i = (Rq)_i \\ \\ p_i \mapsto P_i = (Rp)_i \end{array} \qquad i = 1, \ldots, l.$$

L'espace de phase est de dimension $2l$ ($q = (q_1, \ldots, q_l)$, $p = (p_1, \ldots, p_l)$) et $R = \{R_{nm}\}_{n,m=1}^{l}$ est la matrice représentant la rotation.
Trouver une fonction génératrice $S_2(q, P)$ (du type $2^{\text{ème}}$ espèce) de la transformation ϕ.

Trouver $S_2(q, P)$ telle que, pour $i = 1, \ldots, l$:

$$\frac{\partial S_2(q,P)}{\partial P_i} = Q_i = (Rq)_i \tag{1}$$

$$\frac{\partial S_2(q,P)}{\partial q_i} = p_i = (R^{-1}P)_i \tag{2}$$

(1) $\Rightarrow$ $S_2(q, P) = \sum\limits_{k=1}^{l} (Rq)_k P_k + f(q)$ où $f(q)$ est une fonction arbitraire de q.

On a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S_2(q,P)}{\partial q_i} &= \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial}{\partial q_i} (Rq)_k P_k + \frac{\partial f(q)}{\partial q_i} \\
&= \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_{j=1}^{l} R_{kj} q_j \right) P_k + \frac{\partial f(q)}{\partial q_i} \\
&= \sum_{k=1}^{l} R_{ki} P_k + \frac{\partial f(q)}{\partial q_i} \\
&= \sum_{k=1}^{l} R_{ik}^{-1} P_k + \frac{\partial f(q)}{\partial q_i} \\
&= (R^{-1}P)_i + \frac{\partial f(q)}{\partial q_i}
\end{aligned}$$

Insérant ce résultat dans l'équation (2) on trouve $\dfrac{\partial f(q)}{\partial q_i} = 0$ pour tout i

$\Rightarrow\ f(q) = C$ (constante)

$\Rightarrow\ S_2(q, P) = \sum\limits_{k=1}^{l} (Rq)_k P_k + C$ est une fonction génératrice (2ème espèce) de ϕ.

Puisque

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_2(q,P)}{\partial q_j \partial P_i} &= \frac{\partial}{\partial q_j}(Rq)_i = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{n=1}^{l} R_{in} q_n\right) \\ &= R_{ij}, \end{aligned}$$

on a $\text{Det}\left\{\dfrac{\partial S_2(q,P)}{\partial q_j \partial P_i}\right\}_{i,j=1}^{l} = \text{Det}\, R \neq 0.$

Exercice 46 : Pour un système à l degrés de liberté, considérer la fonction

$$S_2(q,P,t) = \sum_{k=1}^{l} f_k(q,t)P_k + g(q,t)$$

où $f_1(q,t), f_2(q,t), ..., f_l(q,t)$ et $g(q,t)$ sont des fonctions arbitraires de q et de t. Quelles conditions doit-on imposer sur ces fonctions pour que $S_2(q,P,t)$ soit une fonction génératrice de 2ème espèce d'une transformation canonique?

En supposant ces conditions vérifiées, déterminer les relations $Q \equiv Q(q,p,t)$ et $P \equiv P(q,p,t)$ exprimant les nouvelles variables Q, P en fonction des anciennes q, p.

Il faut que

$$\text{Det}\left\{\frac{\partial^2 S_2(q,P,t)}{\partial q_j \partial P_i}\right\}_{i,j=1}^{l} \neq 0.$$

$$\frac{\partial^2 S_2(q,P,t)}{\partial q_j \partial P_i} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left[\sum_{k=1}^{l} f_k(q,t)\delta_{ki}\right] = \frac{\partial f_i(q,t)}{\partial q_j}.$$

Conditions sur $f_1(q,t), f_2(q,t), ..., f_l(q,t)$:

$$\text{Det} M(q,t) \neq 0 \qquad \forall q, \forall t$$

où

$$M(q,t) = \left\{M_{ji}(q,t) = \frac{\partial f_i(q,t)}{\partial q_j}\right\}_{i,j=1}^{l}.$$

Aucune condition sur $g(q,t)$ n'est à imposer. On a :

$$Q_i = \frac{\partial S_2(q,P,t)}{\partial P_i} = \sum_{k=1}^{l} f_k(q,t)\delta_{ki} = f_i(q,t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{Q(q,t) = f(q,t)}$$

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial S_2(q,P,t)}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial f_k(q,t)}{\partial q_i} P_k + \frac{\partial g(q,t)}{\partial q_i} \\ &= \sum_{k=1}^{l} M_{ik}(q,t) P_k + [\mathrm{grad} g(q,t)]_i \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p = M(q,t)P + \mathrm{grad} g(q,t)$$

et on obtient

$$\boxed{P(q,p,t) = M^{-1}(q,t)[p - \mathrm{grad} g(q,t)]}$$

en remarquant que $M^{-1}(q,t)$ existe car on suppose la condition $\mathrm{Det} M(q,t) \neq 0$ vérifiée.

Exercices de mécanique analytique

2 février 1998

Exercice 47 : Pour un système ayant un espace de phase de dimension 2, considérer la fonction $S_3(p,Q) = -pf(Q)$ où $f(Q)$ est une fonction arbitraire de Q. Quelle condition doit satisfaire $f(Q)$ pour que $S_3(p,Q)$ soit une fonction génératrice de 3^e espèce d'une transformation canonique ?
En supposant cette condition vérifiée, déterminer les relations $Q \equiv Q(q,p)$ et $P \equiv P(q,p)$ exprimant les nouvelles variables Q, P en fonction des anciennes q, p.

Exercice 48 : Considérer le mouvement unidimensionnel de chute libre d'un point matériel de masse $m = 1$ (hamiltonien : $H(q,p) = \frac{p^2}{2} - gq$).
Déterminer $q(t)$ et $p(t)$ en résolvant les équations d'Hamilton pour les conditions initiales $q(0) = q_0$ et $p(0) = p_0$.
Calculer une fonction génératrice $S(q, p_0, t)$ qui satisfait l'équation d'Hamilton-Jacobi et qui engendre la transformation canonique ϕ^t définie par le flot associé à l'hamiltonien. non réduite
[Introduire dans l'équation d'Hamilton-Jacobi un *ansatz* suggéré par la connaissance de la solution des équations de mouvement.]

Exercice 49 : Un point matériel de masse m est contraint de se déplacer dans $\mathbb{R}^2$ sur une branche d'hyperbole d'équation $y^2 = x^2 + a^2$ (coordonnées cartésiennes). Il ne subit pas d'autre force que celle qui assure la contrainte. En choisissant x comme variable position et p étant son moment conjugué, écrire l'hamiltonien $H(x,p)$ de ce point matériel.
A l'aide de la solution générale de l'équation d'Hamilton-Jacobi réduite déterminer l'équation des orbites $p(x,E)$ d'énergie E et obtenir une formule pour l'horaire des mouvements.

Exercice subsidiaire : Vérifier que les matrices $2l \times 2l$ suivantes sont symplectiques :

$$\text{i)} \quad M = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{l\times l} & S \\ 0 & \mathbb{1}_{l\times l} \end{pmatrix} \qquad \text{ii)} \quad M = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, U & \mathrm{Im}\, U \\ -\mathrm{Im}\, U & \mathrm{Re}\, U \end{pmatrix}$$

où S est une matrice $l \times l$ telle que $S^T = S$ et $U = \mathrm{Re}\, U + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\, U$ est une matrice $l \times l$ unitaire : $U^\dagger U = \mathbb{1}_{l\times l}$ (où $U^\dagger = (U^T)^*$ est la matrice adjointe de U).

Série 14 Hiver 97/98

Exercice 47 : Pour un système ayant un espace de phase de dimension 2, considérer la fonction $S_3(p,Q) = -pf(Q)$ où $f(Q)$ est une fonction arbitraire de Q. Quelle condition doit satisfaire $f(Q)$ pour que $S_3(p,Q)$ soit une fonction génératrice de 3ᵉ espèce d'une transformation canonique ?
En supposant cette condition vérifiée, déterminer les relations $Q \equiv Q(q,p)$ et $P \equiv P(q,p)$ exprimant les nouvelles variables Q, P en fonction des anciennes q, p.

Il faut que $\dfrac{\partial^2 S_3(p,Q)}{\partial p \partial Q} \neq 0$.

$$\frac{\partial^2 S_3(p,Q)}{\partial p \partial Q} = \frac{\partial}{\partial p}[-pf'(Q)] = -f'(Q) \text{ où } f'(Q) \equiv \frac{\mathrm{d}f(Q)}{\mathrm{d}Q}$$

Condition : $f'(Q) \neq 0, \quad \forall Q \Rightarrow f^{-1}$ existe. On a :

$$q = -\frac{\partial S_3(p,Q)}{\partial p} = f(Q) \tag{1}$$

$$P = -\frac{\partial S_3(p,Q)}{\partial Q} = pf'(Q) \tag{2}$$

L'inversion de l'équation (1) donne $\boxed{Q(q) = f^{-1}(q)}$.

En substituant dans (2) on trouve

$$\boxed{P(q,p) = pf'\left(f^{-1}(q)\right)}.$$

Exercice 48 : Considérer le mouvement unidimensionnel de chute libre d'un point matériel de masse $m = 1$ (hamiltonien : $H(q,p) = \frac{p^2}{2} - gq$).
Déterminer $q(t)$ et $p(t)$ en résolvant les équations d'Hamilton pour les conditions initiales $q(0) = q_0$ et $p(0) = p_0$.
Calculer une fonction génératrice $S(q, p_0, t)$ qui satisfait l'équation d'Hamilton-Jacobi et qui engendre la transformation canonique ϕ^t définie par le flot associé à l'hamiltonien.
[Introduire dans l'équation d'Hamilton-Jacobi un *ansatz* suggéré par la connaissance de la solution des équations de mouvement.]

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2} - gq$$

- Equations canoniques :

$$\left.\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = p \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = g \end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{aligned} q(t) &= \frac{1}{2}gt^2 + p_0 t + q_0 \\ p(t) &= gt + p_0. \end{aligned}$$

- Chercher $S(q, p_0, t)$ telle que :

$$H\left(q, \frac{\partial S(q,p_0,t)}{\partial q}\right) + \frac{\partial S(q,p_0,t)}{\partial t} = 0 \quad \text{(équation d'Hamilton-Jacobi)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{\partial S(q,p_0,t)}{\partial q}\right]^2 - gq + \frac{\partial S(q,p_0,t)}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

et

$$\frac{\partial S(q,p_0,t)}{\partial q} = p = gt + p_0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial S(q,p_0,t)}{\partial p_0} = q_0 = q - \frac{1}{2}gt^2 - p_0 t. \tag{3}$$

L'équation (2) suggère l'expression

$$S(q,p_0,t) = (gt + p_0)q + U(p_0,t) \tag{4}$$

où U est une fonction qui dépend de p_0 et de t. Insérant dans (3) on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(p_0,t)}{\partial p_0} &= -\frac{1}{2}gt^2 - p_0 t \\ \Rightarrow U(p_0,t) &= -\frac{1}{2}gp_0 t^2 - \frac{1}{2}p_0^2 t + V(t) \end{aligned}$$

où V est une fonction qui ne dépend que de t.

Insérant cette expression dans (4) et calculant les différents termes de l'équation d'Hamilton-Jacobi (1) on obtient une équation différentielle pour V :

$$\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}g^2t^2 = 0 \;\Rightarrow\; V(t) = -\frac{1}{6}g^2t^3 + C$$

avec C = constante.

En choisissant, par exemple, $C = 0$ on obtient que

$$S(q, p_0, t) = (gt + p_0)q - \frac{1}{2}gp_0t^2 - \frac{1}{2}p_0^2t - \frac{1}{6}g^2t^3$$

est une fonction génératrice qui satisfait l'équation d'Hamilton-Jacobi et qui engendre ϕ^t.

<u>Exercice 49 :</u> Un point matériel de masse m est contraint de se déplacer dans $\mathbb{R}^2$ sur une branche d'hyperbole d'équation $y^2 = x^2 + a^2$ (coordonnées cartésiennes). Il ne subit pas d'autre force que celle qui assure la contrainte. En choisissant x comme variable position et p étant son moment conjugué, écrire l'hamiltonien $H(x,p)$ de ce point matériel.
A l'aide de la solution générale de l'équation d'Hamilton-Jacobi réduite déterminer l'équation des orbites $p(x,E)$ d'énergie E et obtenir une formule pour l'horaire des mouvements.

• Contrainte : $y = \sqrt{x^2+a^2} \longrightarrow \dot{y} = \dfrac{x\dot{x}}{\sqrt{x^2+a^2}}$

Energie cinétique : $T = \dfrac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \dfrac{m}{2}\left(\dfrac{2x^2+a^2}{x^2+a^2}\right)\dot{x}^2$

Moment conjugué de x : $p = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dfrac{2x^2+a^2}{x^2+a^2}\dot{x}$

$$\Rightarrow \qquad \dot{x} = \frac{1}{m}\frac{x^2+a^2}{2x^2+a^2}p$$

• Hamiltonien :

$$\begin{aligned} H(x,p) &= T_*(x,p) = \text{énergie cinétique exprimée comme fonction de } x \text{ et } p \\ H(x,p) &= \frac{1}{2m}\frac{x^2+a^2}{2x^2+a^2}p^2 \end{aligned}$$

• Equation d'Hamilton-Jacobi réduite :

$$\begin{aligned} H\left(x, \frac{\partial W(x,E)}{\partial x}\right) &= E \\ \Rightarrow \quad \frac{1}{2m}\frac{x^2+a^2}{2x^2+a^2}\left[\frac{\partial W(x,E)}{\partial x}\right]^2 &= E \end{aligned}$$

Il vient :

$$\frac{\partial W(x,E)}{\partial x} = \pm\sqrt{2mE\frac{2x^2+a^2}{x^2+a^2}} \tag{1}$$

et, puisque $p = \dfrac{\partial W(x,E)}{\partial x}$, on obtient l'équation des orbites d'énergie E :

$$p(x,E) = \pm\sqrt{2mE\frac{2x^2+a^2}{x^2+a^2}}$$

• Horaire des mouvements :

$$\text{On a} \quad \frac{\partial W(x,E)}{\partial E} = \beta + t \qquad (\beta = \text{ constante}). \tag{2}$$

$$(1) \Rightarrow \qquad W(x,E) = \pm \int_0^x \mathrm{d}x' \sqrt{2mE\frac{2x'^2 + a^2}{x'^2 + a^2}} \qquad (W(0,E) = 0 \; \forall \, E)$$

donc $\dfrac{\partial W(x,E)}{\partial E} = \pm\sqrt{\dfrac{m}{2E}} \displaystyle\int_0^x \mathrm{d}x' \sqrt{\frac{2x'^2 + a^2}{x'^2 + a^2}}$

et avec (2) on obtient une formule pour l'horaire des mouvements.

Exercice subsidiaire : Vérifier que les matrices $2l \times 2l$ suivantes sont symplectiques :

$$\text{i)}\quad M = \begin{pmatrix} 1\!\!1_{l\times l} & S \\ 0 & 1\!\!1_{l\times l} \end{pmatrix} \qquad \text{ii)}\quad M = \begin{pmatrix} \text{Re}\, U & \text{Im}\, U \\ -\text{Im}\, U & \text{Re}\, U \end{pmatrix}$$

où S est une matrice $l \times l$ telle que $S^T = S$ et $U = \text{Re}\, U + \text{i}\, \text{Im}\, U$ est une matrice $l \times l$ unitaire : $U^\dagger U = 1\!\!1_{l\times l}$ (où $U^\dagger = (U^T)^*$ est la matrice adjointe de U).

Il faut vérifier que $M^T J M = J$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1\!\!1_{l\times l} \\ -1\!\!1_{l\times l} & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\text{i)}\quad M^T J M &= \begin{pmatrix} 1\!\!1_{l\times l} & 0 \\ S & 1\!\!1_{l\times l} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\!\!1_{l\times l} \\ -1\!\!1_{l\times l} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\!\!1_{l\times l} & S \\ 0 & 1\!\!1_{l\times l} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1\!\!1_{l\times l} & 0 \\ S & 1\!\!1_{l\times l} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\!\!1_{l\times l} \\ -1\!\!1_{l\times l} & -S \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1\!\!1_{l\times l} \\ -1\!\!1_{l\times l} & S - S \end{pmatrix} = J
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad M \in \text{Sp}(l, \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned}
\text{ii)}\quad U^\dagger U &= \left(\text{Re}\, U^T - \text{i}\, \text{Im}\, U^T\right)(\text{Re}\, U + \text{i}\, \text{Im}\, U) \\
&= \left[\text{Re}\, U^T \text{Re}\, U + \text{Im}\, U^T \text{Im}\, U\right] + \text{i}\left[\text{Re}\, U^T \text{Im}\, U - \text{Im}\, U^T \text{Re}\, U\right]
\end{aligned}$$

U unitaire $\Rightarrow$ $U^\dagger U = 1\!\!1_{l\times l}$ est une matrice réelle.

Donc

$$\text{Re}\, U^T \text{Re}\, U + \text{Im}\, U^T \text{Im}\, U = 1\!\!1_{l\times l} \qquad (1)$$

$$\text{Re}\, U^T \text{Im}\, U - \text{Im}\, U^T \text{Re}\, U = 0_{l\times l} \qquad (2)$$

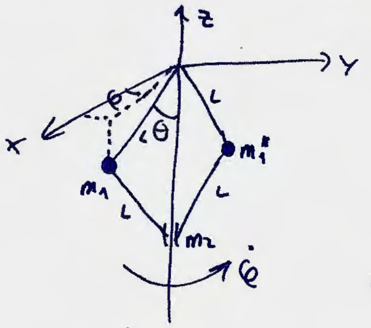
$$\begin{aligned}
M^T J M &= \begin{pmatrix} \text{Re}\, U^T & -\text{Im}\, U^T \\ \text{Im}\, U^T & \text{Re}\, U^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\!\!1_{l\times l} \\ -1\!\!1_{l\times l} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{Re}\, U & \text{Im}\, U \\ -\text{Im}\, U & \text{Re}\, U \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \text{Re}\, U^T & -\text{Im}\, U^T \\ \text{Im}\, U^T & \text{Re}\, U^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\text{Im}\, U & \text{Re}\, U \\ -\text{Re}\, U & -\text{Im}\, U \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\text{Re}\, U^T \text{Im}\, U + \text{Im}\, U^T \text{Re}\, U & \text{Re}\, U^T \text{Re}\, U + \text{Im}\, U^T \text{Im}\, U \\ -\text{Im}\, U^T \text{Im}\, U - \text{Re}\, U^T \text{Re}\, U & \text{Im}\, U^T \text{Re}\, U - \text{Re}\, U^T \text{Im}\, U \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1\!\!1_{l\times l} \\ -1\!\!1_{l\times l} & 0 \end{pmatrix} = J \qquad \text{en vertu de (1) et (2).}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad M \in \text{Sp}(l, \mathbb{R}).$$

Remarque : – sur les énergies cinétiques

– Si il y a difficulté à trouver une énergie cinétique, à cause des repères qui semblent un peu compliqués, alors un truc c'est d'exprimer chaque composante de la vitesse sur x, y, z en terme des coordonnées généralisées.

– Prenons l'exemple du Choquard, ex. 7.11 (examen juillet 98) : – pour écrire le Lagrangien de ce système, on a besoin de l'énergie cinétique.



$\dot\varphi = cte$
$\theta = \theta(t)$
$L = cte$

– masses m_i : – cela ne semble pas trop difficile, mais comme je n'ai pas envie de chercher un nouveau repère compliqué, je choisis d'exprimer les positions dans le repère cartésien (x, y, z) qui ne pose pas de pb. à la dérivation, puis je dérive simplement les positions :

m_1 (gauche) : $x = L \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi$, $y = L \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi$, $z = - L \cdot \cos\theta$

m_1 (droite) : $x = -L \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi$, $y = -L \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi$, $z = -L \cdot \cos\theta$

m_2 : $x = y = 0$, $z = -2L\cos\theta$

– Pour les vitesses, comme on est dans le repère cartésien, il suffit de dériver :

$$V_{m_1 (gau)} = \begin{pmatrix} \dot x \\ \dot y \\ \dot z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \cdot \cos\theta \cdot \dot\theta \cdot \cos\varphi - L \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \cdot \dot\varphi \\ L \cdot \cos\theta \cdot \dot\theta \cdot \sin\varphi + L \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \cdot \dot\varphi \\ L \cdot \sin\theta \cdot \dot\theta \end{pmatrix}$$

$$V_{m_1 (droite)} = \begin{pmatrix} \dot x \\ \dot y \\ \dot z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \quad '' \quad + \quad '' \\ - \quad '' \quad - \quad '' \\ '' \end{pmatrix}$$

$$V_{m_2} = \begin{pmatrix} \dot x \\ \dot y \\ \dot z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2L \sin\theta \cdot \dot\theta \end{pmatrix}$$

– En faisant les vitesses V_i^2, des termes se simplifient, et on obtient finalement :

$$\begin{cases} V_{m_1,g}^2 = L^2\dot\theta^2 + L^2 \sin^2\theta \, \dot\varphi^2 = V_{m_1,d}^2 \\ V_2^2 = 4L^2 \sin^2\theta \cdot \dot\theta \end{cases}$$

↖ idem coord. sphériques

– Donc le Lagrangien, avec $V = -2 \cdot g \cdot L \cdot \cos(m_1 + m_2)$:

$$\boxed{\mathcal{L} = \dot\theta^2 L^2 (m_1 + 2 m_2 \cdot \sin^2\theta) + \dot\varphi^2 \sin^2\theta \cdot m_1 \cdot L^2 + 2 \cdot g \cdot L \cdot \cos\theta \, (m_1 + m_2)}$$

Plus rapidement, on peut aussi définir un repère sphérique, même si les angles sont définis différemment à une constante près, ceci car on ne s'occupe que des vitesses, i.e. des dérivées de ces angles, et donc les constantes tombent. On a donc dans ce cas tout de suite la vitesse pour $m_1 g$ et $m_1 d$: $\underset{0}{\dot L^2} + L^2\dot\theta^2 + L^2 \sin^2\theta \cdot \dot\varphi^2$

Par contre pour m_2 on doit faire comme ci-dessus.
(c.f. ex. 37 pour les coord. sphériques on a fait la même chose)

Exercice complémentaire sur les transformations canoniques (examen juillet 98)

Soit la transformation t.q. $\phi\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \cdot \cos(q_2 - \omega t) \\ q_1 \cdot \sin(q_2 - \omega t) \end{pmatrix}$

i) Trouver la transformation $P_1 \leftarrow p_1$, $p_2 \to P_2$ t.q. ϕ soit canonique

On sait que les transformations issues d'un changement des coordonnées de position sont canoniques. Alors:

$$\phi(p_1) = P_1 = \sum_{k=1}^{2} p_k \cdot \frac{\partial q_k}{\partial Q_1}(Q)$$
$$\phi(p_2) = P_2 = \sum_{k=1}^{2} p_k \frac{\partial q_k}{\partial Q_2}(Q)$$

On doit donc trouver $q_i = q_i(Q)$, i.e. $\phi^{-1}(Q) = q$. On a:

$$Q_1^2 + Q_2^2 = q_1^2 \Rightarrow \boxed{q_1 = \phi_1^{-1}(Q) = \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}}$$
$$\Rightarrow \boxed{q_2 = a\cos\left(\frac{Q_1}{\sqrt{Q_1^2+Q_2^2}}\right) + \omega t = a\sin\left(\frac{Q_2}{\sqrt{Q_1^2+Q_2^2}}\right) + \omega t}$$

On a donc:

$$P_1 = p_1 \cdot \frac{\partial}{\partial Q_1}\left\{\sqrt{Q_1^2+Q_2^2}\right\} + p_2 \cdot \frac{\partial}{\partial Q_1}\left\{ a\sin\left(\frac{Q_2}{\sqrt{Q_1^2+Q_2^2}}\right) + \omega t\right\}$$
$$= p_1 \cdot \frac{Q_1}{\sqrt{Q_1^2+Q_2^2}} + p_2 \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{Q_2^2}{Q_1^2+Q_2^2}}} \cdot Q_2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{2 \cdot Q_1}{(Q_1^2+Q_2^2)^{3/2}} \right\}$$
$$= p_1 \cdot \frac{Q_1}{\sqrt{Q_1^2+Q_2^2}} + p_2 \cdot \left\{ \frac{-1 \cdot Q_1 \cdot Q_2}{\sqrt{\frac{Q_1^2}{Q_1^2+Q_2^2}}} \cdot \frac{1}{(Q_1^2+Q_2^2)^{3/2}} \right\}$$, remplace $Q_1 = Q_1(q)$

$$= p_1 \cdot \frac{q_1 \cdot \cos(q_2 - \omega t)}{\sqrt{q_1^2}} - p_2 \cdot Q_2 \cdot \frac{\sqrt{Q_1^2+Q_2^2}}{(Q_1^2+Q_2^2)\sqrt{Q_1^2+Q_2^2}}$$
$$= p_1 \cdot \cos(q_2 - \omega t) - p_2 \cdot \frac{q_1 \cdot \sin(q_2 - \omega t)}{q_1}$$
$$= p_1 \cdot \cos(q_2 - \omega t) - p_2 \cdot \sin(q_2 - \omega t)$$

Pour P_2 : $\quad P_2 = p_1 \cdot \sin(q_2 - \omega t) + p_2 \cdot \cos(q_2 - \omega t)$

On a donc:
$$\boxed{\phi\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \cdot \cos(q_2 - \omega t) \\ q_1 \cdot \sin(q_2 - \omega t) \\ p_1 \cdot \cos(q_2 - \omega t) - p_2 \cdot \sin(q_2 - \omega t) \\ p_1 \cdot \sin(q_2 - \omega t) + p_2 \cdot \cos(q_2 - \omega t) \end{pmatrix}}$$

Ce qui est une transformation canonique. (On peut vérifier que $D\phi \in Sp(2; \mathbb{R})$)

ii) Déterminer $S_2(q, P, t)$ t.q. $S_2(q, 0, t) \equiv 0 \ \forall q, t$

On a: $\quad p_1 = \frac{\partial S_2}{\partial q_1}$; $p_2 = \frac{\partial S_2}{\partial q_2}$; $Q_1 = \frac{\partial S_2}{\partial P_1}$; $Q_2 = \frac{\partial S_2}{\partial P_2}$

Déjà:
$$\frac{\partial S_2}{\partial P_1}(q, P, t) = q_1 \cdot \cos(q_2 - \omega t) \Rightarrow S_2(q, P, t) = q_1 \cdot \cos(q_2 - \omega t) \cdot P_1 + f(q_1, q_2, P_2, t) \quad (1)$$
$$\frac{\partial S_2}{\partial P_2}(q, P, t) = q_1 \cdot \sin(q_2 - \omega t) \Rightarrow S_2(q, P, t) = q_1 \cdot \sin(q_2 - \omega t) \cdot P_2 + g(q_1, q_2, P_1, t) \quad (2)$$

On doit trouver : $p_1(q, P, t)$; $p_2(q, P, t)$:

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(q_2 - \omega t) & -\sin(q_2 - \omega t) \\ \sin(q_2 - \omega t) & \cos(q_2 - \omega t) \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \cos(q_2 - \omega t) & \sin(q_2 - \omega t) \\ -\sin(q_2 - \omega t) & \cos(q_2 - \omega t) \end{pmatrix}, \quad \det A = \underline{1}$$

On a donc : $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(q_2-\omega t)\cdot P_1 + \sin(q_2-\omega t)\cdot P_2 \\ -\sin(q_2-\omega t)\cdot P_1 + \cos(q_2-\omega t)\cdot P_2 \end{pmatrix}$ (2)

Ainsi :

$$\frac{\partial S_2}{\partial q_1}(q,P,t) = \cos(q_2-\omega t)\cdot P_1 + \sin(q_2-\omega t)\cdot P_2 \Rightarrow S_2(q,P,t) = q_1\cdot\cos(q_2-\omega t)\cdot P_1 + q_1\cdot\sin(q_2-\omega t)\cdot P_2 + \tilde{f}(q_2,P,t) \quad (3)$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial q_2}(q,P,t) = -\sin(q_2-\omega t)\cdot P_1 + \cos(q_2-\omega t)\cdot P_2 \Rightarrow S_2(q,P,t) = \cos(q_2-\omega t)\cdot P_1 + \sin(q_2-\omega t)\cdot P_2 + \tilde{g}(q_1,P,t) \quad (4)$$

Avec les conditions (1) → (4) on obtient :

$$S_2(q,P,t) = q_1\cdot\cos(q_2-\omega t)\cdot P_1 + q_1\cdot\sin(q_2-\omega t)\cdot P_2 + \cos(q_2-\omega t)\cdot P_1 + \sin(q_2-\omega t)\cdot P_2$$

Car on a la C.I. $S_2(q,0,t)=0\ \forall q,t.$

$$S_2(q,P,t) = (q_1+1)\cdot\cos(q_2-\omega t)\cdot P_1 + (q_1+1)\cdot\sin(q_2-\omega t)\cdot P_2$$

$$\boxed{S_2(q,P,t) = (q_1+1)\left\{\cos(q_2-\omega t)\cdot P_1 + \sin(q_2-\omega t)\cdot P_2\right\}}$$

On peut encore vérifier que $\det\left\{\frac{\partial^2 S_2}{\partial q_j\,\partial P_i}\right\} \neq 0.$

iii) Nouvel Hamiltonien

Soit. $H = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{p_2^2}{q_1^2} - q_1\cdot\cos(q_2-\omega t)$, $\omega\neq 0$

a) Effectuer la transformation canonique sur cet hamiltonien : on a :

$$\bar{H}(Q,P,t) = H(q=q(Q),\ p=p(Q,P,t),t) + \frac{\partial S_2}{\partial t}(q,P,t)$$

Avec :

$$H(q(Q),p(Q,P),t) = \ldots$$

Pour cela on doit d'abord inverser : cela revient à rechercher $\phi^{-1}(Q,P)=(q,p)$

$$q_1 = \sqrt{Q_1^2+Q_2^2} \quad ; \quad q_2 = \operatorname{acos}\left(\frac{Q_1}{\sqrt{Q_1^2+Q_2^2}}\right)+\omega t = \operatorname{asin}\left(\frac{Q_2}{\sqrt{Q_1^2+Q_2^2}}\right)+\omega t$$

$$p_1 = \frac{\partial S_2}{\partial q_1} = \cos(q_2-\omega t)\cdot P_1 + \sin(q_2-\omega t)\cdot P_2 = \frac{Q_1}{\sqrt{Q_1^2+Q_2^2}}\cdot P_1 + \frac{Q_2}{\sqrt{Q_1^2+Q_2^2}}\cdot P_2$$

$$p_2 = \frac{\partial S_2}{\partial q_2} = (1+q_1)\cdot\left\{-\sin(q_2-\omega t)\cdot P_1 + \cos(q_2-\omega t)\cdot P_2\right\}$$
$$= \left(1+\sqrt{Q_1^2+Q_2^2}\right)\left\{\frac{Q_1}{\sqrt{Q_1^2+Q_2^2}}\cdot P_2 - \frac{Q_2}{\sqrt{Q_1^2+Q_2^2}}\cdot P_1\right\}$$
$$= \left(1+\frac{1}{\sqrt{Q_1^2+Q_2^2}}\right)\cdot\left(Q_1P_2 - Q_2P_1\right)$$

Ainsi :

$$H(q(Q),p(Q,P),t) = \frac{1}{2}\left\{\frac{Q_1^2}{Q_1^2+Q_2^2}P_1^2 + \frac{Q_2^2}{Q_1^2+Q_2^2}P_2^2 + \frac{2Q_1Q_2}{Q_1^2+Q_2^2}P_1P_2\right\}$$
$$+ \frac{1}{Q_1^2+Q_2^2}\left\{(Q_1P_2-Q_2P_1)^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{Q_1^2+Q_2^2}}\right)^2\right\}$$
$$- \cancel{\sqrt{Q_1^2+Q_2^2}}\cdot\frac{Q_1}{\cancel{\sqrt{Q_1^2+Q_2^2}}}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{Q_1^2+Q_2^2}\left[(Q_1P_1+Q_2P_2)^2 + 2(Q_1P_2-Q_2P_1)^2\left(1+\frac{1}{Q_1^2+Q_2^2}+\frac{2}{\sqrt{Q_1^2+Q_2^2}}\right)\right]$$
$$- Q_1$$

U.S.W. (devrait arriver à $\bar{H}=\frac{1}{2}(P_1^2+P_2^2)$)

Remarque sur la résolution d'équations différentielles

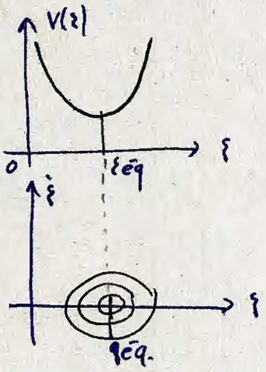
Si on aboutit en toute généralité à une équation du type :

$$\ddot{\xi} = f(\xi)$$

On a déjà le Lemme fondamental qui nous fournit une constante du mouvement. Mais en plus, on peut dire que $f(\xi)$ est une force généralisée qui dérive d'un potentiel généralisé : $f(\xi) = -\mathrm{grad}\, V(\xi)$.
Donc si on veut linéariser autour d'une position d'équilibre, on cherche $\xi_{éq}$ t.q.

$$f(\xi_{éq}) = 0$$

Ce qui nous garantit que $V'(\xi) = 0$ en $\xi = \xi_{éq}$. Ainsi on a un équilibre :



Cette remarque veut mettre en évidence que on n'a absolument pas besoin de savoir ce que représente $\ddot{\xi}$, il suffit d'écrire les éq. de Lagrange, et lorsque on arrive à une expression du type $\ddot{\xi} = f(\xi)$, on peut linéariser autour de $\xi_{éq}$ t.q. $f(\xi_{éq}) = 0$ sans se soucier d'autre chose.

Sur la stabilité du mouvement : on a après linéarisation :

$$\ddot{\xi} = f'(\xi_{éq})(\xi - \xi_{éq})$$

Soit $x = \xi - \xi_{éq}$, alors : $\ddot{x} = f'(\xi_{éq})\, x \implies \ddot{x} - f'(\xi_{éq})\, x = 0$

On distingue différents cas toujours en se rappelant que $f(\xi) = -V'(\xi)$:

$f'(\xi_{éq}) < 0 \implies$ STABLE : $x(t) = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t)$; $-f'(\xi_{éq}) = +V''(\xi_{éq}) > 0$

$f'(\xi_{éq}) > 0 \implies$ INSTABLE : $x(t) = A \cdot \mathrm{ch}(\omega t) + B \cdot \mathrm{sh}(\omega t)$; $-f'(\xi_{éq}) = +V''(\xi_{éq}) < 0$

Donc la solution de notre équation linéarisée coïncide avec l'étude du potentiel : si $V''(\xi_{éq}) > 0$, alors au point $\xi_{éq}$ on a une courbe convexe $\cup$, et donc le point d'équilibre $\xi_{éq}$ est stable. Par contre si $V''(\xi_{éq}) < 0$, alors le point $\xi_{éq}$ définit une courbe concave $\cap$, et donc le pt. d'éq. $\xi_{éq}$ est instable. Donc ainsi toute notre théorie est correcte, il suffit de se rappeler que dans l'expression $\ddot{\xi} = f(\xi)$, $f(\xi)$ représente une force généralisée qui dérive d'un potentiel généralisé.
Avec cette remarque, il est possible de comprendre ce que représente le lemme fondamental (enfin) : cette éq. $\ddot{\xi} = f(\xi)$ représente un cas où on se ramène à un point matériel de masse unité, dont l'accélération est égale à la force généralisée, qui, si elle (la force) est intégrable, dérive d'un potentiel généralisé. On peut donc écrire la conservation de l'énergie pour cette particule, qui ne représente donc pas un système physique normalement, où bien plutôt un système qui n'a plus rien à voir avec le système de départ. Comme il ne s'agit pas forcément de la conservation de l'énergie de notre système à nous, mais d'un système nouveau, on écrit la constante k plutôt que E : $k = T + V = \frac{1}{2}\dot{\xi}^2 - \int_{cte}^{\xi} f(x)\, dx$