# COURS D'ANALYSE AVANCEE B
(1998-1999)

Professeur J.H.Maddocks

Assistants : Stéphane Rey, Silvio Burà

Cours: Mardi 13h15-15h00, MA31
Exercices : Mardi 15h15-16h00, MA31

## Organisation du cours

Les notes de cours d'analyse fonctionnelle sont à disposition dès le vendredi précédent le cours sur la page web :
*http://lcvmwww.epfl.ch/analyse_avancee.html.*
Les notes de cours seront augmentées et illustrées par des exemples en classe. Au début de chaque séance d'exercices, une série sera distribuée. Cette série est à rendre la séance suivante et sera corrigée pour la semaine d'après. Les étudiants qui auront fait les séries avec zèle verront leur note de l'examen final écrit augmentée d'un demi point.

Le professeur ainsi que les assistants se feront un plaisir de répondre à vos questions.

( Kreyszig : référence ; ou bien Chatterji III )

# Leçon 1

**Définition 1.1** *Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ muni d'une topologie. $E$ est alors un espace vectoriel topologique ( noté EVT ) si:*

1. $E \times E \to E, (f,g) \mapsto f+g$ *est continue*
2. $\mathbb{C} \times E \to E, (\lambda, f) \mapsto \lambda f$ *est continue*

**Rappel:**
Une norme est une application $E \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \| f \|$ qui satisfait:

1. $\| f \| = 0 \Leftrightarrow f = 0$
2. $\| f \| \geq 0$ pour tout $f \in E$
3. homogénéité: $\| \lambda f \| = | \lambda | \| f \|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$
4. inégalité du triangle $\| f + g \| \leq \| f \| + \| g \|$ pour tout $f, g \in E$

**Définition 1.2** *Une fonction qui satisfait 2., 3. et 4. s'appelle une* semi-norme.

E muni de $\| \, . \, \|$ s'appelle *espace normé*, si on pose $d(f,g) = \| f - g \|$ alors $d$ définit une métrique dans $E \times E$. Dans ce cas E est un espace vectoriel topologique (EVT).

**Remarque:**

Soit $E$ un espace normé.
a) Si $(f_n, g_n) \in E \times E$, $(f_n, g_n) \to (f, g)$ pour $n \to \infty$ alors on a $f_n + g_n \to f + g$ pour $n \to \infty$

b) Si $(\lambda_n, f_n) \to (\lambda, f)$ lorsque $n \to \infty$ alors $\lambda_n f_n \to \lambda f$ pour $n \to \infty$

**Preuve de a):**
$\| (f_n + g_n) - (f + g) \| \leq \| f_n - f \| + \| g_n - g \| \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

**Preuve de b):**

$$\begin{aligned}
\| \lambda_n f_n - \lambda f \| &= \| \lambda_n f_n - \lambda_n f + \lambda_n f - \lambda f \| \\
&\leq | \lambda_n | \| f_n - f \| + | \lambda_n - \lambda | \| f \| \\
&\leq M \| f_n - f \| + | \lambda_n - \lambda | \| f \| \\
&\text{où } M = \sup_{n \geq 0} | \lambda_n | < \infty \text{ car } \lambda_n \to \lambda.
\end{aligned}$$

Donc $\| \lambda_n f_n - \lambda f \| \to 0$ si $n \to \infty$

$\square$

Espaces Préhilbertiens:

Soit E un espace vectortiel sur $\mathbb{C}$. Une application $F : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ s'appelle une forme *hermitienne* si :

1. $f \mapsto F(f, g)$ est linéaire pour $g$ fixe dans $E$
2. $F(f, g) = \overline{F(g, f)}$

Remarquons que la deuxième condition entraîne que $F(f, f) \in \mathbb{R}$.
$g \rightarrow F(f, g)$ pour $f$ fixe dans $E$ est *semi-linéaire* si:

1. $F(f, g_1 + g_2) = F(f, g_1) + F(f, g_2)$
2. $F(f, \lambda g) = \overline{\lambda} F(f, g)$

$F : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ s'appelle *sesquilinéaire* si:

1. $f \mapsto F(f, g)$ est linéaire
2. $g \rightarrow F(f, g)$ est semi-linéaire

$\left.\begin{array}{l}F \text{ sesquilinéaire} \\ F(f,f) \in \mathbb{R}\end{array}\right\} \Rightarrow F(f,g) = \overline{F(g,f)}$

On démontrera que si F est sesquilinéaire et $F(f, f) \in \mathbb{R}$ pour tout $f \in E$ alors F est hermitienne.
La forme hermitienne $F$ s'appelle *positive* (resp. *strictement positive* ) si $F(f, f) \geq 0$ pour tout $f \in E$ (resp. $F(f, f) > 0$ pour tout $f \in E$ tel que $f \neq 0$ ).

dans $\mathbb{C}$: hermitienne

**Définition 1.3** *Un* produit scalaire *est une forme hermitienne strictement positive.* → algèbre linéaire : PS ≡ forme $\underbrace{\text{bilinéaire symétrique}}$ définie positive . Ex : $F(x, y) = x^t . y$
*Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire s'appelle un* espace préhilbertien

**Lemme 1.1** *Si F est une forme sesquilinéaire sur un espace vectoriel E alors:*

1. $F(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j, \sum_{k=1}^{n} \mu_k g_k) = \sum_{1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n} \lambda_j \overline{\mu_k} F(f_j, g_k)$
2. *Formule de Polarisation:*

$$4F(f, g) = \{Q(f + g) - Q(f - g)\} + i\{Q(f + ig) - Q(f - ig)\}$$
$$= \sum_{k=0}^{3} i^k Q(f + i^k g)$$

*(où $Q(f) = F(f, f)$ est la forme quadratique associée à $F$)*

**Preuve:** Cf Exercices.

**Corollaire 1.1**

1. *Si deux formes sesquilinéaires $F_1, F_2$ sont telles que $F_1(f, f) = F_2(f, f)$ pour tout $f \in E$ alors $F_1 = F_2$*

2. *Si $F$ est sesquilinéaire et $F(f, f) \in \mathbb{R}$ pour tout $f$ alors $F$ est hermitienne.*

**Preuve de 2):**
Posons $F_1(f, g) = F(f, g)$ et $F_2(f, g) = \overline{F(g, f)}$, $F_1$ et $F_2$ sont sesquilinéaires et par hypothèse $F(f, f) \in \mathbb{R} \Rightarrow F_1(f, f) = F_2(f, f)$ pour tout $f$.
On conclut par 1.

$\square$

**Proposition 1.1** *Si $F$ est une forme hermitienne positive sur $E$ avec $Q(f) = F(f, f)$, alors les assertions suivantes sont vérifiées:* p. 165

1. *Inégalité de Cauchy-Schwarz:*

$$| F(f, g) |^2 \leq Q(f)Q(g) \text{ pour tout } f, g \in E$$

2. *Inégalité du triangle:*
*Si $p(f) = \sqrt{Q(f)}$ alors $p(f + g) \leq p(f) + p(g)$ pour tout $f, g \in E$*

↳ terminologie: parfois appelé inég. Minkowski

**Preuve:**
1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a $0 \leq Q(f + \lambda g) = F(f + \lambda g, f + \lambda g)$
$0 \leq Q(f) + \overline{\lambda}F(f, g) + \lambda F(g, f) + | \lambda |^2 Q(g)$
Si $Q(g) \neq 0$ on prend $\lambda = -\frac{F(f,g)}{Q(g)}$ et on obtient:
$0 \leq Q(f) - \frac{\overline{F(f,g)}}{Q(g)}F(f, g) - \frac{F(f,g)F(g,f)}{Q(g)} + \frac{F(f,g)F(g,f)}{Q^2(g)}Q(g)$
$\Rightarrow F(f, g)F(g, f) \leq Q(f)Q(g)$.
Pour $Q(f) \neq 0$ on peut reprendre le même calcul pour $Q(\lambda f + g)$
Pour $Q(f) = Q(g) = 0$ on a $0 \leq Q(f + \lambda g) = -2 | F(f, g) |^2 \Rightarrow F(f, g) = 0$

- meilleure preuve: avec la restriction du produit scalaire à vect $\{f, g\}$
$M = M^* = \begin{pmatrix} \langle f|f\rangle & \langle f|g\rangle \\ \langle g|f\rangle & \langle g|g\rangle \end{pmatrix}$
P.S $\Rightarrow$ positif: $\det M \geq 0$:
$\|f\|^2 \cdot \|g\|^2 - \langle f|g\rangle \cdot \overline{\langle f|g\rangle} \geq 0$
$\Rightarrow |\langle f|g\rangle|^2 \geqslant \|f\|^2 \cdot \|g\|^2$
$\Rightarrow |\langle f|g\rangle| \geqslant \|f\| \cdot \|g\|$

2.

$$\begin{aligned} Q(f + g) &= Q(f) + F(f, g) + F(g, f) + Q(g) = Q(f) + 2Re(F(f, g)) + Q(g) \\ &\leq Q(f) + 2 | F(f, g) | + Q(g) \leq Q(f) + 2\sqrt{Q(f)Q(g)} + Q(g) \\ &= (\sqrt{Q(f)} + \sqrt{Q(g)})^2 \end{aligned}$$

$\square$

Remarque:
Si F est strictement positive:

$$\begin{cases} 1. \mid F(f,g) \mid^2 = Q(f)Q(g) \Leftrightarrow \underline{f, g \text{ sont linéairement dépendants}} & : f = \lambda g \ , \lambda \in \mathbb{C} \\ 2. \ p(f+g) = p(f) + p(g) \Leftrightarrow f = 0 \text{ ou } g = 0 \text{ ou } f = \lambda g, \ \lambda > 0 \end{cases}$$

$\Downarrow \lambda \in \mathbb{R}$

Notation: On écrira $< f, g >$ pour $F(f,g)$ si $F$ est hermitienne strictement positive, et $\| f \|$ pour $\sqrt{< f, f >}$.

**Proposition 1.2** *Un espace préhilbertien E est un espace normé avec* $\| f \| = \sqrt{< f, f >}$

**Définition 1.4** *Un espace normé complet s'appelle un espace de Banach. Un espace préhilbertien complet s'appelle un espace hilbertien*

Exemple d'espace préhilbertien:

$x_i \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} l^2 = \{x = (x_n)_{n=1}^{\infty} : \sum_{n=0}^{\infty} \mid x_n \mid^2 < \infty\} \\ \text{avec } < x, y > = \sum x_n \overline{y}_n \text{ si } x = (x_n)_{n=1}^{\infty}, y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \text{ dans } l^2. \end{cases}$$

(suites de carré sommable)

On utilise la relation $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ si $a, b \geq 0$ on a alors:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mid x_n y_n \mid \leq \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\mid x_n \mid^2 + \mid y_n \mid^2) < \infty$$

# Leçon 2

**Exemple:**

$p \geq 1$ : espace important

$l^p = \{x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{j=0}^{\infty} \mid x_j \mid^p < \infty\}$, pour $0 < p < \infty$

$l^0 = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $l^\infty = \{x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \parallel x \parallel_\infty = \sup_{j\in\mathbb{N}} \mid x_j \mid < \infty\}$

Si $1 \leq p < \infty$ on écrit: $\parallel x \parallel_p = (\sum_{j=0}^{\infty} \mid x_j \mid^p)^{\frac{1}{p}}$ et $d_p(x,y) = \parallel x - y \parallel_p$ : Banach, et: $p=2$ : Hilbert

Si $0 < p < 1$, on écrit $d_p(x,y) = \sum_{j=0}^{\infty} \mid x_j - y_j \mid^p$ (uniq. une distance mais pas de norme) esp. métrique mais pas Banach.

$p \in [0,1[$ : $\nexists$ de norme

Si $p = 0$, on écrit $d_0(x,y) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{|x_j - y_j|}{1+|x_j-y_j|}$

Chaque $l^p$ est un espace vectoriel: en effet, c'est évident si $p = 0, \infty$; pour $0 < p < \infty$, on utilise $\boxed{(a+b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)}$ si $a, b \geq 0, \ 0 < p < \infty$

**Preuve:**

$(a+b) \leq 2\max(a,b)$ et donc $(a+b)^p \leq 2^p(\max(a,b))^p \leq 2^p(a^p + b^p)$

**Proposition 2.1** *$l^p$ muni de la distance $d_p(x,y)$ est un EVT.*

**Preuve:**

Pour $1 \leq p \leq \infty$, $x \mapsto \parallel x \parallel_p$ est une norme

( Inégalité de Minkowski: $\parallel x + y \parallel_p \leq \parallel x \parallel_p + \parallel y \parallel_p$, cf suite, déjà vu pour $p = 2$ )

Pour $0 < p < 1$ on a:

$\mid x + y \mid_p \leq \mid x \mid_p + \mid y \mid_p$ où $\mid x \mid_p = \sum_{j=0}^{\infty} \mid x_j \mid^p$, $d_p(x,y) = \mid x - y \mid_p$

**Lemme 2.1** *Si $a \geq 0, \ b \geq 0, \ 0 < p < 1$, alors $(a+b)^p \leq a^p + b^p$*

**Preuve:**

On suppose que $a > 0, \ b > 0$ et $a + b = 1$; alors $0 < a < 1, \ 0 < b < 1$ et $a^p > a, b^p > b, \ (a^p - a = a(a^{p-1} - 1) > 0), \ 1 = a + b = (a+b)^p \leq a^p + b^p$ dans le cas général on utilise le fait que:

$$(a+b)^p \leq a^p + b^p \ \Leftrightarrow \ 1 \leq (\tfrac{a}{a+b})^p + (\tfrac{b}{a+b})^p$$

$\square$

Donc $d_p, \ 0 < p < 1$ est une métrique. Il nous reste à montrer la continuité → pour voir esp. vect. topologique

Si $x^{(n)} \to x, \ y^{(n)} \to y$ pour $n \to \infty$ dans $l^p$, et $\lambda_n \to \lambda$ dans $\mathbb{C}$ , il faut voir que :

$$\left.\begin{array}{r} d_p(x^{(n)} + y^{(n)}, x + y) \ \to \ 0 \\ d_p(\lambda_n x^{(n)}, \lambda x) \ \to \ 0 \text{ quand } n \ \to \ \infty \end{array}\right\}$$

En effet:

$$\begin{aligned} d_p(x^{(n)}+y^{(n)}, x+y) &= \mid (x^{(n)}+y^{(n)})-(x+y) \mid_p \\ &\leq \mid x^{(n)}-x \mid_p + \mid y^{(n)}-y \mid_p \to 0 \\ &\text{quand } n \to \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_p(\lambda_n x^{(n)}, \lambda x) &= \mid \lambda_n x^{(n)} - \lambda x \mid_p \\ &= \mid \lambda_n x^{(n)} - \lambda_n x + \lambda_n x - \lambda x \mid_p \\ &= \mid \lambda_n (x^{(n)}-x) \mid_p + \mid (\lambda_n - \lambda) x \mid_p \\ &\leq M^p \mid x^{(n)} - x \mid + \mid x \mid_p \mid \lambda_n - \lambda \mid^p \\ &\to 0 \end{aligned}$$

Pour $p=0$: $\mid x \mid_0 = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{|x_j|}{1+|x_j|}$, $x=(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

On établit que $\mid x+y \mid_0 \leq \mid x \mid_0 + \mid y \mid_0$, qui vient du lemme suivant:

**Lemme 2.2** *Si on a $0 \leq c \leq a+b$ et $a, b \geq 0$ alors:*

$$\frac{c}{1+c} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$$

**Démonstration:**
Supposons $a, b, c > 0$ : alors
$\frac{c}{1+c} = \frac{1}{\frac{1}{c}+1} \leq \frac{1}{\frac{1}{a+b}+1} = \frac{a+b}{1+a+b} = \frac{a}{1+a+b} + \frac{b}{1+a+b} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$
Si un des éléments $a, b, c$ est nul, le résultat est évident.

□

$\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ muni de $d_0$ est un EVT (métrique) (Si $x, x^{(n)} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $\mid x^{(n)} - x \mid_0 \to 0 \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} x_j^{(n)} = x_j,\ j=1,2,\ldots$ Cf exercice )

□

**Proposition 2.2** *Les espaces $l^p$ $(0 \leq p \leq \infty)$ sont complets; en particulier, $l^p$ pour $1 \leq p \leq \infty$, sont des espaces de Banach et $l^2$ est un espace hilbertien.*

$\ell^2$ : $p=q=2$

**Démonstration:**
Pour $p = 0, \infty$, c'est évident; prenons $0 < p < \infty$:
Soit $x^{(n)} = (x_j^{(n)})_{j=1}^{\infty}$ tel que $\sum_{j=0}^{\infty} \mid x_j^{(m)} - x_j^{(n)} \mid^p \to 0$ si $n, m \to \infty$ c'est à dire $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy dans $l^p$.

Il est clair que $\lim_{m \to \infty} x_j^{(m)} = x_j$ existe car $| x_j^{(m)} - x_j^{(n)} | \to 0$.
Il faut voir que $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in l^p$ et $\sum_{j=0}^{\infty} | x_j - x_j^{(n)} |^p \to 0$ si $n \to \infty$.
Si $\epsilon > 0$, $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{j=0}^{\infty} | x_j^{(m)} - x_j^{(n)} |^p < \epsilon$ si $m, n \geq n_\epsilon$.
Pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a: $\sum_{j=0}^{N} | x_j^{(m)} - x_j^{(n)} |^p < \epsilon$ si $m, n \geq n_\epsilon$.
D'où avec $m \to \infty$ : $\sum_{j=0}^{N} | x_j - x_j^{(n)} |^p \leq \epsilon$, $n \geq n_\epsilon$ et donc pour $N \to \infty$ : $\sum_{j=0}^{\infty} | x_j - x_j^{(n)} |^p \leq \epsilon$, $n \geq n_\epsilon$
Ceci montre que $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in l^p$ (car $x = \underbrace{x^{(n)}}_{\in \ell^p} + \underbrace{(x - x^{(n)})}_{\in \ell^p}$) et
$d_p(x, x^{(n)}) \to 0$ si $n \to \infty$

Minkowsky $\longrightarrow$ la somme de suites $\in \ell^p$ $\in \ell^p$

$\square$

**Exemples:**

1) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert non vide;
$C(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C}$ continue $\}$
$\otimes$ $C_p(\Omega) = \{f \in C(\Omega) : \int_\Omega | f(x) |^p \, dx < \infty\}$ pour $0 < p < \infty$
$C_0(\Omega) = C(\Omega)$
$C_\infty(\Omega) = \{f \in C(\Omega) : \sup_{x \in \Omega} | f(x) | = \| f \|_\infty < \infty\}$
$\otimes$ $C_2(\Omega)$ est préhilbertien: $< f, g >= \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}dx$, $f, g \in C_2(\Omega)$
($\exists$ une métrique sur $C_0(\Omega)$ par rapport à laquelle $C_0(\Omega)$ est complet )
ex 1 $C_\infty(\Omega)$ est un espace de Banach.
$1 \leq p < \infty$, $\| f \|_p = (\int_\Omega | f(x) |^p \, dx)^{\frac{1}{p}}$ est une norme dans $C_p(\Omega)$
$0 < p < 1$, $| f |_p = \int_\Omega | f(x) |^p \, dx$ donne une distance $d_p(f, g) = | f - g |_p$ pour tout $f, g \in C_p(\Omega)$, $C_p(\Omega)$ devient un EVT.
$(C_p(\Omega), \| . \|_p)$, $p \geq 1$ est un espace normé.
$(C_p(\Omega), \| . \|_p)$, $0 < p < \infty$ n'est pas complet. Les complétions de $C_p(\Omega)$ donnent $L^p(\Omega)$

2)Soit $\Omega$ ouvert non vide de $\mathbb{R}^N$.
$E = C^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C}$ indéfiniment dérivable $\}$
Fixons $m \in \mathbb{N}$:
$E_m = \{f \in C^\infty(\Omega) : \int_\Omega | D^\alpha f(x) |^2 \, dx < \infty, \ | \alpha | \leq m\}$ où
$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ est un multiindice avec $| \alpha | = \alpha_1 + ... + \alpha_N$.
Si $D_i = \frac{\delta f}{\delta x_i}$, $D^\alpha f = D_1^{\alpha_1} ... D_N^{\alpha_N} f$ on a:
$D_j^0 f = f$, $\triangle f = D_{11} f + ... + D_{NN} f = D_1^2 f + ... + D_N^2 f$ (=laplacien de f)
Si $f, g \in E_m$, $\boxed{< f, g >_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha f(x) \overline{D^\alpha g(x)} dx}$
Pour chaque $m$, $E_m$ est un espace préhilbertien non complet. La complétion donne $H^m(\Omega)$: espace de Sobolev de degré $m$. (espace très vaste)

$C_0^\infty(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) : suppf$ est compact $\}$ où $suppf = \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}$.

fermé borné

$supp\, f$ compact $\Leftrightarrow$ $supp\, f$ est compact et contenu dans $\Omega$

$\Leftrightarrow$ $\exists K$ compact , $K \subset \Omega$ tel que $f(x) = 0$ si $x$ n'appartient pas à $K$.

De plus $C_0^\infty(\Omega) \subset E_m$, pour tout $m \in \mathbb{N}$.

# Leçon 3

**Définition 3.1** *Si $E$ et $F$ sont deux EVT, $E$ et $F$ sont dites* isomorphes *s'il existe une application $u : E \to F$ linéaire, bijective, continue avec $u^{-1} : F \to E$ continue*

(x) **Proposition 3.1** *Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace normé. Alors $\exists$ $(\widetilde{E}, \| \cdot \|)$ tel que :*

1. *$(\widetilde{E}, \| \cdot \|)$ est un espace de Banach*
2. *$E \subset \widetilde{E}$, si $f \in E$ alors $\| f \|$ dans $E$ est égale à $\| f \|$ dans $\widetilde{E}$*
3. *$E$ est dense $\widetilde{E}$* (E. MMP.
4. *Si $(F, \| \cdot \|)$ est un autre espace de Banach avec les propriété 1),2) et 3), alors $\widetilde{E}$ et $F$ sont* **isomorphes**

**Exemples:**
La complétion de $C_p(\Omega)$ est $L^p(\Omega)$
La complétion de $E_m(\Omega)$ est $H^m(\Omega)$, l'espace de Sobolev d'ordre $m$.
La complétion de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$ est $H_0^m(\Omega)$ pour $(m = 1, 2, ...)$.

(x) **Proposition 3.2** *Soient $E, F$ deux espaces vectoriels normés et $u : E \to F$ une application linéaire :*

1. *Si $u$ est continue en un point de $E$, alors $u$ est continue partout*
2. *$u$ est continue $\Leftrightarrow$ $\exists M \geq 0$ tel que :*

app.bornée
$\Leftrightarrow$ u continue

$$\| uf \|_F \leq M \| f \|_E \text{ pour tout } f \in E$$

**Preuve:**
1) Si $\boxed{u \text{ est continue en } a} \in E$ et $(f)_{n=1}^\infty$ une suite dans $E$ telle que $f_n \to f \in E$ alors $(f_n - f) + a \to a$ si $n \to \infty$
$u(f_n - f + a) = uf_n - uf + ua \to ua$ si $n \to \infty$.
Donc $uf_n - uf \to 0$ si $n \to \infty$.
2)" $\Leftarrow$ "Si $(f)_{n=1}^\infty$ une suite dans $E$ telle que $f_n \to 0$ alors $uf_n \to 0$
$u$ est continue en 0.
" $\Rightarrow$ " $u$ est continue en 0 alors pour $\epsilon = 1$ $\exists$ $\delta > 0$ tel que
$\| f \| < \delta \Rightarrow \| uf \| < 1$ si $f \in E (f \neq 0)$, $\| \frac{f\delta}{\|2f\|} \| < \delta$, et donc:
$\| u(\frac{f\delta}{\|2f\|}) \| < 1$, $\frac{\delta}{2\|f\|} \| uf \| < 1$, $\| uf \| < M \| f \|$ si $M = \frac{2}{\delta}$.

$\square$

**Définition 3.2** *Soient $E, F$ deux espaces normés (ou bien EVT), on note:*
$L(E,F) = \{u : E \;\rightarrow\; F : u \text{ linéaire et continue } \} \subset Hom(E,F)$
*Si $u \in L(E,F)$, on écrit $\| u \|= \sup_{\|f\|\leq 1} \| uf \|$ .*
*Alors $\| uf \| \leq \| u \| \cdot \| f \|$ pour tout $f \in E$.*
*On écrit $E' = L(E, \mathbb{C})$ = espace* dual *de $E$, $u \in E'$ s'appelle foctionnelle ou forme linéaire, continue sur $E$, $u \in L(E,F)$ s'appelle un opérateur linéaire continu ou* borné.

$$\| u(\tfrac{f}{\|f\|} \| f \|) \| = \| f \| \| u(\tfrac{f}{\|f\|}) \| \leq \| f \| \| u \|$$

**Remarque:**

$$\begin{aligned} \| u \| &= \inf\{M > 0 : \| uf \| \leq M \| f \|, \text{ pourtout } f \in E\} \\ &= \sup_{\|f\|=1} \| uf \| \end{aligned}$$

**Proposition 3.3** *$L(E,F)$ muni de $\| \,.\, \|$ est un espace normé*

**Preuve:** Voir Exercices

**Proposition 3.4** *Soient $E, F$ normés et $u : E \;\rightarrow\; F$ linéaire avec $u(E) = F$, alors $u^{-1}$ existe et est continue $\Leftrightarrow$ $\exists m > 0$ tel que $\| uf \| \geq m \| f \|$ pour tout $f \in E$ $(*)$*

**Preuve:** Si $(*)$ est vraie alors u est injective ($uf = 0 \;\Rightarrow\; f = 0$) et $u^{-1} : F \;\rightarrow\; E$ existe et est linéaire.
Si $g \in F$, $\exists ! f \in E$ tel que $uf = g$, donc $u^{-1}g = f$ et de $(*)$ on a $\| u^{-1}g \| \leq \frac{1}{m} \;\| uu^{-1}g \| = \frac{1}{m} \| g \|$ pour tout $g \in F \;\Rightarrow \| u^{-1} \| \leq \frac{1}{m}$.
D'autre part si $u^{-1}$ existe et est continue alors $\exists\; M > 0$ tel que $\| u^{-1}g \| \leq M \| g \|$ pour tout $g \in F$. On a donc $\| uu^{-1}f \| \leq M \| uf \| \Rightarrow \| uf \| \geq \frac{1}{M} \| f \|$ pour tout $f \in E$.

□

**Proposition 3.5** *Soit $E$ un espace normé avec $dim E = N < \infty$. Si $\{a_1, ..., a_N\}$ est une base de $E$, alors $\exists\; M_1, M_2 > 0$ telles que:*

$$M_1 \max_{1\leq j\leq N} \mid \alpha_j \mid \;\leq\; \| \sum_{j=1}^{N} \alpha_j a_j \| \leq\; M_2 \max_{1\leq j\leq N} \mid \alpha_j \mid$$

*pour tout $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N) \in \mathbb{C}^N$.*
*En écrivant $\mid \alpha \mid = \max_{1\leq j\leq N} \mid \alpha_j \mid$, $T\alpha = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j a_j$ on a que $T : \mathbb{C}^N \;\rightarrow\; E$, $\alpha \mapsto T\alpha$ est un isomorphisme entre $(\mathbb{C}^N, \mid . \mid)$ et $(E, \| \,.\, \|)$.*

**Démonstration:**
$T : \mathbb{C}^N \to E$ est évidement linéaire et bijective, de plus

$$\| T\alpha \| = \| \sum_{j=1}^{N} \alpha_j a_j \| \leq \sum_{j=1}^{N} | \alpha_j | \| a_j \|$$
$$\leq | \alpha | \sum_{j=1}^{N} \| a_j \| = | \alpha | M_2$$

Soit $K = \{\alpha \in \mathbb{C}^N : | \alpha | = 1\}$. $K$ est compact puisque $\alpha \to \| T\alpha \|$ est continue dans $\mathbb{C}^N$, $\inf_{\alpha\in K} \| T\alpha \| = M_1 > 0$ car $\inf_{\alpha\in K} \| T\alpha \| = \| T\beta \|$ pour un $\beta \in K$ ( l'infimum est atteint car $K$ est compact) or $T\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$ car $T$ est bijective mais 0 n'appartient pas à $K$, donc $\beta \neq 0$.
Alors

$$\| T\alpha \| = \| T(\frac{\alpha}{| \alpha |} | \alpha |) \| \text{ pour } \alpha \neq 0$$
$$= | \alpha | \| T(\frac{\alpha}{| \alpha |}) \| \geq | \alpha | M_1 \text{ car } \frac{\alpha}{| \alpha |} \in K$$

donc $M_1 | \alpha | \leq \| T\alpha \| \leq M_2 | \alpha | \Rightarrow T$ et $T^{-1}$ sont continues; c'est donc un isomorphisme.

□

**Corollaire 3.1**

1. *Un espace normé de dimension finie est un espace de Banach*

2. *Deux normes $\| \, . \, \|_1$, $\| \, . \, \|_2$ dans un espace normé de dimension finie sont* équivalentes *dans le sens que $\exists\, M, m > 0$ telles que*

$$m \| f \|_1 \leq \| f \|_2 \leq M \| f \|_1 \textit{ pour tout } f \in E$$

**Démonstration:**
1)$T : \mathbb{C}^N \to E$ est un isomorphisme et $dim E = N < \infty$;
on a alors plus généralement que si $T : F \to E$ ($E, F$ normés )
est un isomorphisme, alors: $E$ est complet $\Leftrightarrow$ $F$ est complet:
$\| Tg \| \leq M_2 \| g \|$, $\| Tg \| \geq M_1 \| g \|$ et $\mathbb{C}^N$ est complet.
2) On a que $(\mathbb{C}^N, | \, . \, |)$ est isomorphe à $(E, \| \, . \, \|_1)$ et à $(E, \| \, . \, \|_2)$ par l'application $T : \mathbb{C}^N \to E$, $\alpha \mapsto \sum_{j=1}^{N} \alpha_j a_j$. On a alors:

$$\| f \|_1 = \| T(T^{-1}f) \|_1 \leq \| T \|_1 | T^{-1}f | \leq M \| f \|_2.$$

□

# Leçon 4

**Corollaire 4.1** *Soient $E, F$ deux espaces normés avec $dimE < \infty$, alors si $u : E \rightarrow F$ est linéaire, elle est continue.*

**Démonstration:**
Soit $\{a_1, ..., a_N\}$ une base de $E$, $f \in E$ s'écrit $f = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j a_j$ et $uf = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j u(a_j)$ d'où:

$$\begin{aligned} \| uf \| &\leq \sum_{j=1}^{N} | \alpha_j | \| u(a_j) \| \leq \max_{1 \leq j \leq N} | \alpha_j | \sum_{j=1}^{N} \| u(a_j) \| \\ &\leq \frac{\sum_{j=1}^{N} \| u(a_j) \|}{M} \| f \| \end{aligned}$$

$\square$

**Corollaire 4.2** *Soit $E$ un espace normé, alors tout sous-espace vectoriel $F$de dimension finie dans $E$ est fermé.*

**Démonstration:**
On sait que $F$ est complet. Si $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite dans $F$ telle que $f_n \rightarrow f \in E$ lorsque $n \rightarrow \infty$, alors $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy, on conclut que $f \in F$ (car F est complet).

$\square$

**Proposition 4.1** *Un espace normé $E$ est de dimension finie si et seulement si $B = \{f \in E : \| f \| \leq 1\}$ est compacte.*

**Démonstration:**
1)
Soient $dim\ E < \infty$, $\{a_1, ..., a_N\}$ une base de $E$, $f_n \in B$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ peut s'écrire $f_n = \sum_{j=1}^{N} \alpha_{nj} a_j$ et
$\sup_n \max_j | \alpha_{nj} a_j | \leq \frac{1}{M} \| f_n \| \leq \frac{1}{M} < \infty$
Donc il existe une sous-suite $n_1 < n_2 < ...$ telle que $\alpha_{n_k,j} \rightarrow \alpha_j$ si $k \rightarrow \infty$ pour tout $1 \leq j \leq N$ si $f = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j a_j$.
On a:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{N} \alpha_{n_k,j} a_j = \sum_{j=1}^{N} \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{n_k,j} a_j \\ &= \sum_{j=1}^{N} \alpha_j a_j = f \end{aligned}$$

2)

**Lemme 4.1** *Soit $E_0$ un sous-espace fermé de $E$ alors pour tout $\theta \in (0,1)$ $\exists$ $f_\theta \in E$ tel que :*
$\| f_\theta \| = 1$ *et* $d(f_\theta, E_0) = \inf_{f \in E_0} \| f_\theta - f \| > \theta$.

Admettons pour le moment ce lemme et supposons que $dim\ E = \infty$; dans ce cas $B$ n'est pas compacte:
En effet soit $g_1 \in E$, $\| g_1 \| = 1$, notons $E_1$ le sous-espace engendré par $g_1$. Par le lemme il existe $g_2 \in E$ tel que $\| g_2 \| = 1$ et , $\| g_1 - g_2 \| > \frac{1}{2}$.
Notons encore $E_2$ le sous-espace engendré par $g_1, g_2$. Il existe alors $g_3 \in E$ tel que $\| g_3 \| = 1$, $\| g_3 - g_2 \| > \frac{1}{2}$, $\| g_3 - g_1 \| > \frac{1}{2}$.
Il existe donc une suite $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ dans $E$ avec la propriété:
$\| g_n \| = 1$, $\| g_n - g_j \| > \frac{1}{2}$ pour tout $1 \leq j \leq n-1$.
La suite $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ bien qu'elle appartient à $B$ ne possède pas de sous-suite convergente. B n'est donc pas compacte.

□

**Démonstration** du lemme:
Soit $f$ un élément fixe de $E - E_0$, on a que $d = d(f, E_0) > 0$ car $E_0$ est fermé.
Il existe $g \in E_0$ tel que $d \leq \| f - g \| \leq \frac{d}{\theta}$, posons $f_\theta = \frac{(f-g)}{\|f-g\|}$.

Si $h \in E_0$ on a:

$$\begin{aligned}
\| f_\theta - h \| &= \left\| \frac{f-g}{\| f-g \|} - h \right\| = \frac{1}{\| f-g \|} \| f - g - h \| f - g \| \| \\
&= \frac{1}{\| f-g \|} \| f - (g + \| f-g \| h) \| \geq \frac{d}{\| f-g \|} \geq \theta
\end{aligned}$$

car $g + \| f - g \| h$ appartient à $E_0$.

□

**Définition 4.1** *Un espace topologique $E$ s'appelle* séparable *s'il existe une partie dénombrable $A$ dense dans $E$.*

**Remarque :** $A$ est dense dans $E$ si $\overline{A} = E$. Dans le cas où $E$ est un espace métrique, $A \subset E$ est dense si pour tout $f \in E$ il existe une suite $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$, tel que:

$f_n \to f$ lorsque $n \to \infty$.

**Définition 4.2** *Une partie $A$ d'un espace normé $E$ s'appelle* totale *si le sous-espace vectoriel engendré par $A$ est dense dans $E$.*
*Si $f \in E$, et $\epsilon > 0$ alors ils existent $a_1, ..., a_N \in A$ et $\alpha_1, ..., \alpha_N \in \mathbb{C}$ tels que $\| f - \sum_{j=1}^N \alpha_j a_j \| < \epsilon$.*

**Proposition 4.2** *Soit $E$ est un espace normé possèdant une partie au plus dénombrable totale, alors $E$ est séparable. En particulier tout espace normé de dimension finie ainsi que les $l^p$ pour $1 \leq p < \infty$ sont séparables ($l^\infty$ n'est pas séparable ).*
*De plus si $E$ est séparable alors il existe une partie au plus dénombrable totale formée de vecteurs linéairement indépendants.*

**Démonstration:**
Soit $A \subset E$ totale au plus dénombrable.
$D = \{\sum_{j=1}^N \alpha_j a_j : N \in \mathbb{N},\ a_j \in A,\ \alpha_j \in \mathbb{C}$ rationnels $\}$
($\alpha_j \in \mathbb{C}$ rationnel $\Leftrightarrow$ $Re(\alpha_j)$, $Im(\alpha_j)$ sont rationnels ).
$D$ est dénombrable et dense dans $E$:
En effet si $f \in E$, $\epsilon > 0$, $\exists\, a_1, ..., a_N \in A$ et $\alpha_1, ..., \alpha_N \in \mathbb{C}$ tels que $\| f - \sum_{j=1}^N \alpha_j a_j \| < \frac{\epsilon}{2}$
Ils existent $\beta_1, ..., \beta_n$ rationnels tels que:
$| \beta_j - \alpha_j | < \epsilon_1 < \epsilon \frac{1}{2\sum_{j=1}^N \|a_j\|}$ et donc

$$\begin{aligned}
\| f - \sum_{j=1}^N \beta_j a_j \| &= \| f - \sum_{j=1}^N \alpha_j a_j + \sum_{j=1}^N (\alpha_j - \beta_j) a_j \| \\
&\leq \| f - \sum_{j=1}^N \alpha_j a_j \| + \sum_{j=1}^N | \alpha_j - \beta_j | \| a_j \| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \epsilon_1 \sum_{j=1}^N \| a_j \| \leq \epsilon
\end{aligned}$$

(Puisque chaque espace de dimension fini possède un ensemble total (par exemple une base algébrique) il est séparable).

Si $1 \leq p < \infty$, $A = \{e_0 = (1, 0, ...),\ e_1 = (0, 1, 0, ...), ...\}$ est un ensemble dénombrable total dans $l^p$ car si $x = (x_0, x_1, ...) \in l^p$ et $\epsilon > 0$ :

$\| x-\sum_{j=1}^{N} \alpha_j e_j \|_p = (\sum_{j=N+1}^{\infty} | x_j |^p)^{\frac{1}{p}} < \epsilon$ si N est assez grand.

$l^\infty$ n'est pas séparable:
Soit $\alpha \subset \mathbb{N}$ non vide alors $1_\alpha \in l^\infty$ et $\| 1_\alpha \|_\infty = 1$.
Posons $I = \{\alpha \subset \mathbb{N} : \alpha \text{ non vide } \}$, on a alors que $I$ est non dénombrable et $\| 1_\alpha - 1_\beta \|_\infty = 1$ si $\alpha \neq \beta$. Ceci entraîne que $l^\infty$ est non séparable car:
Soit $A = \{a_1, a_2, ...\}$ une partie dénombrable de $l^\infty$. Si $A$ est dense dans $l^\infty$, alors pour tout $\alpha \in I$, $\exists\, a_{n(\alpha)}$ tel que $\| f_\alpha - a_{n(\alpha)} \|_\infty < \frac{1}{2}$. L'application $n : \alpha \ \rightarrow \ n(\alpha)$ est injective car si $\alpha \neq \beta$ et $a_n(\alpha) = a_n(\beta) = a$ alors:
$1 = \| f_\alpha - f_\beta \| = \| f_\alpha - a + a - f_\beta \| \leq \| f_\alpha - a \| + \| f_\beta - a \| < 1$.
L'application $n$ est donc injective entre $I$ et $\mathbb{N}$.Contradiction.

Montrons que si $E$ est normé et séparable alors il existe une partie $A$ dense au plus dénombrable de vecteurs linéairements indépendants:
Soit $D$ un ensemble dénombrable dense dans $E$: $D = \{d_1, d_2, ...\}$.
Posons $a_1 = d_{n_1} \neq 0$ avec $d_n = 0$ si $n < n_1$. Il existe $n_2$ tel que $d_{n_2}$ linéairement indépendant de $a_1$; posons $a_2 = d_{n_2}$, etc... .
Alors on a deux possibilités:
ou i) il existe $K$ tel que pour tout $d_n$ avec $n > n_k$ est dépendant de $a_1, ..., a_k$. E sera de dimension finie.
ou ii) pour tout $k$ il existe $d_n$ avec $n > n_k$ tel que $d_n$ ne dépend pas de $a_1, ..., a_{k-1}$.
$A$ est total:
Soit $f \in E$, $\epsilon > 0$,alors il existe $n$ tel que $\| f - d_n \| < \epsilon$. Mais $d_n = \alpha_1 a_1 + ... + \alpha_k a_k$, $\alpha_j \in \mathbb{C}$, et donc $\| f - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j a_j \| < \epsilon$.

□

**Remarque:**

1. $C([0,1])$ est séparable. Plus généralement $C(X)$ avec $X$ compact et métrique, est séparable.
2. $C(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \ \rightarrow \ \mathbb{C} : f \ \text{ continue }, \ \| f \|_\infty < \infty\}$ est non séparable. Plus géneralment si $X$ est métrique non compact alors $C(X)$ est non séparable.

3. Par contre, les espaces préhilbertiens "intéressants" sont en général séparables.

# Leçon 5

## ESPACES PREHILBERTIENS

**Définition 5.1** *Une famille* $\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset E$ *s'appelle* orthogonale *si* $<\phi_\alpha, \phi_\beta>= 0$ *quand* $\alpha \neq \beta$. *Une famille* $\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset E$ *s'appelle* orthonormale *si* $<\phi_\alpha, \phi_\beta>= \delta_{\alpha\beta}$.

Si $\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls alors $\psi_\alpha = \frac{\phi_\alpha}{\|\phi_\alpha\|}$ est une famille orthonormale.

**Exemple :**
Soit $E = C([a, a+p])$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $p > 0$.
Posons $< f, g >= \int_a^{a+p} f(x)\overline{g(x)}dx$.
$\phi_n = exp(in\tau x)$, $\tau = \frac{2\pi}{p}$ $x \in [a, a+p]$ $n \in \mathbb{Z}$.
On a que $\phi_n(x+p) = \phi_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
De plus $<\phi_n, \phi_m>= 0$ si $n \neq m$, en effet :

$$\begin{aligned} <\phi_n, \phi_m> &= \int_a^{a+p} \phi_n(x)\overline{\phi_m(x)}dx \\ &= \int_a^{a+p} exp(in\tau x)exp(-im\tau x)dx, \quad k = n - m \neq 0 \\ &= \int_a^{a+p} exp(ik\tau x) = \frac{exp(ik\tau x)}{ik\tau} \Big|_{x=a}^{x=a+p} = 0 \end{aligned}$$

□

**Proposition 5.1** *Un système orthogonal formé de vecteurs non nuls est un système linéairement indépendant. Si* $E$ *est un espace préhilbertien séparable alors tout système orthogonal dans* $E$ *formé de vecteurs non nuls est au plus dénombrable.*

**Démonstration:**
Soit $(\phi_\alpha)_{\alpha\in I}$ un système orthogonal avec $\phi_\alpha \neq 0$ pour tout $\alpha$.
Si $\sum_{j=1}^m c_j\alpha_{\alpha_j} = 0$ alors :
$0 =< \sum_{j=1}^m c_j\phi_{\alpha_j}, \phi_{\alpha_k} >= \sum_{j=1}^m c_j < \phi_{\alpha_j}, \phi_{\alpha_k} >= c_k \| \phi_{\alpha_k} \|^2$ .
Donc $c_k = 0$ pour tout $k$.
Soit $(\phi_\alpha)_{\alpha\in I}$ un système orthogonal dans $E$ (séparable) avec $\phi_\alpha \neq 0$ pour tout $\alpha \in I$ .
Supposons que ce système est orthogonal et voyons que $I$ est au plus dénombrable. Prenons dans $E$ une partie dénombrable

dense $A = \{a_1, a_2, ...\}$. Pour tout $\alpha \in I\ \exists\, n(\alpha) \in \mathbb{N}$ tel que $\| \phi_\alpha - a_{n(\alpha)} \| < \frac{1}{2}$. Vérifions que $\alpha \rightarrow n(\alpha)$ est injective: si pour $\alpha \neq \beta$ on aurait $n(\alpha) = n(\beta) = n$, $\| \phi_\alpha - a_n \| < \frac{1}{2}$, $\| \phi_\beta - a_n \| < \frac{1}{2}$ et donc $\| \phi_\alpha - \phi_\beta \| < 1$.
Mais $\| \phi_\alpha - \phi_\beta \|^2 = \| \phi_\alpha \|^2 + \| \phi_\beta \|^2 = 2$.
On a donc que $\alpha \rightarrow n(\alpha)$ est injective, et alors $I$ est dénombrable.

$\square$

**Proposition 5.2** *Soit $E$ préhilbertien et $\{\phi_1, ..., \phi_n\}$ $n$ vecteurs orthogonaux non nuls dans $E$. Alors pour tout $f \in E$ on a:*
$\inf_{c_1,...,c_n \in \mathbb{C}} \| f - \sum_{j=1}^n c_j \phi_j \| = \| f - \sum_{j=1}^n a_j \phi_j \|$ *où* $a_j = \frac{<f,\phi_j>}{\|\phi_j\|^2}$.

*( Cette proposition est aussi appelée le* petit théorème de projection*).*

*De plus* $\| f - \sum_{j=1}^n a_j \phi_j \| < \| f - \sum_{j=1}^n c_j \phi_j \|$ *au moins que $a_j = c_j$ pour tout $1 \leq j \leq n$.*
*Le vecteur $f - \sum_{j=1}^n a_j \phi_j$ est orthogonal à $S$: le sous-espace vectoriel engendré par $\phi_1, ..., \phi_n$.*
*On a* l'inégalité de Bessel:

$$\sum_{j=1}^n | a_j |^2 \| \phi_j \|^2 \leq \| f \|^2$$

*avec égalité si et seulement si $f \in S$.*
*Les coefficients $a_1, ..., a_n$ sont appelés les* coefficients de Fourier de f *par rapport à $\{\phi_1, ..., \phi_n\}$.*

**Remarque:** Si $f = \sum_{j=1}^n a_j \phi_j$ alors:
$< f, \phi_k > = \sum_{j=1}^n a_j < \phi_j, \phi_k > = a_k \| \phi_k \|^2$ donc $a_k = \frac{<f,\phi_k>}{\|\phi_k\|^2}$.

**Corollaire 5.1** *Si $(\phi_\alpha)_{\alpha \in I}$ est un système orthogonal quelconque alors*

$$\sum_{\alpha \in I} | a_\alpha |^2 \| \phi_\alpha \|^2 \leq \| f \|^2 \text{ pour tout } f \in E$$

*où $a_\alpha = \frac{<f,\phi_\alpha>}{\|\phi_\alpha\|^2}$ si $\phi_\alpha \neq 0$ (Inégalité de Bessel généralisée).*

**Démonstration:**

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in I} | a_\alpha |^2 \| \phi_\alpha \|^2 &= \sup_{\alpha_1,...,\alpha_n \in I} \sum_{\alpha \in I} | a_{\alpha_j} |^2 \| \phi_{\alpha_j} \|^2 \\ &\leq \| f \|^2 . \end{aligned}$$

$\square$

**Preuve du petit théorème de projection:**
Soit $f \in E$, $S$ le sous-espace vectoriel engendré par $n$ vecteurs orthogonaux non nuls $\phi_1, ..., \phi_n$.
Posons $g = \sum_{j=1}^n a_j\phi_j$, $a_j = \frac{\langle f, \phi_j \rangle}{\|\phi_j\|^2}$: montrons que $f - g \perp S$ :

$$\begin{aligned}\langle f - g, \phi_k \rangle &= \langle f, \phi_k \rangle - \langle \sum_{j=1}^n a_j \phi_j, \phi_k \rangle \\ &= \langle f, \phi_k \rangle - \sum_{j=1}^n a_j \langle \phi_j, \phi_k \rangle \\ &= \langle f, \phi_k \rangle - a_k \parallel \phi_k \parallel^2 = 0\end{aligned}$$

Si $c_1, ..., c_n \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}f - \sum_{j=1}^n c_j \phi_j &= (f - g) + (g - \sum_{j=1}^n c_j \phi_j) \\ &= (f - g) + \sum_{j=1}^n (a_j - c_j)\phi_j\end{aligned}$$

d'où par le théorème de Pythagore on a

$$\begin{aligned}\parallel f - \sum_{j=1}^n c_j \phi_j \parallel^2 &= \parallel f - g \parallel^2 + \sum_{j=1}^n \mid a_j - c_j \mid^2 \parallel \phi_j \parallel^2 \\ &\geq \parallel f - g \parallel^2\end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si $c_j = a_j$ pour $1 \leq j \leq n$.
De plus $f = f - g + g$ et donc

$$\begin{aligned}\parallel f \parallel^2 &= \parallel f - g \parallel^2 + \parallel g \parallel^2 \\ &= \parallel f - g \parallel^2 + \sum_{j=1}^n \mid a_j \mid \parallel \phi_j \parallel^2 \\ &= \parallel f - g \parallel^2 + \sum_{j=1}^n \frac{\mid \langle f, \phi_j \rangle \mid^2}{\parallel \phi_j \parallel^2} \\ &\geq \sum_{j=1}^n \frac{\mid \langle f, \phi_j \rangle \mid^2}{\parallel \phi_j \parallel^2}, \text{ " = " } \Leftrightarrow f = g\end{aligned}$$

Si $f - \sum_{j=1}^n b_j \phi_j \perp \phi_k$, $1 \leq k \leq n$ alors:
$0 = \langle f - \sum_{j=1}^n b_j \phi_j, \phi_k \rangle = \langle f, \phi_k \rangle - b_k \parallel \phi_k \parallel^2$
et donc $b_k = \frac{\langle f, \phi_k \rangle}{\|\phi_k\|^2} = a_k$.

□

# Leçon 6

### Orthogonalisation de Gram-Schmidt:

On note $P_S f$ la projection de $f$ sur $S$.
Soit $\{f_1, f_2, ...\}$ une suite de vecteurs linéairement indépendants dans $E$ préhilbertien. Posons $\phi_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}$, et $S_1$ = sous-espace engendré par $\phi_1$.
Posons à nouveau $g_2 = P_{S_1} f_2 = \langle f_2, \phi_1 \rangle \phi_1$ et $\phi_2 = \frac{f_2 - g_2}{\|f_2 - g_2\|}$.
Le système $\{\phi_1, \phi_2\}$ est orthonormal et on appelle $S_2$ le sous-espace qui engendre.
Ceci donne $\{\phi_1, \phi_2, ...\}$ tel que:
1) les $\phi_n$ forment un système orthonormal
2) sous-espace engendré par $\phi_1, ..., \phi_n$ = sous-espace engendré par $f_1, ..., f_n$

**Remarque:** Si $\{f_1, f_2, ...\}$ est une suite totale, alors $\{\phi_1, \phi_2, ...\}$ est une suite orthonormale totale.

**Corollaire 6.1** *Tout espace préhilbertien* séparable *possède une suite orthonormale séparable.*

### Séries et somme dans un espace normé $E$:

Si $f \in E$, $n \in \mathbb{N}$, on dit que $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *converge* si:

$$S_n = f_0 + ... + f_n \longrightarrow f \text{ dans } E \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty.$$

Si $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge, alors $f_n \longrightarrow 0$ pour $n \longrightarrow \infty$, et en particulier $(S_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy.
Si $E$ est complet alors on a que l'affirmation réciproque est aussi vérifiée, et donc $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \Leftrightarrow (S_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy.

**Définition 6.1** *Soient $f_\alpha \in E$ pour tout $\alpha \in I$ et $f \in E$. On dit que $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ est* sommable *avec somme $f$ si pour tout $\epsilon > 0$, $\exists\, I_\epsilon$ fini tel que pour tout $J \supset I_\epsilon$, $J$ fini $\subset I$ on a: $\| \sum_{\alpha\in J} f_\alpha - f \| < \epsilon$.*

**Proposition 6.1** *1) Si $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ est sommable alors on a la condition (C): pour tout $\epsilon > 0$, $\exists\, I_\epsilon \subset I$, $I_\epsilon$ fini tel que $\| \sum_{\alpha\in K} f_\alpha \| < \epsilon$ dès que $K \cap I_\epsilon = \emptyset$ pour tout $K$ fini contenu dans $I$.*

*2) Si $E$ est complet alors (C) implique la sommabilité de $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$.*

*3) Si $f = \sum_{\alpha\in I} f_\alpha$ alors il existe $I_0 \subset I$, avec $I_0$ au plus dénombrable tel que $f_\alpha = 0$ si $\alpha$ n'appartient pas à $I_0$; si $\{\alpha_0, \alpha_1, ...\}$ est une énumération quelconque de $I_0$ alors $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_{\alpha_n}$.*

*4) Supposons que $f_\alpha = 0$ si $\alpha$ n'appartient pas à $I_0$, un ensemble au plus dénombrable. Si pour toute énumération $\{\alpha_0, \alpha_1, ...\}$ de $I_0$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_{\alpha_n}$ converge dans $E$ alors $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ est sommable et $f = \sum_{\alpha\in I} f_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} f_{\alpha_n}$.*

**Démonstration:**

1) Soit $f = \sum_{\alpha\in I} f_\alpha$:
Il existe alors $I_\epsilon$ fini tel que $\| f - \sum_{\alpha\in J} f_\alpha \| < \frac{\epsilon}{2}$ dès que $J \supset I_\epsilon$, avec $J$ fini.
Si $K \cap I_\epsilon = \emptyset$, $K$ fini alors:

$$\| \sum_{\alpha\in K} f_\alpha \| = \| \sum_{\alpha\in K\cup I_\epsilon} f_\alpha - \sum_{\alpha\in I_\epsilon} f_\alpha \| \leq$$

$$\leq \| \sum_{\alpha\in K\cup I_\epsilon} f_\alpha - f \| + \| f - \sum_{\alpha\in I_\epsilon} f_\alpha \| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

donc (C) est vérifiée.

2) Soit $E$ complet et (C) vérifiée alors il existe $I'_n$, fini tel que $\| \sum_{\alpha\in K} f_\alpha \| < \frac{1}{n}$, dès que $K \cap I'_n = \emptyset$, avec$K$ fini.
Posons $\overline{I_n} = I'_1 \cup ... \cup I'_n$, avec $I'_i \subset I'_j$ si $i < j$, $\overline{I_n}$ est fini et $I_0 = \cup_{n=1}^{\infty} \overline{I_n}$.
On a $\| \sum_{\alpha\in K} f_\alpha \| < \frac{1}{n}$ si $K \cap \overline{I_n} = \emptyset$, avec $K$ fini, et si $n < m$,

$$\| \sum_{\alpha\in\overline{I_m}} f_\alpha - \sum_{\alpha\in\overline{I_n}} f_\alpha \| = \| \sum_{\alpha\in\overline{I_m}\setminus\overline{I_n}} f_\alpha \| < \frac{1}{n}$$

donc $(\sum_{\alpha\in\overline{I_n}} f_\alpha)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy d'où

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{\alpha\in\overline{I_n}} f_\alpha = f \in E.$$

On montre que $\sum_{\alpha\in I} f_\alpha = f$:
Si $\epsilon > 0$ il existe $n_0$ tel que $\frac{1}{n_0} < \frac{\epsilon}{2}$, $\| f - \sum_{\alpha\in\overline{I}_{n_0}} f_\alpha \| < \frac{\epsilon}{2}$.
Si $J \supset \overline{I}_{n_0}$,$J$ fini:

$$\| \sum_{\alpha\in J} f_\alpha - f \| = \| \sum_{\alpha\in\overline{I}_{n_0}} f_\alpha + \sum_{\alpha\in J\setminus\overline{I}_{n_0}} f_\alpha - f \| \leq$$

$$\leq \| \sum_{\alpha\in\overline{I}_{n_0}} f_\alpha - f \| + \| \sum_{\alpha\in J\setminus\overline{I}_{n_0}} f_\alpha \| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

3) Si $f_\alpha \neq 0$ alors il existe $n$ entier tel que $\| f_\alpha \| > \frac{1}{n}$ d'où $\alpha \in \overline{I}_n$. Donc $\{\alpha \in I : f_\alpha \neq 0\} \subset \cup_{n=1}^{\infty} \overline{I}_n = I_0$ (on suppose que $I = I_0$).
Pour $\epsilon > 0$ $\exists$ $I_\epsilon$ fini tel que $\| f - \sum_{\alpha \in J} f_\alpha \| < \epsilon$ dès que $J \supset I\epsilon$, $J$ fini.
Soit $N$ tel que $\{\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_N\} \supset I_\epsilon$; alors $\{\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_N\} \supset I_\epsilon$ si $n \geq N$, $\| f - \sum_{j=0}^{n} f_{\alpha_j} \| < \epsilon$ si $n \geq N$.

4) Supposons $I = I_0$ dénombrable. On a que (C) est vérifiée car par l'absurde on aurait qu'ils existent $\epsilon > 0$, $K_1, K_2, ...$ finis, deux à deux disjoints tels que $\| \sum_{\alpha \in K_j} f_\alpha \| \geq \epsilon$, $j = 1, 2, ...$
Soit $L = I \setminus \cup_{j=1}^{\infty} K_j = \{\beta_1, \beta_2, ...\}$.
On fait une énumeration $\alpha_0, \alpha_1, ...$ de $I$ comme suit:
$K_1 \cup \beta_1 \cup K_2 \cup \beta_2 ...$ en respectant l'ordre; alors $\sum_{j=0}^{\infty} f_{\alpha_j}$ n'existe pas car:

$$\| S_{n_{j+1}} - S_{n_j} \| = \| \sum_{\alpha \in K_{j+1}} f_\alpha \| \geq \epsilon$$

(C) est donc vérifiée.
Il reste à montrer que $\sum_{\alpha \in I} f_\alpha$ existe et est égale à $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_{\alpha_n}$ où $\{\alpha_0, \alpha_1, ...\}$ est un énumération de $I = I_0$ dénombrable.
Suivant la démonstration de 2) on obtient une suite de parties finies $I_1 \subset I_2 \subset ...$, $I = \cup_{n=1}^{\infty} I_n$ avec

$$\| \sum_{\alpha \in K} f_\alpha \| < \frac{1}{n} \text{ si } K \cap I_n = \emptyset,\ K \text{ fini.}$$

Soit $\{\alpha_0, \alpha_1, ...\}$ l'énumération de $I$ associée à $I_1, I_2, ...$: i.e.
$I_1 = \{\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n_1 - 1}\}$, $I_2 = \{\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n_2 - 1}\}$, etc...
Puisque $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_{\alpha_n}$ existe on démontre comme dans 2) que $\sum_{\alpha \in I} f_\alpha = f$.

# Leçon 7

**Définition 7.1** *Soit $E$ un espace normé; si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $E$, alors on dit que $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est* absolument convergente *si*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \| f_n \| < \infty.$$

*Si $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ est une famille dans $E$ on dit que $\sum_{\alpha\in I} f_\alpha$ est* absolument sommable *si*

$$\sum_{\alpha\in I} \| f_\alpha \| < \infty.$$

**Proposition 7.1** *1. Si $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est absolument convergente alors*

$$(S_n)_{n\geq 0},\ S_n = f_0 + ... + f_n \text{ est une suite de Cauchy;}$$

*si $\sum_{n=0}^{\infty} f_{\sigma(n)} = f$ existe pour une permutation $\sigma$ $(\sigma : \mathbb{N} \longleftrightarrow \mathbb{N})$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \| f_n \| < \infty$ alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{\sigma(n)} = f \text{ pour toute permutation } \sigma.$$

*En particulier, si $E$ est complet, toute série absolument convergente est* commutativement convergente *dans le sens que $\sum_{n=0}^{\infty} f_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ pour toute permutation $\sigma$.*

*2. Si $E$ est complet et $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ est absolument sommable, alors $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ est sommable.*

*3. $E$ est complet si et seulement si toute série absolument convergente dans $E$ est convergente.*

**Remarque:** Pour une série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ dans $E$ normé ils existent quatre notions:
i) convergence
ii) convergence commutative
iii) sommabilité
iv) convergence absolue
Si $E$ est complet on a que:

$$iv) \Rightarrow i), ii) \text{ et } iii)$$
$$ii) \Leftrightarrow iii) \text{ et } ii) \Rightarrow i)$$
$$\text{Si } dimE < \infty \text{ alors } ii) \Rightarrow iv) \text{ et } iii) \Rightarrow iv)$$

**Théorème 7.1** *Dans tout espace normé de dimension infinie il existe une série commutativement convergente non absolument convergente.*

**Proposition 7.2** *Soit $M$ préhilbertien, $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ une famille orthogonale dans $M$. Si $\sum_{\alpha\in I} f_\alpha$ existe, alors*

$$\sum_{\alpha\in I} \| f_\alpha \|^2 < \infty \text{ et } \| \sum_{\alpha\in I} f_\alpha \|^2 = \sum_{\alpha\in I} \| f_\alpha \|^2.$$

*Si $M$ est complet, alors $\sum_{\alpha\in I} \| f_\alpha \|^2 < \infty$ implique que*

$$\sum_{\alpha\in I} f_\alpha \text{ existe.}$$

**Démonstration:**

Si $\sum_{\alpha\in I} f_\alpha = f$, $\exists\ I_0 \subset I$, $I_0$ fini, tel que $\| \sum_{\alpha\in K} f_\alpha \| < 1$ dès que $K \cap I_0 = \emptyset$, $K$ fini. Or

$$\| \sum_{\alpha\in K} f_\alpha \|^2 = \sum_{\alpha\in K} \| f_\alpha \|^2 < 1$$

$\sup_{K\subset I_0^C, K fini} \sum_{\alpha\in K} \| f_\alpha \|^2 = \sum_{\alpha\in I_0^C} \| f_\alpha \|^2 \leq 1 < \infty$ et donc

$$\sum_{\alpha\in I} \| f_\alpha \|^2 = \sum_{\alpha\in I_0^C} \| f_\alpha \|^2 + \sum_{\alpha\in I_0} \| f_\alpha \|^2 < \infty \text{ etc...}$$

Si M est complet et $\sum_{\alpha\in I} \| f_\alpha \|^2 < \infty$; alors il existe $I_\epsilon \subset I$, $I_\epsilon$ fini, tel que $\sum_{\alpha\in K} \| f_\alpha \|^2 < \epsilon^2$, avec $K \cap I_\epsilon = \emptyset$, $K$ fini.
Donc $\| \sum_{\alpha\in K} f_\alpha \| = (\sum_{\alpha\in K} \| f_\alpha \|^2)^{\frac{1}{2}} < \epsilon$, $K \cap I_\epsilon = \emptyset$, $K$ fini, d'où l'existence de $\sum_{\alpha\in I} f_\alpha$.
Soit $f = \sum_{\alpha\in I} f_\alpha$; alors

$$\begin{aligned} \| f \|^2 = \langle f, f\rangle = \langle \sum_{\alpha\in I} f_\alpha, f\rangle &= \sum_{\alpha\in I} \langle f_\alpha, f\rangle \\ = \sum_{\alpha\in I}\sum_{\beta\in I} \langle f_\alpha, f_\beta\rangle &= \sum_{\alpha\in I} \| f_\alpha \|^2 . \end{aligned}$$

□

**Proposition 7.3** *Si $\sum_{\alpha\in I} f_\alpha$ existe dans $M$ préhilbertien, alors*

$$\langle \sum_{\alpha\in I} f_\alpha, \phi\rangle = \sum_{\alpha\in I} \langle f_\alpha, \phi\rangle, \text{ pour tout } \phi \in M$$

*( De même pour les séries)*

*Si $\sum_{\alpha\in I} f_\alpha, \sum_{\alpha\in I} g_\alpha$ existent dans $E$ normé* *alors*

$$\sum_{\alpha\in I}(cf_\alpha + dg_\alpha)$$

*existe et*

$$\sum_{\alpha\in I}(cf_\alpha + dg_\alpha) = c\sum_{\alpha\in I} f_\alpha + d\sum_{\alpha\in I} g_\alpha.$$

**Proposition 7.4** *Caractérisation des bases orthonormales :*
*Soit $(\phi_\alpha)_{\alpha\in I}$ une famille orthonormale dans $E$ préhilbertien. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

1. *$(\phi_\alpha)_{\alpha\in I}$ est totale*
2. *$f = \sum_{\alpha\in I}\langle f, \phi_\alpha\rangle\phi_\alpha$, pour tout $f \in E$*
3. *égalité de Parseval:*

$$\langle f, g\rangle = \sum_{\alpha\in I}\langle f, \phi_\alpha\rangle\overline{\langle g, \phi_\alpha\rangle}, \textit{ pour tout } f, g \in E$$

4. *égalité de Bessel:*

$$\| f \|^2 = \sum_{\alpha\in I} | \langle f, \phi_\alpha\rangle |^2 \textit{ pour tout } f \in E$$

**Démonstration:**

"1 $\Rightarrow$ 2" : Puisque $(\phi_\alpha)_{\alpha\in I}$ est totale, pour tout $\epsilon > 0$, $\exists\, c_1, ..., c_n \in \mathbb{C}$, $\alpha_1, ..., \alpha_n \in I$ tels que

$$\| f - \sum_{j=1}^n c_j\phi_{\alpha_j} \| < \epsilon$$

alors

$$\| f - \sum_{j=1}^n\langle f, \phi_{\alpha_j}\rangle\phi_{\alpha_j} \| \leq \| f - \sum_{j=1}^n c_j\phi_{\alpha_j} \| < \epsilon$$

donc si $J \supset \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$, $J$ fini on a

$$\| f - \sum_{\alpha\in J}\langle f, \phi_\alpha\rangle\phi_\alpha \| \leq \| f - \sum_{j=1}^n\langle f, \phi_{\alpha_j}\rangle\phi_{\alpha_j} \| < \epsilon$$

donc $\sum_{\alpha\in I}\langle f, \phi_\alpha\rangle\phi_\alpha = f$

"2 $\Rightarrow$ 3" : $\langle f, g\rangle = \langle\sum_{\alpha\in I}\langle f, \phi_\alpha\rangle\phi_\alpha, g\rangle = \sum_{\alpha\in I}\langle f, \phi_\alpha\rangle\langle\phi_\alpha, g\rangle$
"3 $\Rightarrow$ 4" : Il suffit de prendre $f = g$
"4 $\Rightarrow$ 1" : Pour tout $\epsilon > 0\ \exists\, \alpha_1, ..., \alpha_n$ tels que

$$\sum_{j=1}^n | \langle f, \phi_{\alpha_j}\rangle |^2 \geq \| f \|^2 - \epsilon^2$$

alors

$$\| f - \sum_{j=1}^{n} \langle f, \phi_{\alpha_j} \rangle \phi_{\alpha_j} \|^2 = \| f \|^2 - \| \sum_{j=1}^{n} \langle f, \phi_{\alpha_j} \rangle \phi_{\alpha_j} \|^2$$

$$= \| f \|^2 - \sum_{j=1}^{n} | \langle f, \phi_{\alpha_j} \rangle |^2 \leq \epsilon^2$$

$\square$

**Définition 7.2** *Une famille* ON *(orthonormale)* $(\phi_\alpha)_{\alpha \in I}$ *dans* $E$ *préhilbertien qui est totale s'appelle une* base ON de E (ou base hilbertienne de E).
*Si* $(\phi_\alpha)_{\alpha \in I}$ *est une famille orthogonale de vecteurs non nuls, alors on appelle* $(\phi_\alpha)_{\alpha \in I}$ *une* base orthogonale de E *si* $(\psi_\alpha = \frac{\phi_\alpha}{\|\phi_\alpha\|})_{\alpha \in I}$ *est une famille orthonormale totale.*

**Remarque:** Si $(\phi_\alpha)_{\alpha \in I}$ est une base ON dans $E$ préhilbertien, alors $(\phi_\alpha)_{\alpha \in I}$ est *complet* dans le sens que si

$$\psi \perp \phi_\alpha \text{ pour tout } \alpha, \text{ alors } \psi = 0 \text{ (prop 7.4.2).}$$

La réciproque est vraie si $E$ est hilbertien (dans la suite).

**Proposition 7.5** *Toute espace préhilbertien séparable* $E$ *possède une base orthonormale. Soit* $(\phi_\alpha)_{\alpha \in I}$ *cette base, alors :*

1. *Si* $(c_\alpha)_{\alpha \in I} \subset \mathbb{C}, (c_\alpha \phi_\alpha)_{\alpha \in I}$ *est sommable, alors*

   $$\textstyle\sum_{\alpha \in I} | c_\alpha |^2 < \infty$$

   *et si* $f = \sum_{\alpha \in I} c_\alpha \phi_\alpha$*, alors*

   $$c_\alpha = \langle f, \phi_\alpha \rangle$$

2. *Si* $E$ *est complet et* $\sum_{\alpha \in I} | c_\alpha |^2 < \infty$*,* $c_\alpha \in \mathbb{C}$*, alors* $(c_\alpha \phi_\alpha)_{\alpha \in I}$ *est sommable et*

   $$f = \textstyle\sum_{\alpha \in I} c_\alpha \phi_\alpha \in E \text{ tel que } c_\alpha = \langle f, \phi_\alpha \rangle.$$

**Démonstration:**
Si $E$ est préhilbertien séparable, il existe une suite total de vecteurs $f_1, f_2, ...$ linéairement indépendents. Si $\phi_1, \phi_2, ...$ est la suite ON associée, alors $(\phi_n)_{n\geq 1}$ est une base ON.

□

**Remarque:** Tout espace hilbertien possède une base ON, ce qui en générale n'est pas vraie pour les espaces préhilbertiens.

# Leçon 9

**Proposition 9.1** *Soit* $T : E \longrightarrow E$, *$E$ préhilbertien, $T$ linéaire,* $T^2 = T$, *$T$ symétrique (auto-adjoint ou hermitien).*
*Alors il existe un unique $F \subset E$, $F$ avec $F$ sous-espace fermé de $E$ tel que $T = P_F$.*

**Démonstration:**

Posons $F = T(E)$, $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
Si $f \in E$ alors

$$T(f - Tf) = 0 \text{ car } T^2 = T$$

d'où pour tout $g \in E$

$$0 = \langle T(f - Tf), g\rangle = \langle f - Tf, Tg\rangle$$

c'est à dire

$$f - Tf \in F^{\perp} \;\Leftrightarrow\; Tf = P_F f.$$

Ainsi pour tout $f \in E$ il existe un unique $P_F f \in F$.
Donc F est fermé.

□

**Proposition 9.2** *Soit $E$ hilbertien, $F \subset E$ un sous-espace vectoriel, alors:*

1. *$F$ est fermé* $\Leftrightarrow$ $F \bigoplus F^{\perp} = E$.
2. *$F$ est fermé* $\Leftrightarrow$ $F^{\perp\perp} = F$.
3. $\overline{F} = E \;\Leftrightarrow\; F^{\perp} = \{0\}$.

**Démonstration:**
1. Si $F$ est fermé on a déjà vu que $F \bigoplus F^{\perp} = E$.
Soit $F \bigoplus F^{\perp} = E$ et $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset F$ avec $f_n \longrightarrow f$.
A voir que $f \in \overline{F}$: On écrit $f = g + h$ avec $g \in F$ et $h \in F^{\perp}$.
Si $\xi \in F^{\perp}$ on a

$$\langle f, \xi\rangle = \lim_{n \to \infty}\langle f_n, \xi\rangle = 0$$

d'où

$$0 = \langle f, h\rangle = \langle g, h\rangle + \| h \|^2 = \| h \|^2 \Rightarrow h = 0$$

et $f = g \in F$.

2. Si $(F^\perp)^\perp = F$ alors $F$ est fermé.
Si $F$ est fermé alors $F \bigoplus F^\perp = E$, $F$ et $F^\perp$ sont fermés d'où $F^\perp \bigoplus F^{\perp\perp} = E$ et $F = F^{\perp\perp}$.

3. On a $A^\perp = (\overline{A})^\perp$ pour toute partie $A$ de $E$.
Si $\overline{F} = E$ alors $F^\perp = (\overline{F})^\perp = E^\perp = \{0\}$. Si $F^\perp = \{0\}$ alors $\{0\} = F^\perp = (\overline{F})^\perp$ mais $E = \overline{F} \bigoplus (\overline{F})^\perp \;\Rightarrow\; E = \overline{F}$.

$\square$

**Corollaire 9.1** *1. Une partie $A \subset E$ hilbertien est total si et seulement si $A^\perp = \{0\}$.*

*2. Une famille orthonormale est totale si et seulement si elle est complète.*

**Démonstration:**
1. $A$ est totale $\Leftrightarrow$ $\overline{F} = E$ où $F =$ sous-espace vectoriel engendré par $A$. On a $A^\perp = F^\perp$ d'où

$$A^\perp = \{0\} \;\Leftrightarrow\; F^\perp = \{0\} \;\Leftrightarrow\; \overline{F} = E.$$

2. Soit $\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ON, si $\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ est totale alors $A = \{\phi_\alpha, \alpha \in I\}$ est tel que $A^\perp = \{0\}$ , c'est à dire que

$$\langle \phi, \phi_\alpha \rangle = 0 \text{ pour tout } \alpha \;\Rightarrow\; \phi = 0.$$

Donc $\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ est complète.
Inversement si $\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ est complète, alors $A^\perp = \{0\}$ où $A = \{\phi_\alpha, \alpha \in I\}$, d'où $A$ est totale.

$\square$

**Théorème 9.1** *de Fréchet-Riesz*
*( Caractérisation des fonctions linéaires continues sur un espace hilbertien ).*

1. *Pour tout $\xi \in E$ soit $u_\xi(f) = \langle f, \xi \rangle$, $f \in E$; alors $u_\xi$ est une fonctionelle linéaire continue dans $E$ avec* $\| u_\xi \| = \| \xi \|$.

2. *Si $u : E \to \mathbb{C}$ est linéaire et continue, alors il existe un unique élement $\xi \in E$ tel que $u = u_\xi$ avec $\| u \| = \| \xi \|$.*

**Remarque:** Si $E$ est hilbertien alors $E'$ est isométriquement isomorphe à $E$.

**Démonstration:**
1. L'application $f \longmapsto u_\xi(f)$ est linéaire et

$$| u_\xi(f) | = | \langle f, \xi \rangle | \leq \| \xi \| \| f \|$$

implique que $u_\xi(f)$ est continue et

$$\| u_\xi \| = \sup_{\|f\| \leq 1} | \langle f, \xi \rangle | \leq \| \xi \|$$

D'autre part si $\xi \neq 0$ et $f = \frac{\xi}{\|\xi\|}$ alors

$$u_\xi(f) = \langle \tfrac{\xi}{\|\xi\|}, \xi \rangle = \| \xi \|$$

d'où $\| u_\xi \| = \| \xi \|$

2. Soit $u : E \to \mathbb{C}$ une application linéaire et continue.
Posons $F = u^{-1}(0)$; $F$ est alors un sous-espace vectoriel fermé de $E$ (car $u$ est continue).
Si $F = E$, alors on prend

$$\xi = 0,\ u(f) = \langle f, 0 \rangle = 0 \text{ pour tout } f \in E.$$

Soit $F \neq E$; alors $F^\perp$ est de dimension 1.
En effet, soit $g \in F^\perp$, $\| g \| = 1$, $(u(g) \neq 0)$. Si $h \in F^\perp$ alors

$$u(h - \lambda g) = u(h) - \lambda u(g) = 0 \text{ si } \lambda = \tfrac{u(h)}{u(g)}$$

donc $h - \lambda g \in F \cap F^\perp$ d'où $h - \lambda g = 0$.
Puisque $E = F \bigoplus F^\perp$, pour tout $f \in E$ il existe alors $\lambda_f \in \mathbb{C}$ tel que $f = (f - \lambda_f g) + \lambda_f g$ avec $f - \lambda_f g \in F$ et $\lambda_f g \in F^\perp$.
Détermination de $\lambda_f$:

$$u(f - \lambda_f g) = 0 \ \Rightarrow \ \lambda_f = \tfrac{u(f)}{u(g)}$$

D'autre part $\lambda_f = \langle f, g\rangle$ (Petit théorème de Projection) car $\lambda_f g$ est la projection orthogonale de $f$ sur $F^\perp$.
C'est à dire que $u(f) = \langle f, g\rangle u(g)$ et donc

$$u(f) = \langle f, \overline{u(g)}g\rangle = \langle f, \xi\rangle \text{ pour tout } f \in E$$

Unicité: $\langle f, \xi\rangle = \langle f, \nu\rangle$ pour tout $f \in E$ implique que $\xi = \nu$.

□

# Leçon 10

## ESPACES DES FONCTIONS CONTINUES

Soit $X$ un espace métrique.
$C(X) = \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ continue }\}$.
On note $C(X,\mathbb{R})$ ou $C_{\mathbb{R}}(X)$ pour les $f \in C(X)$, $f$ réelle.
$C^b(X) = \{f \in C(X) : \| f \|_\infty = \sup_{x\in X} | f(x) | < \infty\}$
$C^b(X,\mathbb{R}) = \{f \in C(X,\mathbb{R}) : \| f \|_\infty = \sup_{x\in X} | f(x) | < \infty\}$
$C^b(X)$ et $C^b(X,\mathbb{R})$ sont des espaces de Banach.
Si $X$ est compact, $C(X) = C^b(X)$, $C(X,\mathbb{R}) = C^b(X,\mathbb{R})$.

**Théorème 10.1** *de Stone-Weierstrass (version réelle).*
*Soient $X$ un espace métrique compact et $\mathcal{A}$ un sous-algèbre de $C(X,\mathbb{R})$ ($f,g \in \mathcal{A} \Rightarrow f+g,\ f.g \in \mathcal{A},\ \alpha f \in \mathcal{A},\ \alpha \in \mathbb{R}$) telle que $1 \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{A}$ sépare les points de $X$*
*(pour tout $x, y \in X$, $x \neq y$, $\exists f \in \mathcal{A}$ tel que $f(x) \neq f(y)$).*
*Alors $\overline{\mathcal{A}} = C(X,\mathbb{R})$.*

*($\overline{\mathcal{A}}$= l'adhérence de $\mathcal{A}$ dans $C(X,\mathbb{R})$ muni de la norme uniforme).*

**Lemme 10.1** *(Weierstrass 1885)*
*Soit $f \in C[a,b]$ et $\epsilon > 0$ alors il existe un polynôme $P$ sur $[a,b]$ tel que*

$$\| f - P \|_\infty < \epsilon.$$

**Démonstration:**
On pose $a = 0$ et $b = 1$ et pour $0 \leq x \leq 1$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n f(\tfrac{k}{n}) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Pour $0 \leq x \leq 1$ on a les égalités suivantes

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$$

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx$$

et

$$\sum_{k=0}^n (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x).$$

$$\begin{aligned}
| f(x)-P_n(x) | &= | \sum_{k=0}^{n} f(x)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} | \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} | f(x)-f(\frac{k}{n}) | \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k:|k-nx|\leq n\delta} \dots + \sum_{k:|k-nx|>n\delta} \dots
\end{aligned}$$

$\delta$ petit, choisit en fonction de la continuite de $f$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\epsilon}{2} + 2 \parallel f \parallel_\infty \sum_{k:|k-nx|>n\delta} \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\frac{(k-nx)^2}{(k-nx)^2} \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{2 \parallel f \parallel_\infty}{n^2\delta^2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}(k-nx)^2 \\
&= \frac{\epsilon}{2} + \frac{2 \parallel f \parallel_\infty}{n^2\delta^2} nx(1-x) \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{2 \parallel f \parallel_\infty}{n^2\delta^2}\frac{n}{4} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\parallel f \parallel_\infty}{2\delta}\frac{1}{n} \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \text{si} \quad n > n_0
\end{aligned}$$

Si $a < b$ quelconque, $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ on pose:

$$\begin{aligned}
\theta : [0,1] &\to [a,b] \\
t &\longmapsto a + t(b-a).
\end{aligned}$$

Soit $g(t) = f(a + t(b-a))$, alors

$$g \in C([0,1]) \Leftrightarrow f \in C([a,b]);$$

il existe donc un polynôme $P$ tel que:

$$\sup_{0\leq t\leq 1} | g(t) - P(t) | < \epsilon$$

$$\sup_{0\leq t\leq 1} | f(a+t(b-a)) - P(t) | < \epsilon$$

$$\sup_{a\leq x\leq b} | f(x) - P(\tfrac{x-a}{b-a}) | < \epsilon,$$

où $P(\frac{x-a}{b-a})$ est un polynôme en $x$.

$\square$

**Lemme 10.2** *Si $f \in \mathcal{A}$ ou $\overline{\mathcal{A}}$ alors $| f | \in \overline{\mathcal{A}} =$ adhérence de $\mathcal{A}$ dans $C(X,\mathbb{R})$.*

**Démonstration:**
Si $a \leq f(x) \leq b$, $x \in X$, il existe un polynôme $P$ tel que

$$\sup_{a \leq y \leq b} \mid\, \mid y \mid - P(y) \mid < \epsilon$$

d'où

$$\sup_{x \in X} \mid\, \mid f(x) \mid - P(f(x)) \mid < \epsilon.$$

Puisque $P \circ f \in \mathcal{A}$ ou $\overline{\mathcal{A}}$, on a $\mid f \mid \in \overline{\mathcal{A}}$.

$\square$

**Lemme 10.3** *Si* $f, g \in \overline{\mathcal{A}}$ *alors* $\inf(f,g)$, $\sup(f,g) \in \overline{\mathcal{A}}$.

**Démonstration:**
On a $\inf(f,g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, $\sup(f,g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ et donc

$$\inf(f,g) = \tfrac{1}{2}\{f + g - \mid f - g \mid\} \in \overline{\mathcal{A}}$$

et

$$\sup(f,g) = \tfrac{1}{2}\{f + g + \mid f - g \mid\} \in \overline{\mathcal{A}}$$

car si $h \in \overline{\mathcal{A}}$ alors $\mid h \mid \in \overline{\mathcal{A}}$ (voir lemme 10.2).

$\square$

**Lemme 10.4** *Pour tout* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y \in X$ *avec* $x \neq y$ *il existe* $f \in \mathcal{A}$ *tel que* $f(x) = \alpha$ *et* $f(y) = \beta$.

**Démonstration:**
Il existe $g \in \mathcal{A}$ telle que $g(x) \neq g(y)$, on pose alors

$$f = \alpha + (\beta - \alpha)\tfrac{g - g(x)}{g(y) - g(x)} \in \mathcal{A}.$$

$\square$

**Démonstration du théorème de Stone-Weierstrass:**
Soient $h \in C(X, \mathbb{R})$ et $\epsilon > 0$. Soit $x \in X$; si $x \neq y$ il existe $f_{x,y} \in \mathcal{A}$ telle que

$$f_{x,y}(x) = h(x) \text{ et } f_{x,y}(y) = h(y).$$

Soit $V_y = \{t \in X : f_{x,y}(t) > h(t) - \epsilon\}$;
$V_y$ est ouvert et $x, y \in V_y$.
$\{V_y\}_{y \neq x}$ est alors un recouvrement par des ouverts de $X$.
Par compacité de $X$ ils existent

$$y_1, ..., y_n \neq x \text{ avec } X = V_{y_1} \cup ... \cup V_{y_n}.$$

On pose $f_x = max\{f_{x,y_1}, ..., f_{x,y_n}\} \in \overline{\mathcal{A}}$;

$$f_x(x) = h(x),\ f_x(t) > h(t) - \epsilon \text{ pour tout } t \in X.$$

On pose $W_x = \{t \in X : f_x(t) < h(t) + \epsilon\}$.
$W_x$ est ouvert et $x \in W_x$; $\{W_x\}_{x \in X}$ est un recouvrement par des ouverts de $X$.
Ils existent alors $x_1, ..., x_m$ tel que $X = W_{x_1} \cup ... \cup W_{x_m}$.
On pose $f = \min\{f_{x_1}, ..., f_{x_m}\} \in \overline{\mathcal{A}}$.
Pour tout $t \in X$ on a

$$f(t) < h(t) + \epsilon \text{ (car il existe } x_j \text{ tel que } t \in W_{x_j})$$

d'où

$$f_{x_j}(t) < h(t) + \epsilon \ \Rightarrow \ f(t) < h(t) + \epsilon.$$

Puisque chaque $f_{x_j}$ est tel que $f_{x_j}(t) > h(t) - \epsilon$ on a
$f(t) > h(t) - \epsilon$ pour tout $t \in X$ , i.e.:

$$h(t) - \epsilon < f(t) < h(t) + \epsilon \text{ pour tout } t \in X$$

et donc

$$| f(t) - h(t) | < \epsilon \text{ pour tout } t \in X.$$

Donc $\| f - h \|_\infty = \sup_{t \in X} | f(t) - h(t) | < \epsilon,\ f \in \overline{\mathcal{A}}$.

En particulier, $\exists\, f_n \in \mathcal{A},\ \| f_n - h \|_\infty < \frac{1}{n}$.
$f \in \overline{\mathcal{A}}, \exists g_n \in \mathcal{A}$ tel que $\| g_n - f \| \rightarrow 0$ et donc

$$\lim_{n \to \infty} \| g_n - h \|_\infty = \| f - h \|_\infty < \frac{\epsilon}{2}.$$

Donc pour tout $\epsilon > 0, \exists\, g \in \mathcal{A}$ avec

$$\| g - h \|_\infty < \epsilon.$$

□

**Théorème 10.2** *de Stone-Weierstrass (cas complexe)*
*Soit $X$ compact; soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $C(X)$ tel que $1 \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ sépare les points de $X$ et on suppose que $f \in \mathcal{A}$ implique $\overline{f} \in \mathcal{A}$, alors $\overline{\mathcal{A}} = C(X)$.*

**Démonstration:**
On note que

$$f \in \mathcal{A} \Leftrightarrow Ref, Imf \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}} \doteq \mathcal{A} \cap C(X, \mathbb{R})$$

car

$$Ref = \tfrac{1}{2}(f + \overline{f}),\ Imf = \tfrac{1}{2i}(f - \overline{f})$$

Puisque $\overline{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}} = C(X, \mathbb{R})$ on a le résultat car si $f \in C(X)$ alors

$$Ref \in \overline{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}} \text{ et } Imf \in \overline{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}},$$

d'où $f \in \overline{\mathcal{A}}$.

□

**Contre-exemple:**

Soit $X = \{z \in \mathbb{C} :\mid z \mid\leq 1\}$, $\mathcal{A}$ l'ensembles des polynômes sur $X$ en $z$.
$1 \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{A}$ sépare les points ($z_1 \neq z_2 \Rightarrow P(z_1) \neq P(z_2)$ si $P(z) = z$ ).
$\overline{\mathcal{A}} \subsetneqq C(X)$ car si $f \in \overline{\mathcal{A}}$, $f$ est holomorphe dans $\overset{o}{X}$.
On peut démontrer que

$$\overline{\mathcal{A}} = \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ holomorphe et continue dans } \overset{o}{X}\}.$$

Par exemple $f(z) = Re(z)$ ou $Imz$ ou $\mid z \mid \in C(X) \setminus \overline{\mathcal{A}}$.
Par contre, si $\mathcal{A}$ est l'ensemble des polynômes sur $X$ en $z$ et $\overline{z}$ alors $\overline{\mathcal{A}} = C(X)$.

# Leçon 11

**Corollaire 11.1** *1. Les polynômes en $x_1, ..., x_N$ forment une partie dense dans $C(X, \mathbb{R})$, $X \subset \mathbb{R}^N$ compact.*

*2. Les polynômes complexes en $z_1, ..., z_N$, $\overline{z}_1, ..., \overline{z}_N$ forment une partie dense dans $C(X)$, $X \subset \mathbb{C}^N$ compact.*

*3. Les polinômes complexes en $x_1, ..., x_N$ forment une partie dense dans $C(X)$, $X \subset \mathbb{R}^N$ compact.*
*Soient $x = (x_1, ..., x_N)$; $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$;*
*$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} ... x_N^{\alpha_N}$ et $\mid \alpha \mid = \alpha_1 + ... + \alpha_N$.*
*On écrit alors le polynôme complexe en $x_1, ..., x_2$ comme suit:*

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha x^\alpha,\ a_\alpha \in \mathbb{C} \text{ et } \overline{P}(x) = \sum_{|\alpha| \leq n} \overline{a}_\alpha x^\alpha.$$

*4. Soit $X = \Pi = \{z \in \mathbb{C} : \mid z \mid = 1\}$. Les fonctions*

$$\sum_{j=-n}^{n} a_j z^j,\ a_j \in \mathbb{C},\ n = 0, 1, 2, ...$$

$(z \in \Pi \ \Rightarrow\ \overline{z} = \frac{1}{z}\ (z = e^{i\theta},\ \overline{z} = e^{-i\theta} = \frac{1}{z}))$
*forment une partie dense de $C(X)$ $(\overline{\sum_{j=-n}^{n} a_j z^j} = \sum_{j=-n}^{n} \overline{a}_j \overline{z}^j)$.*

$C(\Pi) \sim C_{2\pi}(\mathbb{R})$ *=fonctions $2\pi$-périodique continues.*
$$C(\Pi) \ni f \ \rightarrow\ g(t) = f(e^{it}) \in C_{2\pi}(\mathbb{R}).$$

*5. L'espace de Banach $C(X)$, $X$ métrique compact, est séparable (par contre $C(\mathbb{R})$ n'est pas séparable).*

**Démonstration:**
4.Soit

$$C_{2\pi}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \ \rightarrow\ \mathbb{C} : f \text{ continue},\ f(x + 2\pi) = f(x), x \in \mathbb{R}\}$$

muni de la norme

$$\| f \|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} \mid f(x) \mid = \sup_{a \leq x \leq a+2\pi} \mid f(x) \mid < \infty.$$

Soit $\alpha : C(\Pi) \ \rightarrow\ C_{2\pi}(\mathbb{R})$ défini par

$$(\alpha f)(t) = f(e^{it}) \text{ pour } -\infty < t < \infty,$$

$\alpha$ est une bijection isométrique.
Donc si $g \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$, $\epsilon > 0$ il existe

$$P(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{itn} \text{ avec } a_n \in \mathbb{C}$$

tel que

$$\| f - P \|_\infty < \epsilon.$$

Si $g \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$, $g$ réelle, $\epsilon > 0$, il existe

$$Q(t) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{N}(\alpha_j \cos jt + \beta_j \sin jt),\ \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$$

tel que

$$\| g - Q \|_\infty < \epsilon.$$

En effet

$$| Re(g(t) - P(t)) | \leq | g(t) - P(t) | \leq \| g - P \|_\infty < \epsilon$$

et

$$\begin{aligned} Re\ P(t) &= \sum_{n=-N}^{N} Re(a_n e^{itn}) \\ (a_n = b_n + ic_n) \qquad &= \sum_{n=-N}^{N} (b_n \cos nt - c_n \sin nt) \\ &= \alpha_0 + \sum_{j=1}^{N}(\alpha_j \cos jt + \beta_j \sin jt). \end{aligned}$$

On conclut que $\{e^{itn}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $t \in [-\pi, \pi]$ est un ensemble total dans $C([-\pi,\pi])$, espace préhilbertien, c'est à dire que si $f \in C([-\pi,\pi])$, $\epsilon > 0$ alors il existe $P(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{itn}$ tel que

$$\| f - P \| = (\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} | f(t) - P(t) |^2 \, dt)^{\frac{1}{2}} < \epsilon.$$

En effet, il existe $g \in C([-\pi,\pi])$, $g(-\pi) = g(\pi) = 0$, tel que

$$\| f - g \| < \tfrac{\epsilon}{2}.$$

On considère $g \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ (prolongée $2\pi$-périodiquement), il existe $P$ tel que $\| g - P \|_\infty < \epsilon'$ et donc

$$\| g - P \|^2 = \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} | g(t) - P(t) |^2 \, dt < 2\pi\epsilon'^2$$

ce qui implique que

$$\| g - P \| < (2\pi)^{\frac{1}{2}} \epsilon' < \frac{\epsilon}{2}$$

d'où

$$\| f - P \| \leq \| f - g \| + \| g - P \| < \epsilon.$$

Donc $C([-\pi, \pi])$ est séparable (comme espace préhilbertien ainsi que comme espace de Banach).
On en déduit de même pour $C([a, b])$.

5.Soit $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une base dénombrable de la topologie de $X$ ($B(k_j, \frac{1}{k})$, $k = 1, 2, ..,$ $\{x_j\}$ dénombrable dense dans $X$).
On pose $h_n(t) = d(t, V_n^c)$, $h_n \in C(X)$, $h_n(t) = 0$ si $t \in V_n^c$.
Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre engendrèe par 1 et les $h_n$
($f \in \mathcal{A} \Leftrightarrow f = \sum a_{m_1 ... m_k} h_1^{m_1} ... h_k^{m_k}$, $m_1, ..., m_k$ entiers $\geq 0$) ).

$\mathcal{A}$ sépare les points de $X$ car si $x \neq y$, il existe $V_n$ tel que pour $x \in V_n$ et $y \in V_n^c$, alors $h_n(x) > 0$, $h_n(y) = 0$.
Si $f \in \mathcal{A}$ alors $\overline{f} \in \mathcal{A}$ car les $h_n$ sont réelles, $\mathcal{A}$ est dense dans $C(X)$.
On déduit que $f$ avec $a_{m_1}, ..., a_{m_1}$ rationnel forment un ensemble dense dans $C(X)$.

□

## THEORIE DES OPERATEURS LINEAIRES

Soit $E$ normé; on note $L(E)$ l'ensemble des opérateurs linéaires $u : E \to E$ tels que

$$\| u \| = \sup_{\|f\|\leq 1} \| uf \| < \infty.$$

Soit $E$ hilbertien; si $u \in L(E)$, on définit $u^\star$ l' *adjoint de* $u$ comme suit:

$$\langle uf, g\rangle = \langle f, u^\star g\rangle \text{ pour tout } f, g \in E.$$

En effet pour $g$ fixe l'application $f \mapsto \langle uf, g\rangle$ est linéaire et continue ($| \langle uf, g\rangle | \leq \| uf \| \, \| g \| \leq \| u \| \, \| g \| \, \| f \| = k \| f \|$).

Selon le théorème de Fréchet-Riesz, il existe $g^\star \in E$ tel que

$$\langle uf, g\rangle = \langle f, g^\star\rangle \text{ pour tout } f \in E.$$

On écrit $u^\star g = g^\star$.
Alors l'application $g \mapsto u^\star g$ est linéaire, car par exemple:

$$\begin{aligned}\langle f, u^\star(g_1 + g_2)\rangle &= \langle uf, g_1 + g_2\rangle = \langle uf, g_1\rangle + \langle uf, g_2\rangle \\ &= \langle f, u^\star g_1\rangle + \langle f, u^\star g_2\rangle \\ &= \langle f, u^\star g_1 + u^\star g_2\rangle \text{ pour tout } f \in E.\end{aligned}$$

d'où

$$u^\star(g_1 + g_2) = u^\star g_1 + u^\star g_2$$

de même

$$u^\star(tg) = t(u^\star g) \text{ pour tout } t \in \mathbb{C} \text{ et pour tout } g \in E.$$

De plus $\| u^\star \| = \| u \|$ car

$$\begin{aligned}\| u^\star \| = \sup_{\|g\|\leq 1} \| u^\star g \| &= \sup_{\|g\|\leq 1} \{ \sup_{\|f\|\leq 1} | \langle u^\star g, f\rangle |\} \\ &= \sup_{\|f\|\leq 1} \{ \sup_{\|g\|\leq 1} | \langle g, uf\rangle |\} \\ &= \sup_{\|f\|\leq 1} \| uf \| = \| u \| .\end{aligned}$$

**Proposition 11.1** *Soient $E$ hilbertien et $u, v \in L(E)$, $\star$ = conjugaison, alors:*

1. $(u+v)^\star = u^\star + v^\star$
2. $(\alpha u)^\star = \overline{\alpha} u^\star$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{C}$
3. $(u^\star)^\star = u$
4. *si* $I = id_E$, *alors* $I^\star = I$
5. $(uv)^\star = v^\star u^\star$
6. *si* $u^{-1} \in L(E)$, *alors* $(u^{-1})^\star = (u^\star)^{-1}$.

**Démonstration:**
5. Soient $f, g \in E$, on a

$$\langle f, (uv)^\star g\rangle = \langle uvf, g\rangle = \langle vf, u^\star g\rangle = \langle f, v^\star u^\star g\rangle$$

et donc

$$(uv)^\star g = v^\star u^\star g \text{ pour tout } g \in E$$

d'où $(uv)^\star = v^\star u^\star$.

6.On a $u^{-1}u = uu^{-1} = I$ donc

$$(u^{-1}u)^\star = (uu^{-1})^\star = I^\star = I$$

$$\text{et} \quad u^\star(u^{-1})^\star = (u^{-1})^\star u^\star = I;$$

donc $(u^\star)^{-1}$ existe et $(u^\star)^{-1} = (u^{-1})^\star$.

□

**Remarque:**
Soient $E, F$ deux espaces vectoriels et $u : E \to F$ linéaire. On a

$$u \text{ est injectif } \Leftrightarrow \ker u = u^{-1}\{0\} = \{f \in E : uf = 0\} = \{0\}$$

$u(E)$ est un sous-espace vectoriel de $F$; alors si $u$ est injective il existe une unique $u^{-1} : u(E) \to E$ linéaire tel que

$$u^{-1}g = f \;\Leftrightarrow\; uf = g.$$

On dit que ( si $E, F$ sont normés) $u^{-1} \in L(F, E)$ si $u(E) = F$ ($u$ est injective et surjectif) et $u^{-1} : F \longrightarrow E$ est continue.
Si $E, F$ sont de Banach et $u : E \longrightarrow F$ bijectif, $u \in L(E, F)$, alors $u^{-1} : F \longrightarrow E$ est continue ($u^{-1} \in L(F, E)$).

Plus généralement, si $E$ et $F$ sont de Banach et $u : E \longrightarrow F$ est linéaire, continue et surjective, alors $u$ est une application ouverte ($u(V)$ est ouvert dans $F$ si $V$ ouvert dans $E$).

Si $u : E \longrightarrow E$ linéaire, $E$ espace vectoriel, et si $v : E \longrightarrow E$ linéaire tel que $uv = vu = I$ ($I = id_E$), alors $v = u^{-1}$.
Si $dimE < \infty$,

$$u \text{ injectif } \Leftrightarrow u \text{ surjectif } \Leftrightarrow u \text{ bijectif.}$$

**Proposition 11.2** *Soient $E$ hilbertien et $u \in L(E)$, alors*

$$\| u^\star u \| = \| uu^\star \| = \| u \|^2 .$$

**Démonstration:**
On a

$$\| u^\star u \| \leq \| u^\star \| \, \| u \| = \| u \|^2$$

et

$$\begin{aligned} \| u \|^2 &= \sup_{\|f\| \leq 1} \| uf \|^2 = \sup_{\|f\| \leq 1} \langle uf, uf \rangle \\ &= \sup_{\|f\| \leq 1} \langle u^\star uf, f \rangle \\ &\leq \sup_{\|f\| \leq 1} \| u^\star uf \| = \| u^\star u \| . \end{aligned}$$

□

# Leçon 12

**Définition 12.1** *Soit $E$ un espace hilbertien et $u \in L(E)$, alors $u$ est dit:*
auto-adjoint *si* $u = u^\star$
normal *si* $uu^\star = u^\star u$
unitaire *si* $uu^\star = u^\star u = id_E$, $(u^\star = u^{-1})$.

*Si $E$ est préhilbertien et $u : E \longrightarrow E$ linéaire avec*

$$\langle uf, g\rangle = \langle f, ug\rangle \text{ pour tout } f, g \in E,$$

*alors $u$ est dit* symétrique.

**Définition 12.2** *Soit $E$ un espace préhilbertien et $u \in L(E)$, alors on a les définitions:*
$\rho(u) \doteqdot \{\lambda \in \mathbb{C} : (u-\lambda)^{-1} \in L(E)\}$ *s'appelle* l'ensemble résolvant de $u$ .$((u-\lambda)f = g \Leftrightarrow f = (u-\lambda)^{-1}g$ *si* $\lambda \in \rho(u))$.
$\sigma(u) \doteqdot \mathbb{C} \setminus \rho(u)$ *s'appelle le* spectre de $u$.
$\sigma_p(u) \doteqdot$ *ensemble des valeurs propres de $u$.*

**Remarque:** $\lambda \in \sigma(u)$ si et seulement si l'une des trois affirmations suivantes est vérifiée:
i) $(u-\lambda)$ n'est pas injectif.
ii) $(u-\lambda)$ est injectif mais non surjectif.
iii) $(u-\lambda)$ est bijectif mais $(u-\lambda)^{-1}$ n'est pas continu.

Si $E$ est hilbertien, iii) ne peut pas se présenter.

$$\lambda \in \sigma_p(u) \Leftrightarrow i) \text{ est vérifié } \Leftrightarrow \exists f \neq 0 \text{ avec } uf = \lambda f$$

de plus

$$(u-\lambda)^{-1}(0) = \ker(u-\lambda) = \{f \in E : uf = \lambda f\}$$

**Définition 12.3** *On définit*
$\nu(\lambda) =$ dim *de l'*espace propre de $u$ *associé à $\lambda$,*
*si* $\nu(\lambda) = 1$ *alors $\lambda$ est dite valeur propre* simple
*si* $\nu(\lambda) > 1$ *alors $\lambda$ est dite valeur propre* multiple *( dégénérée).*

**Remarque:**

$$\nu(\lambda) = \dim(u-\lambda)^{-1}(0) \geq 1 \Leftrightarrow \lambda \in \sigma_p(u)$$

On peut avoir que $\sigma_p(u) = \emptyset$ ou $\sigma_p(u) = \sigma(u)$, $\sigma(u)$ est toujours compact, non vide.
Si $E$ est hilbertien; $\sigma(u) \setminus \sigma_p(u) =$ *spectre continu* de $u$.

**Lemme 12.1** *(Série de Neumann)*
*Soient $E$ hilbertien, $u \in L(E)$, $\| u \| < 1$, alors $(1-u)^{-1} \in L(E)$ et*

$$(1-u)^{-1} = 1 + u + u^2 + ...$$

*De plus $\| (1 - u^{-1}) \| \leq \frac{1}{1-\|u\|}$.*

**Démonstration:**
Soit $f \in E$, alors

$$\sum_{n\geq 0} \| u^n f \| \leq \sum_{n\geq 0} \| u^n \| \| f \| \leq \sum_{n\geq 0} \| u \|^n \| f \|$$
$$= (\frac{1}{1-\| u \|}) \| f \|$$

donc on peut poser $vf = f + uf + u^2 f + ... \in E$.
$v : E \to E$ est linéaire et continu avec $\| vf \| \leq \frac{1}{1-\|u\|} \| f \|$ d'où $\| v \| \leq \frac{1}{1-\|u\|}$; donc $v \in L(E)$.
D'où on a
$(1-u)vf = (1-u)\sum_{n=0}^{\infty} u^n f = f$ pour tout $f \in E$
$v(1-u)f = vf - vuf = f$ pour tout $f \in E$
donc $v = (1-u)^{-1}$.

□

**Proposition 12.1** *Soit $E$ hilbertien et $u \in L(E)$.*
*Alors $\rho(u)$ est ouvert et $\sigma(u) \subset \{\lambda : | \lambda | \leq \| u \|\}$ est compact.*

**Démonstration:**
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $| \lambda | > \| u \|$, alors $\lambda \in \rho(u)$; en effet,

$$\lambda - u = \lambda(1 - \tfrac{u}{\lambda}),\ \| \tfrac{u}{\lambda} \| = \tfrac{\|u\|}{\lambda} < 1,$$

donc $(\lambda - u)^{-1} = \lambda^{-1}(1 - \frac{u}{\lambda})^{-1} \in L(E)$.
On a
$\{\lambda : | \lambda | > \| u \|\} \subset \rho(u) \Rightarrow \{\lambda : | \lambda | \leq \| u \|\} \supset \rho(u)^c = \sigma(u)$

$\rho(u)$ est ouvert: Soit $\lambda \in \rho(u)$, à voir l'existence de $\epsilon > 0$ tel qu'on a $\lambda + h \in \rho(u)$ si $| h | < \epsilon$.
On a $(\lambda + h - u) = (\lambda - u)[1 + h(\lambda - u)^{-1}]$.
Si $h \in \mathbb{C}$ tel que

$$\| h(\lambda - u)^{-1} \| = | h | \| (\lambda - u)^{-1} \| < 1$$

i.e. $\mid h \mid < \frac{1}{\|(\lambda-u)^{-1}\|} = \epsilon$ alors

$$[1 + h(\lambda - u)^{-1}]^{-1} \in L(E)$$

(à cause du lemme 12.1),
d'où $(\lambda + h - u)^{-1} = [1 + h(\lambda - u)^{-1}]^{-1}(\lambda - u)^{-1} \in L(E)$

$\square$

**Définition 12.4** *Pour tout $\lambda \in \rho(u) \subset \mathbb{C}$, l'opérateur $R(\lambda, u) \doteqdot (\lambda - u)^{-1}$ est dit: l'*opérateur résolvant *de $u$ en $\lambda$.*

**Remarque:** L'application $\lambda \longrightarrow R(\lambda, u)$, $\lambda \in \rho(u) \subset \mathbb{C}$ est analytique; $R(\lambda, u) \in L(E)$. Si $\sigma(u) = \emptyset$ alors $\rho(u) = \mathbb{C}$, et cette fonction analytique partout est bornée, alors d'après le théorème de Liouville $R(\lambda, u)$ est constante, ce qui est impossible, donc $\sigma(u) \neq \emptyset$.

**Définition 12.5** *Soient $E$ préhilbertien et $u : E \longrightarrow E$ linéaire tel que pour toute suite $(f_n)_{n\geq 0} \subset E$ avec $\sup_n \parallel f_n \parallel < \infty$ il existe une sous-suite $n_1 < n_2 < \ldots$ telle que $(uf_{n_k})_{k\geq 0}$ converge; alors l'opérateur $u$ est dit* compact *(ou complètement continu).*

**Remarque:**
i) $u$ compact $\Rightarrow$ continu
car si $\sup_{\|f\|\leq 1} \parallel uf \parallel = \infty$ on aurait $(uf_n)_{n\geq 0}$ tel que $\parallel f_n \parallel \leq 1$, $\sup_{n\geq 0} \parallel uf_n \parallel = \infty$ ce qui interdit l'existence d'une sous-suite de $(uf_n)_{n\geq 0}$ qui converge.
ii) $u$ est compact $\Leftrightarrow$ $\overline{u(B)}$ est compacte dans $E$ avec $B = \{f : \parallel f \parallel \leq 1\}$

**Proposition 12.2** *(Théorème spectrale pour les opérateurs compacts symétriques)*
*Soit $E$ préhilbertien, $u : E \longrightarrow E$ un opérateur symétrique compact non nul. Alors il existe une suite ON (finie ou infinie) $\phi_1, \phi_2, \ldots$ dans $E$, une suite de nombres réels non nuls $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ avec $\mid \lambda_0 \mid \geq \mid \lambda_1 \mid \geq \ldots > 0$ ayant les propriétées suivantes:*

1. *Chaque $\lambda_n$ est un valeur propre de $u$ avec $u\phi_n = \lambda_n \phi_n$; toutes les valeurs propres non nuls sont contenues dans les $\lambda_n$, si $\lambda \neq 0$ est un valeur propre de $u$, sa multiciplité est finie. Si $\lambda \neq \lambda'$ sont deux valeurs propres distinctes alors leurs vecteurs propres correspondants sont orthogonaux (si $u\phi = \lambda\phi, u\phi' = \lambda'\phi'$ alors $\langle \phi, \phi' \rangle = 0$).*

2. $| \lambda_0 | = \| u \|$; $\lambda_n \to 0$ *si la suite* $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ *est infinie.*

3. *Les* $(\phi_n)_{n\geq 0}$ *forment une base orthonormale pour* $u(E)$ *et*

$$uf = \textstyle\sum_{n\geq 0}\langle uf, \phi_n\rangle\phi_n = \sum_{n\geq 0}\lambda_n\langle f, \phi_n\rangle\phi_n \quad \forall f \in E.$$

4. *Si* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, \lambda_0, \lambda_1, ...\}$ *alors* $\lambda \in \rho(u)$ *et*

$$\begin{aligned} R(\lambda, u)f &= (\lambda - u)^{-1}f \\ &= \frac{1}{\lambda}f + \frac{1}{\lambda}\sum_{n\geq 0}\lambda_n\frac{\langle f, \phi_n\rangle}{\lambda - \lambda_n}\phi_n \text{ pour tout} f \in E \end{aligned}$$

*Donc* $\| R(\lambda, u) \| \leq \frac{M+1}{|\lambda|}$ *où* $M = \sup_{n\geq 0}\frac{|\lambda_n|}{|\lambda-\lambda_n|}$.

5. *Soit* $R = \overline{u(E)}$, *alors* $R^{\perp} = u^{-1}(0)$; *donc* $0$ *est un valeur propre de* $u \Leftrightarrow R^{\perp} \neq \{0\}$. $(\phi_n)_{n\geq 0}$ *est une base orthonormale pour* $E \Leftrightarrow u^{-1}(0) = \{0\}$

**Exemples d'opérateurs compacts:**

i) Si $u \in L(E)$ ($E$ préhilbertien) et $\dim u(E) < \infty$, on dit que $u$ est un opérateur de *rang fini* (rang $u = \dim u(E)$), alors $u$ est compact.

ii) Toute combinaison linéaire finie d'opérateurs compacts est compacte.

iii) Si $u \in L(E)$, $u$ compact, $v \in L(E)$ alors $uv, vu$ sont compacts.

iv) Si $u_n$ est compact pour tout $n \in \mathbb{N}$,$u \in L(E)$ et

$$\| u_n - u \| \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty,$$

alors $u$ est compact.

v) En particulier si $u = \lim_{n \to \infty} u_n$, $u_n$ de rang fini, alors $u$ est compact. Si $E$ est hilbertien, tout opérateur compact est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini.

# Leçon 13

**Lemme 13.1** *Soit $E$ préhilbertien et $u : E \to E$ linéaire. On pose* $\| u \| = \sup_{\{\|f\| \leq 1\}} \| uf \|$; $u \in L(E) \Leftrightarrow \| u \| < \infty$.

1. $\| u \| = \sup_{\{\|f\|=1\}} \| uf \| = \sup_{\{\|f\|=1, \|g\|=1\}} | \langle uf, g \rangle |$

2. *Soit $u$ symétrique et*

$$M(u) \doteqdot \sup_{\{\|f\|=1\}} \langle uf, f \rangle, \; m(u) \doteqdot \inf_{\{\|f\|=1\}} \langle uf, f \rangle$$

   *Alors* $\| u \| < \infty \Leftrightarrow M(u), m(u) < \infty$ *et*

$$\| u \| = \max(| m(u) |, | M(u) |).$$

3. *Si $u$ est symétrique, toute valeur propre $\lambda$ de $u$ est réelle et $\lambda \in [m(u), M(u)]$; si $\lambda \neq \mu$ sont deux valeurs propres de $u$ et $uf = \lambda f$, $ug = \mu g$ alors $\langle f, g \rangle = 0$.*

**Démonstration:**
1. Facile.
3. Si $uf = \lambda f$, $f \neq 0$ alors

$$\lambda \| f \|^2 = \langle uf, f \rangle = \langle f, uf \rangle = \langle f, \lambda f \rangle = \overline{\lambda} \| f \|^2$$

donc $\lambda = \overline{\lambda} \in \mathbb{R}$.
Si $\| f \| = 1$, $m(u) \leq \langle uf, f \rangle = \lambda \leq M(u)$

$$\lambda \langle f, g \rangle = \langle uf, g \rangle = \langle f, ug \rangle = \langle f, \mu g \rangle = \mu \langle f, g \rangle$$

$\Rightarrow \langle f, g \rangle = 0$ car $\lambda \neq \mu$.
2. On note que $\langle uf, f \rangle \in \mathbb{R}$ (car $\langle uf, f \rangle = \langle f, uf \rangle$).
Si $\| u \| < \infty$ alors

$$| \langle uf, f \rangle | \leq \| uf \| \| f \| \leq \| u \| \| f \|^2$$

d'où $\sup_{\{\|f\|=1\}} | \langle uf, f \rangle | \leq \| u \| \Rightarrow M(u), m(u) \in \mathbb{R}$ et

$$M \leq \| u \| < \infty \text{ où } M \doteqdot \max(| M(u) |, | m(u) |)$$

Si $M < \infty$ on démontre que $M = \| u \|$ (en démontrant que $\| u \| \leq M$).

On pose $F(f,g) \doteq \langle uf, g\rangle$ et $Q(f) \doteq F(f,f) = \langle uf, f\rangle$ alors on a

$$| Q(f) | \leq M \parallel f \parallel^2 \text{ pour tout } f \in E$$

(évident pour $\parallel f \parallel = 1$,...)
$F$ est une forme hermitienne; on a donc la formule de polarisation:

$$4F(f,g) = \{Q(f+g) - Q(f-g)\} + i\{Q(f+ig) - Q(f-ig)\}$$

d'où
$4ReF(f,g) = Q(f+g) - Q(f-g)$ et donc

$$\begin{aligned} | 4ReF(f,g) | &\leq M(\parallel f+g \parallel^2 + \parallel f-g \parallel^2) \\ &= 2M(\parallel f \parallel^2 + \parallel g \parallel^2) \end{aligned}$$

(grâce à la formule du parallélogramme), donc

$$| ReF(f,g) | \leq \tfrac{M}{2}(\parallel f \parallel^2 + \parallel g \parallel^2)$$

Pour $f, g$ fixes, on prend $\alpha \in \mathbb{C}$, $| \alpha |= 1$ tel que
$\alpha F(f,g) = F(\alpha f, g) = | F(f,g) |$ (à cause de 1.)
d'où

$$\begin{aligned} \parallel u \parallel &= \sup_{\{\parallel f \parallel = 1, \parallel g \parallel = 1\}} | \langle uf, g\rangle | \\ &= \sup_{\{\parallel f \parallel = 1, \parallel g \parallel = 1\}} | F(f,g) | \\ &\leq M \end{aligned}$$

On conclut que $M = \parallel u \parallel$.

□

**Lemme 13.2** *Soit $E$ préhilbertien et $u$ un opérateur symétrique compact non nul dans $E$. Alors $\exists$ un valeur propre $\lambda$ tel que $| \lambda | = \parallel u \parallel$, et un vecteur propre correspondant $\phi$ tel que $\parallel \phi \parallel = 1$, $u\phi = \lambda\phi$, et*

$$\parallel u \parallel = | \langle u\phi, \phi\rangle |= \sup_{\{\parallel f \parallel = 1\}} | \langle uf, f\rangle |.$$

**Démonstration:**
Il existe $f_n \in E$, $\parallel f_n \parallel = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$| \langle uf_n, f_n\rangle | \to \parallel u \parallel > 0 \text{ si } n \to \infty$$

En utilisant une sous-suite, si nécessaire, on peut supposer que $\lim_{n \to \infty}\langle uf_n, f_n\rangle = \lambda$ avec $\mid \lambda \mid = \parallel u \parallel$.
Alors

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \parallel uf_n - \lambda f_n \parallel^2 \\
&= \parallel uf_n \parallel^2 - 2\lambda\langle uf_n, f_n\rangle + \lambda^2 \parallel f_n \parallel^2 \quad (\parallel f_n \parallel = 1) \\
&\leq \parallel u \parallel^2 - 2\lambda\langle uf_n, f_n\rangle + \lambda^2 \ \longrightarrow \ 0 \text{ si } n \ \longrightarrow \ \infty \\
&= \lambda^2 - 2\lambda\langle uf_n, f_n\rangle
\end{aligned}
$$

Puisque $u$ est compact, il existe une sous-suite $(uf_{n_j})_{j\geq 1}$ qui converge donc $f_{n_j} \ \longrightarrow \ \phi$ si $j \ \longrightarrow \ \infty$ avec $\parallel \phi \parallel = 1$, donc

$$uf_{n_j} \ \longrightarrow \ u\phi \text{ et } uf_{n_j} \ \longrightarrow \ \lambda\phi,$$

ce qui implique que $u\phi = \lambda\phi$.

$\square$

**Démonstration du théorème spectrale:**
On pose $E_0 = E$, $u_0 = u$, $\lambda_0, \phi_0$ pour la valeur propre et le vecteur propre donné par le lemme 13.2; donc

$$0 < \mid \lambda_0 \mid = \parallel u \parallel, \ \parallel \phi_0 \parallel = 1, \ u\phi_0 = \lambda_0\phi_0.$$

On pose $E_1 = \{\phi_0\}^{\perp}$, alors $u(E_1) \subset E_1$ car si $f \in E_1$,

$$\langle uf, \phi_0\rangle = \langle f, u\phi_0\rangle = \lambda_0\langle f, \phi_0\rangle = 0$$

donc $uf \in E$ et $E_1$ est un sous-espace fermé.
On note $u_1 \doteqdot u \mid_{E_1}$; $u_1 : E_1 \ \longrightarrow \ E_1$ est symétrique et compact.
Si $u_1 = 0$ alors $uf_1 = 0$ pour tout $f_1 \in E_1 \ \Leftrightarrow$
$u(E) =$ sous-espace engendré par $\phi_0$ $(\forall f \in E, \ f = \alpha\phi_0 + f_1)$, alors rang $u = 1$.
Si $u_1 \neq 0$, $\exists \lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\phi_1 \in E_1, \parallel \phi_1 \parallel = 1, u\phi_1 = \lambda_1\phi_1$,
$\mid \lambda_1 \mid = \parallel u_1 \parallel$ donc $\mid \lambda_1 \mid = \parallel u_1 \parallel \leq \parallel u \parallel = \mid \lambda_0 \mid; \phi_1 \perp \phi_0$.
Par récurrence, on suppose que l'on a $\lambda_0, ..., \lambda_{n-1}$ (nombres réels) et $\phi_0, \phi_1, ..., \phi_{n-1}$ vecteurs orthonormaux tels que

$$
\begin{aligned}
\parallel u \parallel \ = \mid \lambda_0 \mid \geq \mid \lambda_1 \mid \geq ... \geq \mid \lambda_{n-1} \mid > 0 \\
u\phi_j = \lambda_j\phi_j, \ 0 \leq j \leq n-1.
\end{aligned}
$$

On pose $E_n = \{\phi_0, ..., \phi_{n-1}\}^{\perp}$, $u_n \doteqdot u \mid_{E_n}$, ($E_n$ sous-espace fermé) alors $u(E_n) \subset E_n$ et $u_n : E_n \ \longrightarrow \ E_n$ est symétrique compact.

Si $u_n = 0$ alors $u(E) =$ sous-espace engendré par $\phi_0, ..., \phi_{n-1}$ et rang $u = n$.
Si $u_n \neq 0 \, \forall n = 0, 1, ...$ alors on a $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (les $\phi_n$ sont orthonormaux) avec $u\phi_n = \lambda_n \phi_n$, $n \geq 0$ et

$$\| u \| = | \lambda_0 | \geq | \lambda_1 | \geq ... \geq | \lambda_{n-1} | > 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On démontre alors que $\lambda_n \longrightarrow 0$, sinon il existe $\epsilon > 0$ tel que $| \lambda_n | > \epsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\{\frac{\phi_n}{\lambda_n}\}_{n \geq 0}$ est une suite de vecteurs bornée ($\| \frac{\phi_n}{\lambda_n} \| < \frac{1}{\epsilon}$), avec $u(\frac{\phi_n}{\lambda_n}) = \phi_n$, qui ne possède aucune sous-suite convergente car $\| \phi_n - \phi_m \| = \sqrt{2}$ si $n \neq m$; en contradisant la compacité de $u$.
On démontre que si $f \in E$ alors

$$uf = \textstyle\sum_{n \geq 0} \langle uf, \phi_n \rangle \phi_n = \sum_{n \geq 0} \lambda_n \langle f, \phi_n \rangle \phi_n.$$

En effet, $f = \sum_{j=0}^{n-1} \langle f, \phi_j \rangle \phi_j + f_n$, $f_n \in \{\phi_0, ..., \phi_{n-1}\}^{\perp}$ donc

$$\| f \|^2 = \textstyle\sum_{j=0}^{n-1} | \langle f, \phi_j \rangle |^2 + \| f_n \|^2 \Rightarrow \| f_n \| \leq \| f \|;$$

de plus

$$\| uf_n \| = \| u_n f_n \| \leq \| u_n \| \| f \| = | \lambda_n | \, \| f \| \longrightarrow 0, \; n \longrightarrow \infty$$

d'où

$$uf = \textstyle\sum_{j=0}^{n-1} \langle f, \phi_j \rangle \lambda_j \phi_j + uf_n = \sum_{j=0}^{\infty} \langle f, \phi_j \rangle \lambda_j \phi_j$$

car $uf_n \longrightarrow 0$.

$\square$

# Leçon 14

**Démonstration** de la proposition 12.4. et 12.5. :
5. $u : E \to E$ linéaire, compact, symétrique, $E$ préhilbertien. On a vu que les valeurs propres $\lambda_n$ et les vecteurs propres $\phi_n$, $n \in \mathbb{N}$ sont tels que

$$|\lambda_0| = \| u \| \geq |\lambda_1| \geq ..., \ u\phi_n = \lambda_n \phi_n,$$

et $\{\phi_n\}_{n\geq 0}$ est un système orthonormale.
Pour tout $f \in E$ on a

$$uf = \sum_{n\geq 0} \langle uf, \phi_n\rangle \phi_n = \sum_{n\geq 0} \lambda_n \langle u, \phi_n\rangle \phi_n \ (*).$$

Soit $S =$ sous-espace linéaire fermé engendré par les $\phi_n$. Alors $S \subset R = \overline{u(E)}$ ( car $\phi_n \in u(E)$ ), d'autre part, de (*) $u(E) \subset S \Rightarrow \overline{u(E)} = R \subset S$. Donc $R = \overline{u(E)} = S$, à voir que $R^\perp = u^{-1}(0)$. On a

$$\begin{aligned} f \in u^{-1}(0) \ &\Leftrightarrow \ uf = 0 \ \Leftrightarrow \ \langle uf, g\rangle = 0 \ \forall g \in E \\ &\Leftrightarrow \ \langle f, ug\rangle = 0 \, \forall g \in E \ \Leftrightarrow \ f \in u(E)^\perp = R^\perp. \end{aligned}$$

Donc $\{\phi_n\}_{n\geq 0}$ est une suite orthonormale complète si et seulement si $S^\perp = \{0\} \ \Leftrightarrow \ u^{-1}(0) = \{0\} \ \Leftrightarrow$ 0 n'est pas valeur propre.

4. A montrer que si $\lambda$ n'appartient pas à $\{0, \lambda_0, \lambda_1, ...\}$ alors $\lambda \in \rho(u)$ i.e. $(\lambda - u)^{-1} \in L(E)$ et pour tout $f \in E$

$$(\lambda - u)^{-1} f = \tfrac{1}{\lambda} f + \tfrac{1}{\lambda} \sum_{n\geq 0} \lambda_n \tfrac{\langle f, \phi_n\rangle}{\lambda - \lambda_n} \phi_n \ .$$

Pour trouver $(\lambda - u)^{-1} f$ on procède comme suit:

$$(\lambda - u)^{-1} f = g \ \Leftrightarrow \ f = (\lambda - u) g = \lambda g - ug.$$

On a

$$g = \sum_{n\geq 0} c_n \phi_n + g_0, \quad g_0 \perp \phi_n \ \forall n, \ ug_0 = 0$$

et

$$f = \sum_{n\geq 0} \langle f, \phi_n\rangle \phi_n + f_0, \quad uf_0 = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\langle f,\phi_n\rangle\phi_n + f_0 &= \sum_{n\geq 0}\lambda c_n\phi_n + \lambda g_0 - \sum_{n\geq 0}\lambda_n c_n\phi_n\\ &= \sum_{n\geq 0}(\lambda-\lambda_n)c_n\phi_n + \lambda g_0.\end{aligned}$$

D'où $c_n = \frac{\langle f,\phi_n\rangle}{\lambda-\lambda_n}$, $g_0 = \frac{1}{\lambda}f_0 - \frac{1}{\lambda}(f - \sum_{n\geq 0}\langle f,\phi_n\rangle\phi_n)$

Donc

$$\begin{aligned}g &= \frac{1}{\lambda}(f - \sum_{\geq 0}\langle f,\phi_n\rangle\phi_n) + \sum_{n\geq 0}\frac{\langle f,\phi_n\rangle}{\lambda-\lambda_n}\phi_n\\ &= \frac{1}{\lambda}f + \sum_{n\geq 0}(-\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-\lambda_n})\langle f,\phi_n\rangle\phi_n.\end{aligned}$$

□

**Remarque 1:**
$0 \in \sigma(u)$ si $u : E \to E$, $\dim E = \infty$, est linéaire et compact car sinon $u^{-1} \in L(E)$ et $u^{-1}u = I$ serait compact ce qui est impossible: si $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite orthonormale, $\{I\phi_n = \phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ne possède pas de sous-suite convergente car

$$\| \phi_n - \phi_m \| = \sqrt{2},\ m \neq n.$$

**Remarque 2:**
On écrit la proposition comme suit:
Pour $u : E \to E, E$ hilbertien, $u$ compact, linéaire, symétrique. Soit $\mu_0, \mu_1, ...$ les valeurs propres non nulles distinctes de $u$. Soit $E_j$ le sous-espace propre associé à $\mu_j = \{f \in E : uf = \mu_j f\}$; $\dim E_j < \infty$; posons $P_j = P_{E_j}$. Alors

$$u = \textstyle\sum_{j\geq 0}\mu_j p_j \quad \text{(équivalent à (*))}$$

et

$$P_j f = \textstyle\sum_{i=1}^{N_j}\langle f,\psi_i^j\rangle\psi_i^j$$

si $\{\psi_i^j\}_{i=1}^{N_j}$ est une base ON de $E_j$.
Aussi, $E = Z \oplus E_0 \oplus E_1 \oplus ...$ où $Z = u^{-1}(0)$.
Si $u \in L(E)$, $u = u^\star$, alors on a

$$u = \textstyle\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\, dE_\lambda, \quad E_\lambda \text{ projection}$$

i.e.

$$\langle uf, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\langle E_\lambda f, g\rangle, \;\; \forall f, g \in E.$$

Ceci est le théorème spectral pour les opérateurs bornés.
Il est valable aussi pour les opérateurs $u = u^\star$ non continus (von Neumann-Stone 1930).

Si $u : E \;\longrightarrow\; E$ linéaire, $E$ hilbertien,

$$\langle uf, g\rangle = \langle f, ug\rangle \text{ pour tout } f, g \in E$$

alors $u \in L(E)$
(Théorème d'Hellinger-Toeplitz, voir Kreyszig p. 525)

On prend $u : D \;\longrightarrow\; E$, $D$ sous-espace vectoriel dense dans $E$, $u$ linéaire.

$$D^\star = \{g \in E : f \mapsto \langle uf, g\rangle, \; f \in D, \text{ est continue } \}$$

donc, si $g \in D^\star$, $\exists!\; g^\star \in E$, tel que $\langle uf, g\rangle = \langle f, g^\star\rangle$. On pose $g^\star = u^\star g$. Donc

$$u^\star : D^\star \;\longrightarrow\; E \text{ est linéaire.}$$

$u$ s'appelle auto-adjoint $\Leftrightarrow$ $u = u^\star$, i.e. $D^\star = D$ et pour tout $g \in D, ug = u^\star g$.
Si $u = u^\star$ alors $u$ est symétrique:

$$\langle uf, g\rangle = \langle f, ug\rangle \;\forall f, g \in D$$

Si $u$ est seulement symétrique, $\langle uf, g\rangle = \langle f, ug\rangle \;\forall f, g \in D$ alors $D \subset D^\star$ et $u^\star$ est un prolongement de $u$.
Il se pose alors la question du prolongement d'un opérateur symétrique.

# Leçon 16

## L'EQUATION D' ONDE

Soit $\Omega = [0,1] \times \mathbb{R}$; on considère l'équation d' onde:

$$(\rho(s)y_t(s,t))_t = (\gamma(s)y_s(s,t))_s \quad \forall (s,t) \in \Omega$$

où $\gamma(s), \rho(s) > c > 0 \ \forall s \in [0,1]$
(on suppose que $\gamma, \rho$ sont suffisamment lisses).

Soient les conditions de bord (C.B.)

$$\begin{aligned} y(0,t) &= 0, \ \ \forall t \in \mathbb{R} \\ y(1,t) &= 0, \ \ \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On cherche une solution, qu'on s'attend unique, pour les conditions initiales:

$$\begin{aligned} y(s,0) &= f(s), \ \ \forall s \in [0,1] \\ y_t(s,0) &= g(s), \ \ \forall s \in [0,1]. \end{aligned}$$

On utilise la méthode de la séparation des variables,

$$y(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(s) e^{i\lambda_n t}$$

d'où

$$\begin{aligned} y_t(s,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} i\lambda_n \phi_n(s) e^{i\lambda_n t} \\ y_{tt}(s,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} -\lambda_n^2 \phi_n(s) e^{i\lambda_n t}. \end{aligned}$$

L'équation d' onde est linéaire; donc si chaque terme est une solution (pour le moment on ne traite pas la convergence de cette série) la série sera aussi une solution (principe de superposition). Pour que chaque $\phi_n(s)e^{i\lambda_n t}$ soit une solution, les $\phi_n(s)$ doivent satisfaire l'équation de Helmholtz (plus les C.B.), i.e.:

**Equation de Helmholtz:** Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} -(\gamma(s)\phi_n'(s))' &= \mu_n \phi_n(s), \quad \forall s \in [0,1] \\ \phi_n(0) &= \phi_n(1) = 0 \end{aligned}$$

Elle implique que $\mu_n$ est réel avec $\mu_n > 0$ et $\mu_n = \lambda_n^2$, en effet:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 ((\gamma(s)\phi_n'(s))' + \mu\phi_n^2(s))ds \\ &= \int_0^1 (\mu\phi_n^2(s) - \gamma(s)\phi_n'(s)^2)ds. \end{aligned}$$

(on intégre par parties et on utilise les conditions de bord).

□

Formellement, l'idée est de trouver une suite $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ de valeurs propres réeles, une suite $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ de vecteurs propres associés complète, dans un espace hilbertien $H$ à définir.
Si la suite $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ est un système orthonormal complet dans $H$ on écrit alors:

$$\begin{aligned} y(s,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n^+ \phi_n(s) e^{i\sqrt{\mu_n}t} + c_n^- \phi_n(s) e^{-i\sqrt{\mu_n}t} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos\sqrt{\mu_n}t + b_n \sin\sqrt{\mu_n}t)\phi_n(s) \end{aligned}$$

où $a_n, b_n$ sont réels si $y(s,t)$ est réelle.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi_n$ satisfait les C.B., donc aussi $y(s,t)$; les coefficients $a_n, b_n$ sont déterminés de manière à satisfaire les conditions initiales sur $y(s,0)$ et $y_t(s,0)$ (on applique en $t = 0$).
Donc $f$ et $g$ peuvent s'exprimer comme suit:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(s) = f(s)$$

$$\text{et} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sqrt{\mu_n} \phi_n(s) = g(s).$$

Les coefficients $a_n$, respectivement $b_n\sqrt{\mu_n}$, sont les coefficients de Fourier de $f(s)$, respectivement de $g(s)$, par rapport à la base $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Est-ce que les $\phi_n(s)$ existent? Si oui, est-ce qu'ils forment un système complet? Içi, on peut appliquer le théorème spectral, pour les opérateurs symétriques et compacts, pour montrer que les réponses aux questions précédants sont affirmatives.

Soit

$$L^2_\rho([0,1]) = \{y : [0,1] \;\rightarrow\; \mathbb{R} : \int_0^1 |y(s)|^2 \rho(s) ds < \infty\}$$

muni du produit scalaire

$$\langle u, v\rangle = \int_0^1 u(s)v(s)\rho(s)ds \quad .$$

L'opérateur différentiel u, définit par

$$uy(s) = -\frac{(\gamma(s)y'(s))'}{\rho(s)} \quad (*)$$

n'est pas borné. On va montrer que $u^{-1}$ est un opérateur compact et symétrique.
On considère l'opérateur $K$ définit par

$$Kv(s) = \int_0^1 G(s,\sigma)v(\sigma)\rho(\sigma)d\sigma,$$

le noyau $G(s,\sigma)$ étant donné par la *fonction de Green*:

$$cG(s,\sigma) = \begin{cases} \int_0^s \frac{d\sigma}{\gamma(\sigma)} \int_\sigma^1 \frac{d\sigma}{\gamma(\sigma)} & \text{si } 0 \le s \le \sigma \le 1 \\ \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\gamma(\sigma)} \int_s^1 \frac{d\sigma}{\gamma(\sigma)} & \text{si } 0 \le \sigma \le s \le 1 \end{cases}$$

où $c = \int_0^1 \frac{d\sigma}{\gamma(\sigma)}$.

La fonction de Green est continue sur $[0,1] \times [0,1]$ et donc elle est carré-intégrable, i.e.:

$$\int_0^1 \int_0^1 G^2(s,\sigma)\rho(\sigma)\rho(s)d\sigma ds < \infty,$$

de plus le noyau est symétrique:

$$G(s,\sigma) = G(\sigma,s), \;\; \forall (s,\sigma) \in [0,1] \times [0,1].$$

Pour des résultats déjà obtenus précédemment, on conclut que $K$ est un opérateur d'Hilbert-Schmidt, et donc que $K$ est compact et symétrique de

$$L_\rho([0,1]) \;\rightarrow\; L_\rho([0,1]).$$

On discute, d'abord, la liaison entre $K$ et $u$, en démontrant que $K = u^{-1}$:
**Preuve:** Soit l'égalité

$$uy(s) = v(s), \ (*)$$

dont la solution générale est

$$y(s) = c_1 y_1(s) + c_2 y_2(s) + y_p(s)$$

où

$$y_1(s) = \int_0^s \frac{d\sigma}{\gamma(\sigma)}$$
$$y_2(s) = -\int_s^1 \frac{d\sigma}{\gamma(\sigma)}$$

sont deux solutions de l'équation homogène; le Wronskien ne s'annule jamais car

$$\int_0^1 \frac{d\sigma}{\gamma(\sigma)} = \gamma(s)W(s) = \gamma(s)(y_1(s)y_2'(s) - y_2(s)y_1'(s)) \neq 0$$

Il n'existe pas de solution non nulle à l'équation avec C.B. $u(0) = u(1) = 0$;on a que

$$y_p(s) = \int_0^s \frac{y_1(s)y_2(\sigma) - y_2(s)y_1(\sigma)}{\gamma(0)W(0)} v(\sigma)\rho(\sigma)d\sigma$$

est une solution particulière de l'équation inhomogène, en effet:

$$y_p'(s) = \int_0^s \frac{y_1'(s)y_2(\sigma) - y_2'(s)y_1(\sigma)}{\gamma(0)W(0)} v(\sigma)\rho(\sigma)d\sigma$$

et donc

$$\begin{aligned}(\gamma(s)y_p'(s))' &= \gamma(s)\frac{y_1'(s)y_2(s) - y_2'(s)y_1(s)}{\gamma(0)W(0)} v(s)\rho(s) \\ &\quad + \int_0^s \frac{(\gamma(s)y_1'(s))'y_2(\sigma) - (\gamma(s)y_2'(s))'y_1(\sigma)}{\gamma(0)W(0)} v(\sigma)\rho(\sigma)d\sigma \\ &= -\frac{\int_0^1 \frac{d\sigma}{\gamma(\sigma)}}{\gamma(0)W(0)}\rho(s)v(s) = -\rho(s)v(s)\end{aligned}$$

car les $y_i'(s), \ i = 1, 2$ sont les deux solutions de l'équation homogène.
On choisit les coefficients de façon à ce que $v$ soit continu et donc $y \in D(u)$, ce qui implique que $y$ satisfait les C.B.

Détermination des constantes:
On a que

$$y_1(0) = y_p(0) = y(0) = 0 \text{ et } y_2(0) = -\int_0^1 \frac{d\sigma}{\gamma(\sigma)}$$

par conséquence $c_2 = 0$. $c_1$ est alors donné par

$$\begin{aligned}
c_1 &= -\frac{y_p(1)}{y_1(1)} = -\frac{\int_0^1 \frac{y_1(1)y_2(\sigma)-y_2(1)y_1(\sigma)}{\gamma(0)W(0)} v(\sigma)\rho(\sigma)d\sigma}{y_1(1)} \\
&= -\frac{y_1(1)\int_0^1 \frac{y_2(\sigma)}{\gamma(0)W(0)} v(\sigma)\rho(\sigma)d\sigma + y_2(1)\int_0^1 \frac{y_1(\sigma)}{\gamma(0)W(0)} v(\sigma)\rho(\sigma)d\sigma}{y_1(1)} \\
&= -\int_0^1 \frac{y_2(\sigma)}{\gamma(0)W(0)} v(\sigma)\rho(\sigma)d\sigma.
\end{aligned}$$

La solution $y(s)$ devient

$$\begin{aligned}
y(s) &= c_1 y_1(s) + y_p(s) \\
&= -y_1(s)\int_0^1 \frac{y_2(\sigma)}{\gamma(0)W(0)} v(\sigma)\rho(\sigma)d\sigma \\
&\quad + \int_0^s \frac{y_1(s)y_2(\sigma) - y_2(s)y_1(\sigma)}{\gamma(0)W(0)} v(\sigma)\rho(\sigma)d\sigma \\
&= -y_1(s)\int_s^1 \frac{y_2(\sigma)}{\gamma(0)W(0)} v(\sigma)\rho(\sigma)d\sigma - \int_0^s \frac{y_2(s)y_1(\sigma)}{\gamma(0)W(0)} v(\sigma)\rho(\sigma)d\sigma \\
&= -\int_s^1 \frac{y_1(s)y_2(\sigma)}{\gamma(0)W(0)} v(\sigma)\rho(\sigma)d\sigma - \int_0^s \frac{y_2(s)y_1(\sigma)}{\gamma(0)W(0)} v(\sigma)\rho(\sigma)d\sigma \\
&= \int_s^1 \frac{\int_0^s \frac{dt}{\gamma(t)} \int_\sigma^1 \frac{dt}{\gamma(t)}}{\gamma(0)W(0)} v(\sigma)\rho(\sigma)d\sigma + \int_0^s \frac{\int_s^1 \frac{dt}{\gamma(t)} \int_0^\sigma \frac{dt}{\gamma(t)}}{\gamma(0)W(0)} v(\sigma)\rho(\sigma)d\sigma \\
&= \int_0^1 G(s,\sigma)v(\sigma)\rho(\sigma)d\sigma = Kv(s).
\end{aligned}$$

□

On doit vérifier que 0 n'appartient pas à $\sigma_p(K)$ pour montrer, a l'aide du théorème spectral, l'existence d'une suite $(\eta_n)_{n=1}^{\infty}$ de valeurs propres, et d'une suite $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ de vecteurs propres de $K$ qui soit une base orthogonale de $L_\rho([0,1])$.

**Preuve** de $0 \notin \sigma_p(K)$:
Soit $w$ un vecteur propre pour 0 tel que $w(0) = w(1) = 0$, on a alors que

$$Kw = 0,$$

et à cause de ce qu'on a vu dans la démonstration précédante, on a:

$$-\frac{(\gamma(s)(Kw(s))')'}{\rho(s)} = w(s) = 0, \quad \forall s \in [0,1]$$

i.e. 0 n'est pas valeur propre de $K$.

$\square$

En utilisant la forme intégrale explicite, il est possible de montrer que $\psi_n$ est une fonction lisse pour chaque $n$ et par conséquence pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a que

$$K\psi_n = \eta_n\psi_n \;\Leftrightarrow\; u\phi_n = \mu_n\phi_n$$

où $\psi_n = \phi_n$ et $\eta_n = \frac{1}{\mu_n}$.
En utilisant la forme intégrale explicite, il est possible de montrer que $\psi_n$ est une fonction lisse pour chaque $n$.

**1.2-3 Space $l^p$, Hilbert sequence space $l^2$, Hölder and Minkowski inequalities for sums.** Let $p \geqq 1$ be a fixed real number. By definition, each element in the space $l^p$ is a sequence $x = (\xi_j) = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$ of numbers such that $|\xi_1|^p + |\xi_2|^p + \cdots$ converges; thus

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p < \infty \qquad (p \geqq 1, \text{ fixed}) \tag{1}$$

and the metric is defined by

$$d(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^p\right)^{1/p} \tag{2}$$

where $y = (\eta_j)$ and $\sum |\eta_j|^p < \infty$. If we take only real sequences [satisfying (1)], we get the *real space* $l^p$, and if we take complex sequences [satisfying (1)], we get the *complex space* $l^p$. (Whenever the distinction is essential, we can indicate it by a subscript **R** or **C**, respectively.)

In the case $p = 2$ we have the famous *Hilbert sequence space* $l^2$ with metric defined by

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^2}. \tag{3}$$

This space was introduced and studied by D. Hilbert (1912) in connection with integral equations and is the earliest example of what is now called a *Hilbert space*. (We shall consider Hilbert spaces in great detail, starting in Chap. 3.)

We prove that $l^p$ is a ~~metric~~ normed space. Clearly, (2) satisfies (M1) to (M3) provided the series on the right converges. We shall prove that it does converge and that (M4) is satisfied. Proceeding stepwise, we shall derive

(*a*) an auxiliary inequality,
(*b*) the Hölder inequality from (*a*),
(*c*) the Minkowski inequality from (*b*),
(*d*) the triangle inequality (M4) from (*c*).

The details are as follows.

**(a)** Let $p > 1$ and define $q$ by $\quad \exists q$ 1.q ··

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{4}$$

$p$ and $q$ are then called **conjugate exponents.** This is a standard term. From (4) we have

$$1 = \frac{p+q}{pq}, \qquad pq = p + q, \qquad (p-1)(q-1) = 1. \tag{5}$$

Hence $1/(p-1) = q - 1$, so that

$$u = t^{p-1} \qquad \text{implies} \qquad t = u^{q-1}.$$

Let $\alpha$ and $\beta$ be any positive numbers. Since $\alpha\beta$ is the area of the rectangle in Fig. 5, we thus obtain by integration the inequality

$$(6) \qquad \alpha\beta \leqq \int_0^\alpha t^{p-1}\,dt + \int_0^\beta u^{q-1}\,du = \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}.$$

Note that this inequality is trivially true if $\alpha = 0$ or $\beta = 0$.

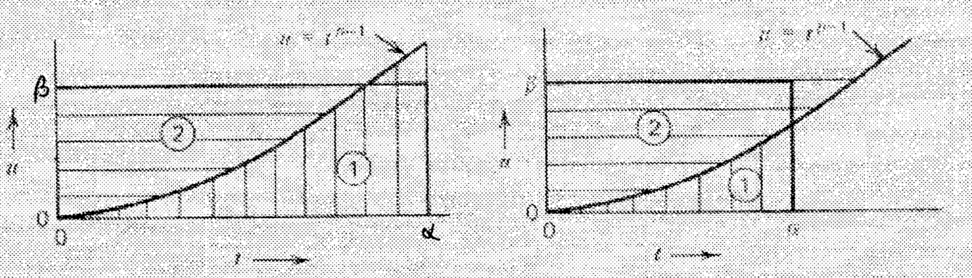



**Fig. 5.** Inequality (6), where ① corresponds to the first integral in (6) and ② to the second

**(b)** Let $(\tilde{\xi}_j)$ and $(\tilde{\eta}_j)$ be such that

$$(7) \qquad \sum |\tilde{\xi}_j|^p = 1, \qquad\qquad \sum |\tilde{\eta}_j|^q = 1.$$

Setting $\alpha = |\tilde{\xi}_j|$ and $\beta = |\tilde{\eta}_j|$, we have from (6) the inequality

$$|\tilde{\xi}_j \tilde{\eta}_j| \leqq \frac{1}{p} |\tilde{\xi}_j|^p + \frac{1}{q} |\tilde{\eta}_j|^q.$$

If we sum over $j$ and use (7) and (4), we obtain

$$(8) \qquad \sum |\tilde{\xi}_j \tilde{\eta}_j| \leqq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

We now take any nonzero $x = (\xi_j) \in l^p$ and $y = (\eta_j) \in l^q$ and set

$$(9) \qquad \tilde{\xi}_j = \frac{\xi_j}{\left(\sum |\xi_k|^p\right)^{1/p}}, \qquad\qquad \tilde{\eta}_j = \frac{\eta_j}{\left(\sum |\eta_m|^q\right)^{1/q}}.$$

Then (7) is satisfied, so that we may apply (8). Substituting (9) into (8) and multiplying the resulting inequality by the product of the denominators in (9), we arrive at the **Hölder inequality** *for sums*

$p < 1$ : pas de sens

$$\textbf{(10)} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j \eta_j| \leqq \left( \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^q \right)^{1/q}$$

where $\boxed{p > 1 \text{ and } 1/p + 1/q = 1}$. This inequality was given by O. Hölder (1889).

If $\boxed{p = 2, \text{ then } q = 2}$ and (10) yields the **Cauchy-Schwarz inequality** *for sums*

$$\textbf{(11)} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j \eta_j| \leqq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2} \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^2}.$$

It is too early to say much about this case $p = q = 2$ in which $p$ equals its conjugate $q$, but we want to make at least the brief remark that this case will play a particular role in some of our later chapters and lead to a space (a Hilbert space) which is "nicer" than spaces with $p \neq 2$.

**(c)** We now prove the **Minkowski inequality** *for sums*

$$\textbf{(12)} \qquad \left( \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j + \eta_j|^p \right)^{1/p} \leqq \left( \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^p \right)^{1/p} \qquad \nexists q$$

where $x = (\xi_j) \in l^p$ and $y = (\eta_j) \in l^p$, and $p \geqq 1$. For finite sums this inequality was given by H. Minkowski (1896).

For $p = 1$ the inequality follows readily from the triangle inequality for numbers. Let $p > 1$. To simplify the formulas we shall write $\xi_j + \eta_j = \omega_j$. The triangle inequality for numbers gives

$$\begin{aligned} |\omega_j|^p &= |\xi_j + \eta_j| \, |\omega_j|^{p-1} \\ &\leqq (|\xi_j| + |\eta_j|) |\omega_j|^{p-1}. \end{aligned}$$

Summing over $j$ from 1 to any fixed $n$, we obtain

$$(13) \qquad \sum |\omega_j|^p \leqq \sum |\xi_j| \, |\omega_j|^{p-1} + \sum |\eta_j| \, |\omega_j|^{p-1}.$$

To the first sum on the right we apply the Hölder inequality, finding

$$\sum |\xi_j| \, |\omega_j|^{p-1} \leqq \left[ \sum |\xi_k|^p \right]^{1/p} \left[ \sum (|\omega_m|^{p-1})^q \right]^{1/q}.$$

On the right we simply have

$$(p-1)q=p$$

because $pq=p+q$; see (5). Treating the last sum in (13) in a similar fashion, we obtain

$$\sum |\eta_i||\omega_i|^{p-1} \leqq \left[\sum |\eta_k|^p\right]^{1/p} \left[\sum |\omega_m|^p\right]^{1/q}.$$

Together,

$$\sum |\omega_i|^p \leqq \left\{\left[\sum |\xi_k|^p\right]^{1/p} + \left[\sum |\eta_k|^p\right]^{1/p}\right\}\left(\sum |\omega_m|^p\right)^{1/q}.$$

Dividing by the last factor on the right and noting that $1-1/q=1/p$, we obtain (12) with $n$ instead of $\infty$. We now let $n \longrightarrow \infty$. On the right this yields two series which converge because $x, y \in l^p$. Hence the series on the left also converges, and (12) is proved.

**(d)** From (12) it follows that for $x$ and $y$ in $l^p$ the series in (2) converges. (12) also yields the triangle inequality. In fact, taking any $x, y, z \in l^p$, writing $z=(\zeta_i)$ and using the triangle inequality for numbers and then (12), we obtain

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \left(\sum |\xi_i-\eta_i|^p\right)^{1/p} \\ &\leqq \left(\sum [|\xi_i-\zeta_i|+|\zeta_i-\eta_i|]^p\right)^{1/p} \\ &\leqq \left(\sum |\xi_i-\zeta_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum |\zeta_i-\eta_i|^p\right)^{1/p} \\ &= d(x, z)+d(z, y). \end{aligned}$$

This completes the proof that $l^p$ is a metric space. ∎

The inequalities (10) to (12) obtained in this proof are of general importance as indispensable tools in various theoretical and practical problems, and we shall apply them a number of times in our further work.

[This is a copy of *Introductory Functional Analysis with Applications*, by E. Kreyszig, Wiley, 1978, pages 11-15]

**Définition:** – <u>topologie</u>: – une topologie est un ensemble d'ensembles ouverts

– <u>espace vectoriel topologique</u>: – soit $E$ un $\mathbb{C}$-esp. vectoriel muni d'une topologie, alors $E$ est un E.V.T. si les 2 applications suivantes sont continues: i) $E\times E \to E$ ; $(f,g) \to f+g$ ii) $\mathbb{C}\times E \to E$ ; $(\lambda, f) \to \lambda\cdot f$

– <u>norme</u>: une norme est une application $E \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \|f\|$ t.q. i) $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$ $\forall f \in E$ ii) $\|f\| \geq 0$ $\forall f \in E$ iii) homogénéité: $\|\lambda\cdot f\| = |\lambda|\cdot\|f\|$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ iv) triangle: $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ $\forall f,g \in E$

– <u>semi-norme</u>: – une semi-norme est une norme qui ne satisfait pas i)

– <u>forme hermitienne</u>: – soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, alors une forme hermitienne est une application $F: E\times E \to \mathbb{C}$ t.q.
i) $f \mapsto F(f,g)$ linéaire pour $g$ fixe ii) $F(f,g) = \overline{F(g,f)}$

– <u>forme sesquilinéaire</u> – soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, alors une forme sesquilinéaire est une application $F: E\times E \to \mathbb{C}$ t.q.
i) $f \mapsto F(f,g)$ est linéaire ii) $g \mapsto F(f,g)$ est semi-linéaire

– <u>forme définie positive</u>: – soit $F$ une forme hermitienne, alors $F$ est définie positive si $\forall f \in E$ $\exists \varepsilon > 0$ t.q. $F(f,f) \geq \varepsilon\cdot\|f\|^2$

– <u>produit scalaire</u>: – un produit scalaire est une forme hermitienne strictement positive

– <u>espace métrique complet</u>: – un espace métrique $(M,d)$ est dit complet si toute suite de Cauchy converge dans $M$

– <u>espace de Banach</u>: – un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est dit de Banach si comme espace métrique il est complet

– <u>espace préhilbertien</u>: – un espace préhilbertien $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire

– <u>espace de Hilbert</u>: – un espace préhilbertien $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ est dit de Hilbert si comme espace métrique il est complet

**Remarque:** – <u>formes définies positive</u>: – si $\dim(V) < \infty$, alors strictement positive $\equiv$ définie positive, mais ce n'est pas vrai si $\dim V = \infty$.

– <u>formule de polarisation</u>: – soit $Q(f) = F(f,f)$, alors: $4\cdot F(f,g) = Q(f+g) - Q(f-g) + i\cdot\{Q(f+ig) - Q(f-ig)\}$

**Définition:** – <u>inégalité de Cauchy-Schwartz</u>: $\forall f,g \in E$ : $|\langle f|g\rangle|^2 \leq \langle f|f\rangle\cdot\langle g|g\rangle$, avec égalité ssi $f = \lambda\cdot g$ ou $f=0$ ou $g=0$.

– <u>espace $\ell^p, p\geq 0$</u>:

$$\begin{cases} 0<p<\infty : & \ell^p = \{x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \text{ t.q. } \sum_{j=0}^{\infty} |x_j|^p < \infty\} \\ p=0 : & \ell^0 = \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ p=\infty : & \ell^\infty = \{x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \text{ t.q. } \|x\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j| < \infty\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1\leq p<\infty : & \|x\|_p = \left(\sum_{j=0}^{\infty} |x_j|^p\right)^{1/p}, \; d_p(x,y) = \|x-y\|_p & : \text{espace de Banach, } p=2 : \text{Hilbert} \\ 0<p<1 : & d_p(x,y) = \sum_{j=0}^{\infty} |x_j - y_j|^p & : \text{espace métrique} \\ p=0 : & d_0(x,y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|x_j-y_j|}{1+|x_j-y_j|} & : \text{espace métrique} \end{cases}$$

**Lemme:** – $(\ell^p, d_p(x,y))$, $p \in [0,\infty]$ est un espace vectoriel topologique

**Remarque:** – <u>inégalités</u>: i) soit $a,b \geq 0$, $p \in ]0,\infty[$, alors: $(a+b)^p \leq 2^p\cdot(a^p + b^p)$
ii) soit $a,b \geq 0$, $p \in ]0,1[$, alors: $(a+b)^p \leq a^p + b^p$

**Définition:** – <u>inégalité de Minkowski</u>: $\left(\sum_{j=0}^{\infty} |x_j + y_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=0}^{\infty} |y_j|^p\right)^{1/p}$

**Introduction**: – but : distinguer les espaces de dimension $<\infty$ et de $\dim = \infty$ :

| $\dim(V) < \infty$ | $\dim(V) = \infty$ |
|---|---|
| $\mathbb{R}^n$ & $\mathbb{C}^n$ | suites $\begin{cases} (a_1, a_2, \dots) \\ \ell_p / \sum_{i=1}^{\infty} \lvert a_i \rvert^p < \infty \end{cases}$ |
| addition vectorielle : $\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \in \mathbb{R}^n \mapsto \underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{y}$ | fcts $\begin{cases} L_p / \quad u(s) : (a,b) \xrightarrow{\equiv [a,b]} \mathbb{C} \text{ p.p.} \\ \int_a^b \lvert u(s) \rvert^p ds < \infty \end{cases}$ |
| mult. scalaire : $\lambda, \underset{\sim}{x} \mapsto \lambda \cdot \underset{\sim}{x}$ | $\begin{cases} C^0([a,b]) \text{ fct. continues} \\ C^1([a,b]) \quad '' \\ C^2([a,b]) \quad '' \end{cases}$ |

**Remarque** : – soit un espace de dimension infinie, alors est-ce que on a un espace vectoriel topologique (E.V.T.) si les applications $\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \mapsto \underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{y}$ et $\lambda, \underset{\sim}{x} \mapsto \lambda \cdot \underset{\sim}{x}$ sont continues ?

**Définition** : – métrique : $d(x,y)$ ; $\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \mapsto \mathbb{R}$, par exemple $d(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}) = \max_i \lvert x_i - y_i \rvert$, $\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \in \mathbb{R}^n$ → esp. métrique si $\dim = \infty$

– norme : $\underset{\sim}{x} \mapsto \lVert \underset{\sim}{x} \rVert$, $p > 1$, p.ex. : $\lVert x \rVert = \left( \sum_{i=1}^n \lvert x_i \rvert^p \right)^{1/p} \longrightarrow \dim = \infty$ : esp. banach

– produit scalaire : $\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \mapsto \langle \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \rangle \in \mathbb{R}$, p.ex. : $\langle \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \rangle = x^t \cdot y \to \dim = \infty$ : esp Hilbert

– espace complet : – un espace est dit complet si $\forall$ suite de Cauchy a une limite dans cet espace. i.e. $\{x_i\}$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists M$ t.q. $\lVert x_i - x_j \rVert < \varepsilon$ $\forall i,j \geq M$

**Remarque** : – bases :

| $\dim(V) < \infty$ | | $\dim(V) = \infty$ |
|---|---|---|
| Base orthonormale<br>ex : base canonique $e_i$ | $\longleftrightarrow$ | Espace séparable |
| Soit $A = A^t$ matrice $n \times n$<br>$a_{ij} \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists$ n vecteurs propres et n val. propres de $A$ :<br>$A\xi_i = \lambda_i \cdot \xi_i$<br>$\{\xi_i\}$ base orthonormale | $\longleftrightarrow$ | Théorème spectral<br>(thm. de spectre) |

**Définition** : E.V.T. : soit $E$ un esp. vect. sur $\mathbb{C}$ muni d'une topologie (ensemble d'ensembles ouverts ; $B_i$ boules, alors : $\cap B_i$ ouvert), alors $E$ est un espace vectoriel topologique EVT si :

i) $E \times E \to E$ ; $(f,g) \mapsto f+g$
ii) $\mathbb{C} \times E \to E$ ; $(\lambda, f) \mapsto \lambda \cdot f$

} continu

**Définition** : – norme : $E \to \mathbb{R}$, $f \to \lVert f \rVert$ t.q.

i) $\lVert f \rVert = \overset{\in \mathbb{R}}{0} \iff f = 0 \quad \forall f \in E$
ii) $\lVert f \rVert \geq 0 \quad \forall f \in E$
iii) homogénéité : $\lVert \lambda \cdot f \rVert = \lvert \lambda \rvert \cdot \lVert f \rVert \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$
iv) triangle : $\lVert f + g \rVert \leq \lVert f \rVert + \lVert g \rVert \quad \forall f, g \in E$

**Exemple** : – dans $\mathbb{C}^n$ : $\lVert \underset{\sim}{x} \rVert = \left( \sum_{i=1}^n \lvert x_i \rvert^p \right)^{1/p}$, $p > 1$, $x_i \in \mathbb{C}$ $\forall i$

**Définition** : – semi-norme : $E \to \mathbb{R}$, $f \to \lVert f \rVert$ t.q. ii), iii), iv) satisfaits mais pas i), i.e. $\lVert f - g \rVert = 0$ et $f \neq g$.

**Remarque** : – soit $E$ un espace normé, alors :

a) Si : $(f_n, g_n) \in E \times E$ t.q. $(f_n, g_n) \to (f, g)$, alors : $f_n + g_n \to f + g$
b) Si : $(\lambda_n, f_n) \to (\lambda, f)$, alors : $\lambda_n \cdot f_n \to \lambda \cdot f$

– c'est-à-dire si la topologie est donnée par la norme, alors un espace vectoriel est un espace vectoriel topologique.

**Preuve** : a) $\lVert (f_n + g_n) - (f + g) \rVert \leq \lVert f_n - f \rVert + \lVert g_n - g \rVert \xrightarrow{\text{par déf. et par la continuité}} 0 \Rightarrow f_n + g_n \to f + g$ #

b) 
$$\begin{aligned} \lVert \lambda_n f_n - \lambda f \rVert &= \lVert \lambda_n f_n - \lambda_n f + \lambda_n f - \lambda \cdot f \rVert \\ &\overset{\text{triangle}}{\leq} \lVert \lambda_n f_n - \lambda_n f \rVert + \lVert -\lambda \cdot f + \lambda_n \cdot f \rVert \\ &= \underset{<\infty}{\lambda_n} \underbrace{\lVert f_n - f \rVert}_{\to 0} + \underbrace{\lvert \lambda_n - \lambda \rvert}_{\to 0} \cdot \lVert f \rVert \\ &\longrightarrow 0 \Rightarrow \lambda_n f_n \to \lambda \cdot f \quad \# \end{aligned}$$

ceci car : $M = \sup_{n \geq 0} \lvert \lambda_n \rvert$, $M < \infty$ car $\lambda_n \to \lambda$

**Définition** : – espace préhilbertien : il s'agit d'un espace hilbertien sans forcément avoir la complétude. Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, soit une forme hermitienne $F : E \times E \to \mathbb{C}$, i.e.

i) $f \to F(f,g)$ linéaire $\forall g \in E$, $g$ fixe
ii) $F(f,g) = \overline{F(g,f)}$

**Remarque** : – propriétés des formes hermitiennes : $F(f,f) \in \mathbb{R}$ ; $F(f, \lambda g) = \bar{\lambda} \cdot F(f,g)$ ; $F(\lambda \cdot f, g) = \lambda F(f,g)$

**Exemple** : pour $f, g \in L^2[a,b]$, alors : $\boxed{F(f,g) = \int_a^b \sigma(s) \cdot f(s) \cdot \bar{g}(s)\, ds}$, $\sigma(s) : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(s), g(s) : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\sigma(s) \leq M$

**Remarque**: $F(f,g)$ hermitienne est : $\begin{cases} \text{positive} : & F(f,f) \geq 0 \\ \text{strictement positive} : & F(f,f) > 0 \\ \text{définie positive} : & \forall f \in E \; ; \exists \varepsilon > 0 \text{ t.q. } F(f,f) \geq \varepsilon \cdot \|f\|^2 \end{cases}$

- Si $\dim V < \infty$, alors : strictement positive $\equiv$ définie positive, mais ce n'est pas vrai si $\dim V = \infty$

**Définition** : – <u>produit scalaire</u> : forme hermitienne strictement positive (P.S.)
– <u>espace préhilbertien</u> : E.V. muni d'un P.S.

**Lemme** : – <u>forme sesquilinéaire</u> :

i) $$F\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \cdot f_j \, , \sum_{k=1}^{n} \mu_k \cdot g_k\right) = \sum_{\substack{j=1,m \\ k=1,n}} \lambda_j \cdot \overline{\mu_k} \cdot F(f_j, g_k)$$

ii) Formule de polarisation : soit $Q(f) = F(f,f)$, alors :
$$4 \cdot F(f,g) = \sum_{k=0}^{3} i^k \cdot Q(f + i^k \cdot g)$$

**Preuve** : i) : immédiat : développer, ii) développer l'expression de droite en sachant que $F$ est une forme sesquilinéaire : cf. exercices.

**Remarque** : – le cas réel de ii) s'écrit : $4 \cdot x \cdot y = (x+y)^2 - (x-y)^2$

**Corollaire** : i) $F_1, F_2$ 2 formes sesquilinéaires t.q. $F_1(f,f) = F_2(f,f) \implies F_1 = F_2 \quad \forall f \in E$ (Preuve : avec la formule de polarisation : $Q_1 = Q_2 \implies F_1 = F_2$)
ii) $F$ sesquilinéaire, $F(f,f) \in \mathbb{R} \implies F$ hermitienne : $F(f,g) = \overline{F(g,f)}$

**Preuve** : ii) Soit les définitions : $F_1(f,g) = F(f,g)$ ; $F_2(f,g) = \overline{F(g,f)}$, alors : $F_1(f,f) = F(f,f)$ (1) et : $F_2(f,f) = \overline{F(f,f)}$ (2). Supposons que $F(f,f) \in \mathbb{R}$, alors $\overline{F(f,f)} = F(f,f)$, donc (1) = (2) $\implies$ $F_1(f,f) = F_2(f,f) \iff Q_1(f) = Q_2(f) \implies$ <u>avec</u> la formule de polarisation (i.e. le corollaire i)) on obtient que $F_1 = F_2$, donc : $F(f,g) = \overline{F(g,f)}$.

**Proposition** : – soit $F$ une forme hermitienne positive, soit $Q(f) = F(f,f)$, alors : $\forall f,g \in E$ :
i) inégalité de Cauchy-Schwartz : $\boxed{|F(f,g)|^2 \leq Q(f) \cdot Q(g)}$
ii) inégalité du triangle : $\boxed{N(f+g) \leq N(f) + N(g)}$ ; $N(\cdot) := \|\cdot\|$

**Preuve** : de i) : $0 \leq Q(f + \lambda \cdot g) = F(f + \lambda \cdot g, f + \lambda \cdot g) = Q(f) + \overline{\lambda} \cdot F(f,g) + \lambda \cdot F(g,f) + Q(g)$
$= Q(f) + \mathrm{Re}\, \lambda \cdot (F(f,g) + F(g,f)) + \mathrm{Im}\, \lambda \cdot (-i \cdot \mathrm{im}\, F(f,g) + i \cdot \mathrm{im}\, F(g,f)) + \ldots$
On obtient : $0 \leq e + a \cdot t + b \cdot s + c \cdot t^2 + d \cdot s^2$, à maximiser vis-à-vis de $s$ et $t$ :
$\nabla(\text{expr.}) = \begin{pmatrix} a + 2c \\ b + 2d \end{pmatrix} = 0 \implies$ choix de $\lambda = -\frac{F(f,g)}{Q(f)}$ dans la démonstration.

**Remarque** : – on a avec la formule de Cauchy-Schwartz, si $Q(g) = 0$, $g \neq 0$, alors $F(f,g) = 0$

**Notation** : – soit $F$ <u>hermitienne et strictement positive</u>, alors on va noter $F(f,g) = \langle f,g \rangle$.
Par exemple dans $\mathbb{R}^n$ : $\langle f,g \rangle = f^t \cdot A \cdot g$ t.q. $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $A = A^t$ t.q. $\lambda_i > 0 \; \forall i = 1,\ldots,n$.

**Définition** : – <u>espace hilbertien</u> : – un espace préhilbertien est dit de Hilbert si toute suite de Cauchy converge dans cet espace.

**Proposition** : – soit $E$ préhilbertien, alors il s'agit d'un espace normé avec $\|f\| = \sqrt{\langle f|f \rangle}$

pour avoir un esp. de Hilbert, la norme doit être celle induite par le P.S.

**Preuve** : – il faut vérifier les propriétés de la norme :
1) $\|f\| = 0 \implies f = 0$ p.p.
2) $\|f\| \geq 0$
3) $\|\lambda \cdot f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$ (homogénéité) de degré 1

**Exemple** : – $\ell^2 = \{ x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ t.q. } \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \}$ avec $\langle x|y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot \overline{y_n}$. On doit encore vérifier que $\langle x|y \rangle < \infty$, ce qui se fait en remarquant que : $(x-y)^2 \geq 0$
$\implies \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \geq x \cdot y \implies |\langle x|y \rangle| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot \overline{y_n}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |x_n \cdot \overline{y_n}| \leq \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (|x_n|^2 + |y_n|^2) < \infty$

**Exemples** : – <u>espaces préhilbertiens</u> : $\ell^p$ ; $\ell^0$ : $\ell^2 \equiv$ espace de Hilbert

**Lemme** : $(a+b)^p \leq 2^p \cdot (a^p + b^p) \quad \forall a,b > 0$ ; $p \in \,]0,\infty[$

**Preuve** : $(a+b) \leq 2 \cdot \max(a,b) \implies (a+b)^p \leq 2^p \cdot \max(a,b)^p \leq 2^p \cdot (a^p + b^p)$

**Question** : – est-ce que $\ell^p$ est un espace vectoriel ? $x \in \ell^p$, $y \in \ell^p \implies (x+y) \overset{?}{\in} \ell^p$. On a :
$\underset{\text{dans } \ell^p}{(x+y)} := x_i \underset{\text{dans } \mathbb{C}}{+} y_i$ ce qui est une définition de l'opération +.

- mais la question est de savoir si $w_i = x_i + y_i \in \ell^p$. Avec $(a+b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)$, on trouve que $w_i \leq 2^p \cdot (x_i^p + y_i^p) < \infty$ car $x, y \in \ell^p$. #
- pour $p = \infty$, on a bien que $\|w\|_\infty = \sup_{j \in \mathbb{N}} |\underbrace{x_i}_{<\infty} + \underbrace{y_i}_{<\infty}| < \infty \Rightarrow$ bonne définition.
- on remarque que : $0 < p < 1$ : $d_p(x,y) = \sum_{j=0}^{\infty} |x_j - y_j|^p$ : ne satisfait pas l'homogénéité
  $p = 0$ : inég. $\Delta$ pas vérifiée.

$\Rightarrow \ell^p$ est un espace vectoriel

- justification de :
$$d_0(x,y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \underbrace{\frac{|x_i - x_j|}{1 + |x_i - x_j|}}_{\text{: borné}} \quad \left.\right\} \text{pour } j \text{ grand, on a } \longrightarrow 0 \text{ (permet d'obtenir } d_0 \text{ borné)}$$

**Proposition** : $(\ell^p, d_p(x,y))$, $p \in [0, \infty]$ est un espace vectoriel topologique (il faut vérifier la continuité de $f+g$ et $\lambda \cdot f$)

**Preuve** : i) $1 \leq p \leq \infty$, alors il faut vérifier que $x \mapsto \|x\|_p$ est une norme (Espace vectoriel avec norme $\Rightarrow$ espace vectoriel topologique). Pour vérifier l'inég. du $\Delta$, c'est moins évident : $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$, i.e.
$$\boxed{\left(\sum_{j=0}^{\infty} |x_j + y_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=0}^{\infty} |y_j|^p\right)^{1/p}}$$
INÉGALITÉ DE MINKOWSKI $(p \geq 1)$

ii) $0 < p < 1$ : cf. Lemme ⊛
iii) $p = 1$ : c'est l'inég. du $\Delta$
iv) $p = \infty$ : $\sup|x_i + y_i| \leq \sup(x_i) + \sup(y_i)$

**Lemme ⊛** : - soit $a \geq 0$, $b \geq 0$, $p \in ]0,1[$, alors : $(a+b)^p \leq a^p + b^p$

**Remarque** : suite de la preuve ii). Avec le lemme on a tout de suite que $|x+y|_p \leq |x|_p + |y|_p$ car $|x|_p = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p$

**Remarque** : - démonstration de l'inégalité de Minkowsky : cf. pages imprimées
- inégalité de Minkowsky pour $p < 1$ est fausse : par exemple $a = (1,0)$, $b = (0,1)$, alors : $p = \frac{1}{2}$
$$\left(\sum |\xi_i + \eta_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum |\xi_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum |\eta_i|^p\right)^{1/p}$$
$$\Leftrightarrow \quad (\sqrt{1} + \sqrt{1})^2 \underset{\nearrow \text{NON}}{\leq} (0 + \sqrt{1})^2 + (0 + \sqrt{1})^2 \qquad \#$$

**Proposition** : - $\ell^p$, $p \in [0, \infty]$ sont complets
- $\ell^p$, $p \in [1, \infty]$ sont de Banach
- $\ell^p$, $p = 2$ est de Hilbert

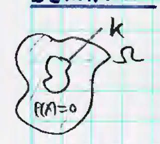
**Preuve** : - $\ell^2$ est de Hilbert : il faut voir que toute suite de Cauchy de $\ell^2$ converge dans $\ell^2$.
1) $x_j^{(n)} \rightarrow x_j$. Une définition d'une suite $x = (x_j)$ t.q.
   a) est-ce que $\underline{x} \in \ell^p$ ?
   b) est-ce que $x_n \rightarrow x \in \ell^p$ ?
   } cf. notes

**Remarque** : - cas $p = 2$ : $x, y \in \ell^2$, $\langle x, y \rangle = \sum x_i \bar{y}_i < \infty$ par C.S. $\left|\sum x_i \bar{y}_i\right| \leq \left(\sum |x_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum |y_i|^2\right)^{1/2}$
- cas $p \neq 2$ : $x, y \in \ell^p$, alors $\nexists$ inég. t.q. $\sum x_i \bar{y}_i < \infty$
Mais par l'inég. de Hölder si $x \in \ell^p$, $y \in \ell^q$ t.q. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors :
$$\left|\sum x_i \cdot \bar{y}_i\right| \leq \underbrace{\left(\sum |x_i|^p\right)^{1/p}}_{<\infty} \cdot \underbrace{\left(\sum |y_i|^q\right)^{1/q}}_{<\infty} < \infty$$
et on a le m. espace $\ell^p, \ell^q \Leftrightarrow p = q = 2$.

**Remarque** : - produit scalaire : $\langle f, g \rangle_m = \sum_{|\alpha| < m} \int_\Omega D^\alpha f(x) \overline{D^\alpha g(x)} \, dx$

**Théorème** : - Sobolev-embedding : - soit $H^1(a,b)$, $f(x)$, $x \in [a,b]$, alors $C(a,b) \supset H^1(a,b)$

**Définition** : - support compact : supp $f$ compact $\Leftrightarrow$ supp $f$ compact t.q. supp $f \subset \Omega \Leftrightarrow \exists K$ compact, $K \subset \Omega$ t.q. $f(x) = 0$ si $x \not\ni K$




- espaces isomorphes : 2 esp. vect. top. $E, F$ sont dits isomorphes si $\exists$ $u : E \rightarrow F$ lin, bij, cont. t.q. $u^{-1} : F \rightarrow E$ continue

**Proposition** : - soit $(E, \|\cdot\|)$ un esp. vect. normé, alors $\exists$ $(\tilde{E}, \|\cdot\|)$ t.q.
1) $(\tilde{E}, \|\cdot\|)$ de Banach
2) $E \subset \tilde{E}$ si $f \in E \Rightarrow \|f\| \in E = \|f\| \in \tilde{E}$
3) $E$ dense dans $\tilde{E}$
4) $(F, \|\cdot\|)$ autre esp. Banach avec 1), 2), 3) $\Rightarrow \tilde{E}, F$ isomorphes

**Proposition:** $E, F$ 2 EVN, $u : E \to F$ linéaire, alors :
1) $u$ continue en $x \in E \Rightarrow u$ continue $\forall x \in E$
2) $u$ continue $\Leftrightarrow \exists M \geq 0$ t.q. $\|uf\|_F \leq M \|f\|_E \quad \forall f \in E$