gerbeau@dma.epfl.ch



## 1ère série

Soient $c$ et $f$ deux fonctions de $\mathcal{C}^0([0,1])$. On s'intéresse au problème suivant : on cherche $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ tel que

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), & 0 < x < 1, \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Soit l'espace vectoriel normé $(V, \|.\|_V)$ défini par :

$$V = \{v \in \mathcal{C}^0([0,1]), \mathcal{C}^1 \text{ par morceaux }, v(0) = v(1) = 0\}, \quad \|v\|_V = \left(\int_0^1 (|v'|^2 + |v|^2)\,dx\right)^{1/2}.$$

Soient $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme bilinéaire et $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme linéaire définies pour $u, v \in V$ par

$$a(u,v) = \int_0^1 (u'v' + cuv)\,dx, \qquad F(v) = \int_0^1 fv\,dx.$$

**1)** Montrer que si $u$ est solution du problème aux limites (1) alors

$$a(u,v) = F(v), \qquad \forall v \in V. \tag{2}$$

**2)** On suppose désormais $c \geq 0$. Montrer que la forme bilinéaire $a$ est *coercive*, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\alpha\|v\|_V^2 \leq a(v,v), \quad \forall v \in V.$$

Montrer que la forme bilinéaire $a$ est continue sur $V \times V$, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que :

$$|a(u,v)| \leq M\|u\|\,\|v\|, \quad \forall u, v \in V.$$

**3)** Soit $J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - F(v)$. Vérifier que

$$J(u+v) - J(u) = a(u,v) - F(v) + \frac{1}{2}a(v,v).$$

En déduire que $u \in V$ est solution de (2) si et seulement si

$$J(u) = \inf_{v \in V} J(v). \tag{3}$$

**4)** Etablir le résultat prouvé en 3) en appliquant le résultat suivant, d'une portée plus générale :

*Soit $(V, \|.\|)$ en espace vectoriel normé, $J$ une fonction dérivable de $V$ dans $\mathbb{R}$ et $u$ un* point critique *de $J$ (i.e. tel que $J'(u) = 0$). Si $J$ est deux fois dérivable au point $u$ et s'il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que $\forall w \in V, J''(u)(w,w) \geq \alpha\|w\|^2$ alors $J$ admet un minimum relatif strict en $u$.*

**5) Discrétisation.** Etant donné $V_h$ un sous-espace de $V$ de dimension finie, on approche le problème (2) par son analogue discret : on cherche $u_h \in V_h$ tel que

$$a(u_h, v_h) = F(v_h), \qquad \forall v_h \in V_h. \tag{4}$$

Vérifier que ce problème peut s'écrire sous forme matricielle

$$AU = b \tag{5}$$

et montrer que la matrice $A$ est symétrique définie positive (remarquer que cette propriété ne dépend que de la symétrie et de la coercivité de $a(\cdot,\cdot)$).

**6) Eléments finis P1.** Soit $N \geq 1$, on pose $h = \frac{1}{N+1}$ et on considère un maillage uniforme de pas $h$ de l'intervalle $[0,1]$ formé des noeuds $x_k = kh$, $0 \leq k \leq N+1$. En supposant les fonctions $c$ et $f$ constantes, expliciter le système linéaire (5) quand l'espace $V_h$ est défini par

$$V_h = \{v \in \mathcal{C}^0([0,1]), v(0) = v(1) = 0, v|_{[x_k, x_{k+1}]} \in P_1([x_k, x_{k+1}]), 0 \leq k \leq N\},$$

et qu'on se donne la base $(v_i)$ définie par $v_i(x_j) = \delta_{ij}$ pour $1 \leq i, j \leq N$.

Analyse numérique de EDP - 1ère . Jle .

(1) soit $v \in V$. On note $x_1 \leq \dots \leq x_n$ les points où la dérivée de la fonction n'est pas continue. On pose $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 1$.

$$\int_0^1 u'' v = \sum_{i=0}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'' v = \sum_{i=0}^{n} \left( - \int_{x_i}^{x_{i+1}} u' v' + \left[u' v\right]_{x_i}^{x_{i+1}} \right)$$

$$= - \int_0^1 u' v' \quad \text{(car } u' \text{ et } v \text{ sont } \mathcal{C}^0 \text{ et } u(0) = u(1) = 0 \text{)}.$$

d'où le résultat en multipliant (1) par $v$ et en intégrant.

(2) * $a(v,v) = \int_0^1 |v'(x)|^2 dx + \int_0^1 |v(x)|^2 c(x)\, dx$

Comme $v(0) = 0$ on a : $v(x) = \int_0^x v'(y)\, dy$.

d'où $|v(x)| \leq \int_0^1 |v'| \leq \left( \int_0^1 |v'|^2 \right)^{1/2}$ (Cauchy-Schwarz)

$|v(x)|^2 \leq \int_0^1 |v'|^2$

d'où $\int_0^1 |v(x)|^2 dx \leq \int_0^1 |v'|^2$

$\int_0^1 |v(x)|^2 + \int_0^1 |v'(x)|^2 \leq 2 \int_0^1 |v'|^2$.

d'où $\frac{1}{2} \|v\|_V^2 \leq \int_0^1 |v'|^2$.

d'où $\frac{1}{2} \|v\|_V^2 \leq a(v,v)$ car $c(x) \geq 0$, $\forall x \in [0,1]$.

$\Rightarrow$ coercivité.

* Montrons la continuité :

$$|a(u,v)| = \left| \int_0^1 u'v' + cuv \right| \leq \int_0^1 |u'||v'| + M \int_0^1 |u||v|$$

où $M = \max\left(1, \sup_{[0,1]} c(x)\right)$.

$$|a(u,v)| \leq \left( \int_0^1 |u'|^2 \right)^{1/2} \left( \int_0^1 |v'|^2 \right)^{1/2} + M \left( \int_0^1 |u|^2 \right)^{1/2} \left( \int_0^1 |v|^2 \right)^{1/2}$$

$$|a(u,v)|^2 \leq M^2 \Big[ \int_0^1 |u'|^2 \int |v'|^2 + \int_0^1 |u|^2 \int |v|^2 \quad (\text{car } M \geq 1)$$
$$+ 2 \left( \int_0^1 |u'|^2 \right)^{1/2} \left( \int_0^1 |v'|^2 \right)^{1/2} \left( \int_0^1 |u|^2 \right)^{1/2} \left( \int_0^1 |v|^2 \right)^{1/2} \Big]$$

or $2 \left( \int_0^1 |u'|^2 \right)^{1/2} \left( \int_0^1 |v'|^2 \right)^{1/2} \left( \int_0^1 |u|^2 \right)^{1/2} \left( \int_0^1 |v|^2 \right)^{1/2} \leq \int_0^1 |u'|^2 \int_0^1 |v|^2 + \int_0^1 |v'|^2 \int_0^1 |u|^2$

d'où $|a(u,v)|^2 \leq M^2 \left( \int_0^1 |u|^2 + |u'|^2 \right) \left( \int_0^1 |v|^2 + |v'|^2 \right)$

$|a(u,v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V$.

(3) $J(u+v) - J(u) = \frac{1}{2}\left[a(u+v, u+v) - a(u,u)\right] + F(u) - F(u+v)$.

$= \frac{1}{2}\left[a(u,v) + a(v,u) + a(v,v)\right] - F(v)$

$= \frac{1}{2} a(v,v) + a(u,v) - F(v)$.

N.B. : on a utilisé la symétrie de $a(\cdot,\cdot)$.

(2) $\Rightarrow$ (3) : on a $a(u,v) = F(v)$

d'où $J(u+v) - J(u) = \frac{1}{2} a(v,v)$

$\geq \frac{\alpha}{2} \|v\|_V^2 \geq 0$

donc $\forall v \in V$, $v \neq 0$ $J(u+v) > J(u)$

ou encore : $\forall w \in V$ $J(w) \geq J(u)$

donc $J(u) = \inf_{v \in V} J(v)$

(3) $\Rightarrow$ (2). Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ : $J(u+\lambda v) - J(u) \geq 0$ ($v$ fixé qcq)

d'où $\lambda a(u,v) - \lambda F(v) + \frac{\lambda^2}{2} a(v,v) \geq 0$.

si $\lambda > 0$ : $a(u,v) - F(v) + \frac{\lambda}{2} \underbrace{a(v,v)}_{\geq 0} \geq 0$

en faisant $\lambda \to 0^+$ $a(u,v) - F(v) \geq 0$.

de même en faisant $\lambda \to 0^-$ $\quad a(u,v) - F(v) \leq 0$

d'où $a(u,v) = F(v)$.

---

④

Rappel : Soit $V$ un espace vectoriel normé (de dimension quelconque).
$J'(u) \in \mathcal{L}(V,\mathbb{R})$ : si $h \in V$, on note $J'(u).h$ l'image de $h$ par l'application linéaire $J'(u)$.
$J''(u) \in \mathcal{L}^2(V,\mathbb{R})$ ; si $h$ et $k \in V$, on note $J''(u)(h,k)$ l'image de $(h,k)$ par l'application bilinéaire $J''(u)$.
On a : $J(u+h) = J(u) + J'(u).h + \|h\|\,\varepsilon(h)$
et $J(u+h) = J(u) + J'(u).h + \frac{1}{2} J''(u)(h,h) + \|h\|^2 \varepsilon(h)$
avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Calcul de $J'(u)$ et $J''(u)$ :

$J(u+h) - J(u) = a(u,h) - F(h) + \frac{1}{2} a(h,h)$

d'où : $J'(u).h = a(u,h) - F(h)$

et : $J''(u)(h,k) = a(h,k)$

$(2) \Rightarrow (3)$ : on a $a(u,h) = F(h)$, $\forall h \in V$

donc $J'(u).h = 0 \quad \forall h \in V$

donc $u$ est un point critique.

De plus $J''(u)(h,h) = a(h,h) \geq \alpha \|h\|_V^2$ (coercivité)

Le théo assure donc que $u$ est un minimum relatif strict. Comme de plus $J$ est convexe (car $J''(v)(v-w,v-w) \geq 0$) $u$ est un minimum sur $V$. D'où (3).

$(3) \Rightarrow (2)$ : $\left\{ \begin{array}{l} J(u) = \inf_{v\in V} J(v) \\ V \text{ est un ouvert} \end{array} \right. \Longrightarrow J'(u) = 0$.

donc $\forall v \in V \quad J'(u).v = 0$

donc $a(u,v) - F(v) = 0$, $\forall v \in V$

---

⑤ Soit $(v_i)_{i=1\to N}$ une base de $V_h$.

$u_h(x) = \sum_{i=1}^{N} u^i v_i(x)$, $(u^i \in \mathbb{R})$ (i désigne un indice, pas une puissance !)

$a(u_h, v_h) = F(v_h)$, $\forall v_h \in V_h$ s'écrit aussi

$a(u_h, v_i) = F(v_i)$, $\forall i = 1,\dots,N$.

$\sum_{j=1}^{N} u^j a(v_j, v_i) = F(v_i)$, $\forall i = 1,\dots,N$.

on pose $A = [a(v_i,v_j)]$ $\quad U = \begin{bmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^N \end{bmatrix}$ $\quad b = \begin{bmatrix} F(v_1) \\ \vdots \\ F(v_N) \end{bmatrix}$

et on a bien : $AU = b$.

$A$ est symétrique car $a(\cdot,\cdot)$ est symétrique.

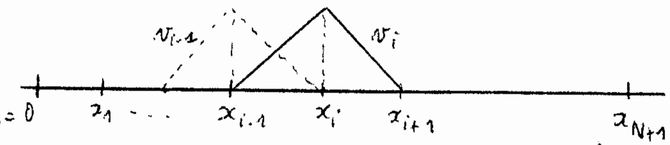
Soit $W \in \mathbb{R}^N$, $W \neq 0$, $W = [w^1, \dots w^N]^T$

${}^tWAW = \sum_{i,j} w^j w^i a(v_i,v_j) = a(w,w) \geq \alpha \|w\|_V^2$

d'où ${}^tWAW > 0$. Ce qui prouve que $A$ est définie positive.

---

⑥




$v_i(x) = \frac{1}{h}(x - x_{i-1})$ (si $x \in (x_{i-1}, x_i]$) et $v_i'(x) = \frac{1}{h}$

$= -\frac{1}{h}(x - x_{i+1})$ (si $x \in [x_i, x_{i+1}]$) et $v_i'(x) = -\frac{1}{h}$.

* $\int v_i' v_j' = 0$ si $|i-j| > 1$

$= h \times \left(\frac{1}{h}\right) \times \left(-\frac{1}{h}\right) = -\frac{1}{h}$ si $i - j = 1$.

$= 2h \frac{1}{h^2} = \frac{2}{h}$ si $i = j$.

* idem pour $\int c\, v_i v_j$ ....

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & & (0) \\ \beta & \alpha & \ddots & \\ & \beta & \ddots & \beta \\ (0) & & \beta & \alpha \end{bmatrix}_{(N\times N)}$$

$\alpha = \frac{2}{h} + \frac{2c}{3} h$.

$\beta = -\frac{1}{h} + \frac{c}{6} h$

# Analyse numérique des EDP : Série 1

Soit : $c, f \in C^0([0,1])$, on cherche : $u \in C^2[0,1]$ t.q.

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)\cdot u(x) = f(x) & , \forall x \in [0,1] \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Soit l'E.V.N. défini par :

$$\left.\begin{aligned} V &= \{ v \in C^0([0,1]) \text{ , } C^1 \text{ par morceaux , } v(0) = v(1) = 0 \} \\ \|v\|_V &= \left( \int_0^1 ( |v'|^2 + |v|^2 ) \, dx \right)^{1/2} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Soit $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ , $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$ définies $\forall u,v \in V$ par :

$$\left.\begin{aligned} a(u,v) &= \int_0^1 (u'\cdot v' + c\cdot u \cdot v) \, dx \\ F(v) &= \int_0^1 f\cdot v \, dx \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

## i) Avar : $u$ sol. de $(1) \Rightarrow a(u,v) = F(v) \quad \forall v \in V$

Soit $u$ sol. de (1), alors :

$$-u''(x) + c(x)\cdot u(x) = f(x)$$

$$\Rightarrow \underbrace{- \int_0^1 u''\cdot v}_{= -u'v|_0^1 + \int_0^1 u'v'} + \int_0^1 c\cdot u \cdot v = \int_0^1 f\cdot v$$

$$-u'v|_0^1 = 0 \quad \forall \text{ fct. test } v \in V$$

$$\Rightarrow \int_0^1 u'\cdot v' + \int_0^1 c\cdot u\cdot v = \int_0^1 f\cdot v$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_0^1 (u'v' + cuv)}_{= a(u,v)} = \underbrace{\int_0^1 f\cdot v}_{= F(v)} \qquad \# \qquad (4)$$

## ii) Forme bilinéaire coercive

On dit qu'une forme bilinéaire est coercive si $\exists \alpha > 0$ tq

$$\alpha \|v\|_V^2 \leq a(v,v) \qquad \forall v \in V \qquad (5)$$

On a :

$$\|v\|_V^2 = \int_0^1 ( |v'|^2 + |v|^2 ) \, dx \qquad (6)$$

$$a(v,v) = \int_0^1 ( v'\cdot v' + c\cdot v\cdot v) \, dx = \int_0^1 (v'^2 + c\cdot v^2) \, dx \qquad (7)$$

Avec l'inég. de Cauchy-Schwartz :

$$\left| \int_0^1 fg \right|^2 \leq \int_0^1 |f|^2 \cdot \int_0^1 |g|^2 \qquad (8)$$

Et aussi :

$$|u(x)|^2 = \Big( \int_0^x \underbrace{u'(y)}_{f = u'(y)} \, dy \Big)^2 \overset{(8)}{\leq} \int_0^x |u'|^2 \cdot \int_0^x 1 \leq \int_0^1 |u'(y)|^2 dy \qquad (9)$$

$g = 1$

Il faut voir que :

$$\alpha \cdot \underbrace{\int_0^1 (|v'|^2 + |v|^2)}_{\|v\|^2} \leq \underbrace{\int_0^1 (v'^2 + c\cdot v^2)}_{a(v,v)} \qquad (10)$$

## 3) $J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - F(v)$

**i) A voir :** $J(u+v) - J(u) = a(u,v) - F(v) + \frac{1}{2}a(v,v)$

En développant le membre de gauche :

$$J(u+v) - J(u) = \frac{1}{2}a(u+v,u+v) - F(u+v) - \frac{1}{2}a(u,u) + F(u)$$
$$= \frac{1}{2}a(u,u+v) + \frac{1}{2}a(v,u+v) - \cancel{F(u)} - F(v) + \cancel{F(u)} - \frac{1}{2}a(u,u)$$
$$= \frac{1}{2}\cancel{a(u,u)} + \frac{1}{2}a(u,v) + \frac{1}{2}a(v,u) + \frac{1}{2}a(v,v) - F(v) - \frac{1}{2}\cancel{a(u,u)}$$
$$\overset{a \text{ symétrique}}{=} a(u,v) - F(v) + \frac{1}{2}a(v,v) \qquad \# \qquad (15)$$

**ii) A voir :** $u$ solution de $a(u,v) = F(v) \ \forall v \in V \iff J(u) = \inf_{v\in V} J(v)$

C'est le principe de Hamilton.

$\Leftarrow$) Soit $u$ t.q. $a(u,v) = F(v) \ \forall v \in V$, alors par (15) :

$$J(u+v) - J(u) = \frac{1}{2}a(v,v) \qquad \forall v \in V \qquad (16)$$

Avec notre problème, on a :

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(v'^2 + c\cdot v^2\right) - \int_0^1 f\cdot v \qquad (17)$$

On calcule l'infimum de (17) :

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{J(u+\lambda\cdot w) - J(u)}{\lambda} \overset{\text{calculs}}{=} \underbrace{\int_0^1 u'\cdot w' + \int_0^1 c\cdot u\cdot w}_{=a(u,w)} - \underbrace{\int_0^1 f\cdot w}_{=F(w)} = 0 \quad \forall w \qquad (18)$$

$$\Rightarrow \quad J(u) = \inf_{v\in V} J(v) \overset{(18)}{\iff} a(u,v) = F(v) \qquad \# \qquad (19)$$

## 4) Autre démonstration de 3)

Enoncé : – soit $(V, \|\cdot\|)$ un E.V.N., $J$ une fct. dérivable de $V$ dans $\mathbb{R}$ et $u$ t.q. $J'(u) = 0$. Si $J$ est 2 fois dérivable en $u$ et si $\exists \alpha > 0$ t.q. $\forall w \in V$, $J''(u)(w,w) \geq \alpha\cdot\|w\|^2$ alors $J$ admet un minimum relatif strict en $u$.

## 5) Discrétisation

Soit $V_h = \{ v \in X_h^1 \text{ t.q. } v(0) = v(1) = 0\} \subset V$, $\dim V_h = N_h < \infty$, alors on peut écrire le pb. sous forme matricielle. Comme $\dim V_h < \infty$, alors $\exists$ une base $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N_h}$ t.q. on peut reformuler le problème :

$$\left.\begin{array}{ll} u \in V : a(u,v) = F(v) & \forall v \in V \\ u_h \in V_h : a(u_h, \varphi_j) = F(\varphi_j) & , \varphi_j = \text{fct. de base} \\ u_h = \sum_{i=1}^{N_h} u_i\cdot\varphi_i & \end{array}\right\} \qquad (20)$$

Donc :

$$a(u_h,\varphi_j) = a\left(\sum_{i=1}^{N_h} u_i\,\varphi_i, \varphi_j\right) = \sum_{i=1}^{N_h} u_i\cdot a(\varphi_i,\varphi_j) = F(\varphi_j) = \int_0^1 f\cdot\varphi_j \qquad (21)$$

Soit $a_{ij} = a(\varphi_i,\varphi_j)$, alors :

$$\sum_{i=1}^{N_h} u_i\cdot a_{ij} = \int_0^1 f\cdot\varphi_j \qquad (22)$$

Soit $f=(f_1,\dots,f_{N_h})$, $f_j=\int_0^1 f\cdot\varphi_j$, soit $u=(u_1,\dots,u_h)$, alors (22) se reformule:

$$A\cdot u = f \qquad (23)$$

La résolution de (23) donne $u$ ce qui détermine $u_h$. On vérifie donc ce cas que $A$ est une matrice symétrique définie positive car $a_{ij}=a(\varphi_i,\varphi_j)$, et

$$a(\varphi_i,\varphi_j)=\int_0^1 \varphi_i'\varphi_j' - c\cdot\varphi_i\cdot\varphi_j = a(\varphi_j,\varphi_i) \qquad (24)$$

est symétrique par rapport à l'échange de $\varphi_i$ et $\varphi_j$. Une matrice est dite définie positive si:

$$\forall \varphi_i \in V_h \quad \exists\, \varepsilon>0 \text{ t.q. } a(\varphi_i,\varphi_i) \geqslant \varepsilon\cdot\|\varphi_i\|^2 \qquad (25)$$

Comme la forme $a$ est coercive, alors

$$\alpha\cdot\|\varphi_i\|^2 \leq a(\varphi_i,\varphi_i) \qquad (26)$$

Ce qui vérifie (25).

## 6) Eléments finis P1

Soit $N\geqslant 1$, $h=\frac{1}{N+1}$, soit un maillage uniforme de $[0,1]$ par pas de $h$, $x_k=k\cdot h$, $0\leq k\leq N+1$. Soit $c=cte$, $f=cte$, soit

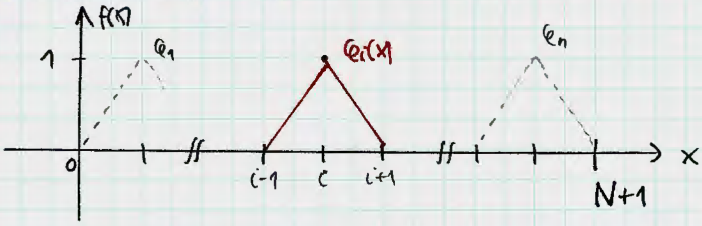
$$V_h = \left\{ v\in C^0(0,1) \text{ t.q. } v(0)=v(1)=0,\ v|_{[x_k,x_{k+1}]} \in P_1[x_k,x_{k+1}],\ 0\leq k\leq N\right\}$$

On doit donc résoudre le problème de dimension $N+1$.

$$a_{ij} = a(\varphi_i,\varphi_j) = \int_0^1 \left(\varphi_i'\varphi_j' + c\cdot\varphi_i\cdot\varphi_j\right) \qquad (27)$$

$$f_i = \int_0^1 f\cdot\varphi_j \qquad (28)$$

On choisit nos fonctions de base $\varphi_i$ :




$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} x & \forall x\in[h\cdot(i-1),\ h\cdot i] \\ 1-x & \forall x\in[i\cdot h,\ (i+1)\cdot h] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad (29)$$

On obtient donc:

$$\begin{aligned} f_i &= f\cdot\int_{(i-1)\cdot h}^{i\cdot h} x\,dx + f\cdot\int_{i\cdot h}^{(i+1)\cdot h}(1-x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}f\cdot h^2\cdot\left(i^2-(i-1)^2\right) + f\cdot h\cdot(i+1-i) - \frac{1}{2}f\cdot h^2\cdot\left((i+1)^2-i^2\right) \\ &= \frac{1}{2}f\cdot h^2\cdot(2i-1) + f\cdot h - \frac{1}{2}f\cdot h^2\cdot(2i+1) \\ &= f\cdot h - f\cdot h^2 \\ &= f\cdot h\cdot(1-h) \end{aligned} \qquad (30)$$

et :

$$a_{ii} = \int_0^1 \varphi_i' \cdot \varphi_i' + c \cdot \varphi_i \cdot \varphi_i$$

$$= \int_0^1 \varphi_i'^2 + c \cdot \int_0^1 \varphi_i^2$$

$$= \int_{h\cdot(i-1)}^{h\cdot i} dx - \int_{h\cdot i}^{(i+1)\cdot h} dx + c \cdot \int_{h\cdot(i-1)}^{h\cdot i} x^2\, dx + c \cdot \int_{i\cdot h}^{(i+1)\cdot h} (1-x)^2\, dx$$

$$= h \cdot ( i - i + 1 - i - 1 + i ) + \frac{1}{3} c \cdot h^3 \left( i^3 - (i-1)^3 \right) + c \cdot \int_{h\cdot i}^{h(i+1)} 1 + x^2 - 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{3} c \cdot h^3 \cdot (i^3 - (i-1)^3) + c \cdot h \cdot (i+1-i) - c \cdot h^2 \cdot ( (i+1)^2 - i^2 ) + \frac{c}{3} h^3 \cdot ( (i+1)^3 - i^3 )$$

$$= \frac{1}{3} c \cdot h^3 \cdot \left( i^3 - (i-1)^3 + (i+1)^3 - i^3 \right) - c \cdot h^2 \cdot ( i^2 + 1 - i^2 + 2i ) + c \cdot h$$

$$= \frac{1}{3} c \cdot h^3 \cdot \left( (i+1) \cdot ( i^2 + 1 + 2i ) - (i-1) \cdot ( i^2 + 1 - 2i ) \right) + c \cdot h - c \cdot h^2 \cdot (1 + 2i)$$

$$= \frac{1}{3} c \cdot h^3 \cdot \left( \cancel{i^3} + \cancel{i} + 2i^2 + i^2 + 1 + \cancel{2i} \cancel{-i^3} \cancel{-i} + 2i^2 + i^2 + 1 \cancel{-2i} \right) + c \cdot h - c \cdot h^2 \cdot (1 + 2i)$$

$$= \frac{1}{3} c \cdot h^3 \cdot \left( 4 \cdot i^2 + 2i^2 + 2 \right) + c \cdot h - c \cdot h^2 \cdot (1 + 2i)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot c \cdot h^3 \cdot \left( 3i^2 + 1 \right) - c \cdot h^2 \cdot (1 + 2i) + c \cdot h = \alpha \qquad (31)$$

et : $a_{ij}$ avec $|i-j| = 1$ : soit $i < j$, $i = j - 1$ :

$$a_{ij} = \int_0^1 \varphi_i' \varphi_j' + c \cdot \varphi_i \varphi_j$$

$$= \int_0^1 \varphi_i' \varphi_j' + c \cdot \int \varphi_i \cdot \varphi_j$$

$$= \int_{i\cdot h}^{(i+1)\cdot h} 1 \cdot (-1) + c \cdot \int_{i\cdot h}^{(i+1)h} (1-x) \cdot x\, dx$$

$$= h \cdot (i - i) - 1 + c \cdot \int_{i\cdot h}^{(i+1)h} x - x^2\, dx$$

$$= -1 + c h^2 \frac{1}{2} \left( (i+1)^2 - i^2 \right) - \frac{c}{3} h^3 \left( (i+1)^3 - i^3 \right)$$

$$= -1 + \frac{1}{2} c h^2 \left( i^2 + 1 + 2i - i^2 \right) - \frac{c}{3} \cdot \left( (i+1) \cdot (i^2 + 1 + 2i) - i^3 \right) \cdot h^3$$

$$= -1 + \frac{1}{2} c \cdot (1 + 2i) h^2 - \frac{c}{3} h^3 \cdot \left( \cancel{i^3} + i + 2i^2 + i^2 + 1 + 2i \cancel{-i^3} \right)$$

$$= -1 + \frac{1}{2} \cdot c \cdot h^2 \cdot (1 + 2i) - \frac{1}{3} c \cdot h^3 \cdot \left( 3i + 3i^2 + 1 \right) = \beta \qquad (32)$$

Comme $a$ est symétrique, alors $a_{ij} = a_{ji}$. On doit donc résoudre :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & & \\ \beta & \alpha & & \\ & & \ddots & \\ & & \alpha & \beta \\ & & \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = f \cdot h \cdot (1-h) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (33)$$

Ce qui se résoud par décomposition $LU$ ou bien $LL^t$.

Exercice: vérifier que les différences finies décentrées sont stable $\forall \mathbb{P}e$

Le problème d'origine décentré s'écrit:

$$-\frac{\mu}{h^2}\left(u_{i+1}-2\cdot u_i+u_{i-1}\right)+\frac{b}{h}\cdot\left(u_i-u_{i-1}\right)=0$$

$$\Rightarrow\quad u_{i+1}\cdot\left(-\frac{\mu}{h^2}\right)+u_i\cdot\left(\frac{2\mu}{h^2}+\frac{b}{h}\right)+u_{i-1}\cdot\left(-\frac{\mu}{h^2}-\frac{b}{h}\right)=0$$

$$\Rightarrow\quad u_{i+1}+u_i\cdot\left(-\frac{2\cancel{\mu}}{\cancel{h^2}}\cdot\frac{\cancel{h^2}}{\cancel{\mu}}-\frac{b}{\cancel{h}}\cdot\frac{h^{\cancel{2}}}{\mu}\right)+u_{i-1}\cdot\left(+\frac{\cancel{\mu}}{\cancel{h^2}}\cdot\frac{\cancel{h^2}}{\cancel{\mu}}+\frac{b}{\cancel{h}}\cdot\frac{h^{\cancel{2}}}{\mu}\right)=0$$

$$\Rightarrow\quad u_{i+1}-\left(2+\frac{h\cdot b}{\mu}\right)\cdot u_i+\left(1+\frac{h\cdot b}{\mu}\right)\cdot u_{i-1}=0$$

Avec $\mathbb{P}e=\frac{b\cdot h}{2\mu}$ on a que $\frac{b\cdot h}{\mu}=\mathbb{P}e\cdot 2$, alors:

$$u_{i+1}-(2+2\cdot\mathbb{P}e)\cdot u_i+(1+2\cdot\mathbb{P}e)\cdot u_{i-1}=0$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{u_{i+1}-2\cdot(1+\mathbb{P}e)\cdot u_i+(1+2\cdot\mathbb{P}e)\cdot u_{i-1}=0}\qquad (1)$$

Ce qui est une équation aux différences finies. Ansatz: $u_i=\rho^i$, alors:

$$\rho^{i+1}-2\cdot(1+\mathbb{P}e)\cdot\rho^i+(1+2\cdot\mathbb{P}e)\cdot\rho^{i-1}=0$$

$$\Rightarrow\quad \rho^2-2\cdot(1+\mathbb{P}e)\cdot\rho+(1+2\cdot\mathbb{P}e)=0$$

$$\Rightarrow\quad \rho_{1,2}=\frac{2\cdot(1+\mathbb{P}e)\pm\sqrt{4\cdot(1+\mathbb{P}e)^2-4\cdot(1+2\cdot\mathbb{P}e)}}{2}=1+\mathbb{P}e\pm\sqrt{\cancel{1}+\mathbb{P}e^2+\cancel{2\cdot\mathbb{P}e}-\cancel{1}-\cancel{2\mathbb{P}e}}$$

$$\Rightarrow\quad \rho_{1,2}=1+\mathbb{P}e\pm\mathbb{P}e$$

$$\Rightarrow\quad \{\rho_1;\rho_2\}=\{1;\ 1+2\cdot\mathbb{P}e\}\qquad (2)$$

$$\Rightarrow\quad u_i=A\cdot\rho_1^{\,i}+B\cdot\rho_2^{\,i}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{u_i=A+B(1+2\mathbb{P}e)^i}\qquad (3)$$

Conditions aux bords:

$$u(0)=0\quad\Rightarrow\quad u_0=0\quad\Rightarrow\quad A+B=0$$
$$u(1)=1\quad\Rightarrow\quad u_M=1\quad\Rightarrow\quad A+B\cdot(1+2\mathbb{P}e)^M=1$$

$$\Rightarrow\quad A-A\cdot(1+2\mathbb{P}e)^M=1$$

$$\Rightarrow\quad A\cdot\left(1-(1+2\mathbb{P}e)^M\right)=1$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\begin{cases} A=\dfrac{1}{1-(1+\mathbb{P}e\cdot 2)^M} \\ B=-A\end{cases}}\qquad (4)$$

(3) et (4) $\Rightarrow$

$$u_i=\frac{1}{1-(1+2\mathbb{P}e)^M}-\frac{1}{1-(1+\mathbb{P}e\,2)^M}\cdot(1+2\cdot\mathbb{P}e)^i$$

$$\boxed{u_i=\frac{1-(1+2\cdot\mathbb{P}e)^i}{1-(1+2\cdot\mathbb{P}e)^M}}\qquad (5)$$

STABLE $\forall\,\mathbb{P}e,\ \forall h$

## 2ème série

Soient $b$, $\mu$ des réels strictement positifs. On s'intéresse à la résolution numérique du problème stationnaire d'advection diffusion suivant : trouver $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\mu u''(x) + bu'(x) & = & 0, & 0 < x < 1, \\ u(0) & = & \alpha, & \\ u(1) & = & \beta. & \end{array} \right. \tag{1}$$

On se donne $M$ points $x_1 = 0 < x_2 < ... < x_{M-1} < x_M = 1$ équidistribués sur l'intervalle $[0,1]$ et on pose $h = 1/(M-1)$.

*Remarque : on vérifie sans peine que la solution du problème est* $u(x) = \alpha + (\beta - \alpha)\frac{e^{\frac{b}{\mu}x}-1}{e^{\frac{b}{\mu}}-1}$. *Mais les idées introduites dans cet exercice s'étendent à des cas plus généraux où la solution n'est pas calculable analytiquement.*

**1) Différences finies centrées.** On discrétise le problème (1) par un schéma aux différences finies centrées : on pose $u_1 = \alpha$, $u_M = \beta$, et pour $n = 2, ..., M-1$, on cherche $u_n$, approximation de $u(x_n)$, tel que

$$-\mu \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} + b\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} = 0 \tag{2}$$

Ecrire ceci sous forme matricielle $A_1 X = b_1$.

**2) Eléments finis P1.** Soient les espaces fonctionnels $X = H^1(0,1)$,

$$V = \{v \in X, v(0) = \alpha, v(1) = \beta\}, \text{ et } V_0 = \{v \in X, v(0) = v(1) = 0\}.$$

a) Montrer qu'une solution de (1) est solution du problème variationnel suivant : trouver $u \in V$ tel que, *pour tout* $v \in V_0$,

$$\int_0^1 \mu u'(x)v'(x)\, dx + \int_0^1 bu'(x)v(x)\, dx = 0. \tag{3}$$

b) on définit les fonctions de base P1 par $v_i(x_j) = \delta_{ij}$ pour $i, j = 1, ..., M$. On introduit les espaces $X_h = \text{Vect}\{v_i\}_{i=1,...,M}$, $V_h = \{v \in X_h, v(0) = \alpha, v(1) = \beta\}$ et $V_{0,h} = \{v \in X_h, v(0) = v(1) = 0\}$. La formulation discrète de (3) est alors : trouver $u_h \in V_h$ tel que, pour tout $v_h \in V_{0,h}$,

$$\int_0^1 \mu u_h'(x)v_h'(x)\, dx + \int_0^1 bu_h'(x)v_h(x)\, dx = 0. \tag{4}$$

Ecrire ce problème sous forme matricielle $A_2 X = b_2$. Comparer $A_1$ et $A_2$. Remarquer que $A_2$ s'écrit de manière naturelle comme la somme d'une matrice symétrique définie positive $K$ et d'une matrice antisymétrique $C$. Montrer que $A_2$ est inversible.

**3) Une propriété des matrices $A_1$ et $A_2$.** On dit qu'une matrice $A$ d'ordre $N$ est monotone (ou encore que c'est une *M-matrice*) si $\forall X \in \mathbb{R}^N, AX \geq 0 \Rightarrow X \geq 0$. On admet le résultat suivant :

$$\left. \begin{array}{llcl} (i) & A & = & (a_{ij}) \text{ est inversible} \\ (ii) & a_{ii} & \geq & 0, \quad \forall i \\ (iii) & a_{ij} & \leq & 0, \quad i \neq j \\ (iv) & a_{ii} & \geq & -\sum_{i \neq j} a_{ij}, \quad \forall i \end{array} \right\} \Rightarrow \text{A est monotone.}$$

A quelle condition les matrices $A_1$ et $A_2$ sont-elles monotones ?

**4) Différences finies décentrées.** On remplace (5) par le schéma aux différences finies décentrées :

$$-\mu\frac{u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}}{h^2}+b\frac{u_n-u_{n-1}}{h}=0 \tag{5}$$

Ecrire le problème sous forme matricielle : $A_3X = b_3$. A quelle condition la matrice $A_3$ est-elle monotone ?

**5) Condition aux limites de Neumann.** On remplace (1) par :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\mu u''(x)+bu'(x) & = & 0, & 0<x<1, \\ u(0) & = & \alpha, & \\ u'(1) & = & \beta. & \end{array}\right. \tag{6}$$

En introduisant les espaces fonctionnels

$$W=\{v\in X, v(0)=\alpha\}, \text{ et } W_0=\{v\in X, v(0)=0\},$$

écrire la formulation variationnelle de ce problème et sa discrétisation en éléments finis P1.

EDP - Série 2

(1) $$-\mu \frac{u_{m+1}-2u_m+u_{m-1}}{h^2} + b\,\frac{u_{m+1}-u_{m-1}}{2h} = 0$$

$$-\left(+\frac{\mu}{h}+\frac{b}{2}\right)u_{m-1} + \frac{2\mu}{h}u_m + \left(\frac{b}{2}-\frac{\mu}{h}\right)u_{m+1} = 0$$

pour $2 \leq m \leq M-1$.

$m=2 \qquad -\left(\frac{\mu}{h}+\frac{b}{2}\right)\alpha + \frac{2\mu}{h}u_m + \left(\frac{b}{2}-\frac{\mu}{h}\right)u_{m+1} = 0$

$m=M-1 \qquad -\left(\frac{\mu}{h}+\frac{b}{2}\right)u_{m-1} + \frac{2\mu}{h}u_m + \left(\frac{b}{2}-\frac{\mu}{h}\right)\beta = 0$

d'où

$$\underbrace{\begin{bmatrix} p & q^+ & & (0) \\ q^- & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & q^+ \\ (0) & & q^- & p \end{bmatrix}}_{(M-2,M-2)} \begin{bmatrix} u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{M-1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\mu}{h}+\frac{b}{2}\right)\alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \left(\frac{\mu}{h}-\frac{b}{2}\right)\beta \end{bmatrix}$$

avec $\boxed{p = \frac{2\mu}{h}}$, $\boxed{q^+ = \frac{b}{2}-\frac{\mu}{h}}$ et $\boxed{q^- = -\frac{b}{2}-\frac{\mu}{h}}$

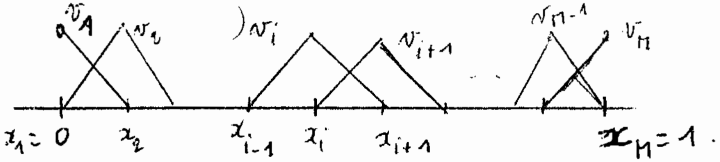
(2) a) on multiplie (1) par $v \in V_0$ et on intègre entre 0 et 1

$$-\mu\int_0^1 u''v + b\int_0^1 u'v = 0.$$

$$\mu\int_0^1 u'v' + b\int_0^1 u'v = 0 \quad \text{car} \quad (0) = v(1) = 0.$$

b) $$u_h(x) = \sum_{i=1}^{M} u_i\, v_i(x)$$

avec $u_1 = \alpha$ et $u_M = \beta$.

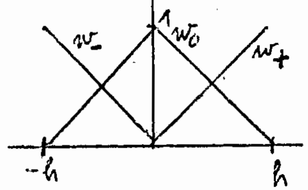



$$\int_0^1 \mu\, u_h' v_i' + b\, u_h' v_i = 0 \iff \sum_{j=1}^{M} u_j \underbrace{\int_0^1 \mu v_j' v_i' + b\, v_j' v_i}_{a_{ij}} = 0$$

Etant donné les supports des fonctions $v_i$, on a :

$a_{ij} = 0$ si $j \notin \{i-1, i, i+1\}$.

On introduit les fonctions $w_0 = \begin{cases} -\frac{x}{h}+1 & \text{si } x\in[0,h] \\ +\frac{x}{h}+1 & \text{si } x\in[-h,0] \end{cases}$




$w_+ = \left|\ \frac{x}{h} \quad \text{si } x\in[0,h]\right.$

et $w_- = \left|\ -\frac{x}{h} \quad \text{si } x\in[-h,0]\right.$

$$a_{i,i} = \int_0^1 \mu (v_i')^2 + b\, v_i' v_i = \int_{-h}^{h}\mu (w_0')^2 + \underbrace{b\int_{-h}^{h} w_0' w_0}_{0} = \int_{-h}^{0}\mu\frac{1}{h^2} + \int_0^h \mu\frac{1}{h^2}$$

$$= \frac{2\mu}{h}$$

$$a_{i,i+1} = \int_0^1 \left(\mu v_i' v_{i+1}' + b\, v_{i+1}' v_i\right) = \int_0^h \left(\mu w_0' w_+' + b\, w_+' w_0\right)$$

$$= \int_0^h \mu\left(-\frac{1}{h}\right)\left(\frac{1}{h}\right) + b\,\frac{1}{h}\left(1-\frac{x}{h}\right) = -\frac{\mu}{h}+\frac{b}{2}$$

$$a_{i,i-1} = \int_0^1 \mu v_{i-1}' v_i' + b\, v_{i-1}' v_i = \int_{-h}^0 \left(\mu w_0' w_-' + b\, w_-' w_0\right) = -\frac{\mu}{h}-\frac{b}{2}$$

En utilisant $u_1 = \alpha$ et $u_M = \beta$ on a exactement le même système qu'en (1). Autrement dit $A_1 = A_2$ et $b_1 = b_2$.

* $A_2 = \mu K + bC$ avec

$$K = \frac{1}{h}\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{(M-2,M-2)} \quad \text{et} \quad C = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & & \\ -1/2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1/2 \\ & & -1/2 & 0 \end{bmatrix}}_{(M-2,M-2)}$$

- La matrice $K$ est définie positive : ${}^tXKX = \int_0^1 |v'|^2$, $X = \begin{bmatrix} v_2 \\ | \\ v_{M-1} \end{bmatrix}$

donc si $X \neq$ ${}^tXKX > 0$.

- $C$ est antisymétrique donc ${}^tXCX = 0$

Montrons que $A = \mu K + b C$. Soit $X$ tel que $AX = 0$

alors $\mu KX + bCX = 0$

$\mu\, {}^tXKX + b\, {}^tXCX = 0$.

${}^tXKX = 0$ d'où $X = 0$. Donc $A$ est inversible.

③ $a_{ii} = \dfrac{2\mu}{h} \geq 0$. $a_{i-1,i} = -\dfrac{\mu}{h} - \dfrac{b}{2} \leq 0$.

$a_{i,i+1} = -\dfrac{\mu}{h} + \dfrac{b}{2} \leq 0$ ssi $\boxed{\dfrac{bh}{2\mu} \leq 1}$.

$\dfrac{bh}{2\mu}$ est le nombre de Peclet (noté $Pe$).

$A_1$ et $A_2$ sont monotone dès que $\boxed{Pe \leq 1}$.

④ $-\mu \dfrac{u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}}{h^2} + b \dfrac{u_m - u_{m-1}}{h} = 0$.

$\left(-\dfrac{\mu}{h} - b\right) u_{m-1} + \left(\dfrac{2\mu}{h} + b\right) u_m - \dfrac{\mu}{h} u_{m+1} = 0$ -

La matrice $A_3$ a donc la même structure tridiagonale que $A_1$ et $A_2$ mais avec

$$p = \frac{2\mu}{h} + b \geq 0$$
$$q^- = -\frac{\mu}{h} - b \leq 0$$
$$q^+ = -\frac{\mu}{h} \leq 0.$$

On montre que $A_3$ est inversible par le même argument qu'en ② en remarquant que :

$A_3 = \mu K + b\, \tilde{C}$

avec $\tilde{C} = \begin{bmatrix} b & & (0) \\ -b/2 & \ddots & \\ (0) & -b/2 & b \end{bmatrix} = \dfrac{bh}{2} K + b\,C$

$A_3 = \left(\mu + \dfrac{bh}{2}\right) K + b\,C$

Et $A_3$ est <u>inconditionnellement monotone</u>.

⑤ * Soit $v \in W$

$-\int_0^1 \mu u'' v + b \int_0^1 u' v = 0 \Rightarrow \int_0^1 \mu u' v' + \int_0^1 b u' v = \mu \underbrace{u'(1)}_{\gamma} v(1)$

Remarquer que la condition aux limites de Dirichlet (en 0) apparaît de manière <u>essentielle</u> (i.e. dans l'espace $W$), alors que la CL de Neumann (en 1) apparaît de manière <u>naturelle</u> (i.e. au second membre de l'équation variationnelle).

* On a une inconnue de plus par rapport au problème de Dirichlet (la valeur $u_M$), le système a donc $M-1$ équations.

Les $M-2$ premières équations sont les mêmes qu'en ②.

La $M-1$ équation est :

$\mu \int_0^1 u_h' v_M' + b \int_0^1 u_h' v_M = \mu \gamma\, v_M(1) = \mu\gamma$

$a_{M-1,M-1} = \mu \int_0^h (w_+')^2 = \mu \int_0^h \dfrac{1}{h^2} = \dfrac{\mu}{h}$

$a_{M-1,M-2} = \mu \int_0^h w_0' w_+' + b \int_0^h w_0' w_+ = -\dfrac{\mu}{h} - \dfrac{b}{2}$

et $b_{M-1} = \mu\gamma$.

François Coppex, DP, EPFL.

# Analyse numérique des EDP : Série 2

Soit un problème de convection-diffusion :


$$\partial_t u \underbrace{- \mu \cdot \Delta u}_{\text{terme de diffusion}} + \underbrace{b \cdot \nabla u}_{\text{transport ou convection}} = \underbrace{f}_{\text{source}} \qquad (1)$$

avec $u$ qui peut représenter la température, la concentration chimique p.ex. Hypothèses :

i) Cas stationnaire : $\partial_t u = 0$

ii) 1D, $\bar{b} = \text{cte} = b$

iii) $\nexists$ sources : $f = 0$

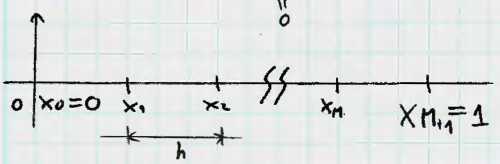
$$\Longrightarrow \begin{cases} -\mu \cdot u'' + b \cdot u' = 0 & , x \in [0,1] \\ u(0) = \alpha \\ u(1) = \beta \end{cases} \qquad (2)$$

La solution analytique du problème est :

$$u(x) = \alpha + (\beta - \alpha) \cdot \frac{\exp(\frac{b}{\mu} \cdot x) - 1}{\exp(\frac{b}{\mu}) - 1} \qquad (3)$$

## i) Différences finies centrées

Soit $u_0 = u(\underset{0}{\underset{\shortparallel}{x_0}}) = \alpha$ ; $u_{M+1} = u(\underset{1}{\underset{\shortparallel}{x_M}}) = \beta$, alors le schéma centré :




$$, h = \frac{1}{M+1} \quad ; \quad x_j = j \cdot h \quad , j = 0, \dots, M+1$$

$$-\mu \cdot \underbrace{\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2}}_{A_1} + b \cdot \underbrace{\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h}}_{A_2} = 0 \qquad \forall n = 1, \dots, M$$

Construisons le système linéaire $A \cdot \bar{u} = \bar{b}$ :

$n=1$ : $-\mu \cdot \frac{u_2 - 2 \cdot u_1 + u_0}{h^2} + b \cdot \frac{u_2 - u_0}{2h} = 0 \Longrightarrow -\mu \cdot \frac{u_2 - 2u_1}{h^2} + b \cdot \frac{u_2}{2h} = \frac{\alpha}{2h} \cdot b + \frac{\mu}{h^2} \alpha$

$n=2$ : $-\mu \cdot \frac{u_3 - 2u_2 + u_1}{h^2} + b \cdot \frac{u_3 - u_1}{2h} = 0$

$\vdots$

$n=M$ : $-\mu \frac{u_{M+1} - 2 \cdot u_M + u_{M-1}}{h^2} + b \cdot \frac{u_{M+1} - u_{M-1}}{2h} = 0 \Rightarrow -\mu \cdot \frac{-2u_M + u_{M-1}}{h^2} + b \cdot \frac{-u_{M-1}}{2h} = \frac{\mu}{h^2} \cdot \beta - b \cdot \frac{\beta}{2h}$

Ce qui s'écrit sous forme matricielle :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{\mu}{h^2} \in M_M(\mathbb{R}) \qquad (4)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & 0 \\ -1 & 0 & 1 & & & \\ & -1 & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -1 & 0 & 1 \\ & & & & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{b}{2h} \in M_n(\mathbb{R}) \qquad (5)$$

$$b = \left( \frac{\mu}{h^2} \cdot \alpha + \frac{b}{2h} \cdot \alpha \, ; 0 ; 0 ; \dots ; 0 ; 0 ; \frac{\mu}{h^2} \cdot \beta - \frac{b}{2h} \cdot \beta \right) \qquad (6)$$

Ainsi avec $A = A_1 + A_2$ :

$$A \cdot \bar{u} = \bar{b}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2\cdot\frac{\mu}{h^2} & -\frac{\mu}{h^2}+\frac{b}{2h} & & & & 0 \\ -\frac{\mu}{h^2}-\frac{b}{2h} & 2\cdot\frac{\mu}{h^2} & -\frac{\mu}{h^2}+\frac{b}{2h} & & & \\ & -\frac{\mu}{h^2}-\frac{b}{2h} & 2\cdot\frac{\mu}{h^2} & -\frac{\mu}{h^2}+\frac{b}{2h} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & -\frac{\mu}{h^2}-\frac{b}{2h} & 2\cdot\frac{\mu}{h^2} & -\frac{\mu}{h^2}+\frac{b}{2h} \\ & & & & -\frac{\mu}{h^2}-\frac{b}{2h} & 2\cdot\frac{\mu}{h^2} \end{pmatrix} \qquad (7)$$

On remarque que le problème général à résoudre est en réalité :

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & & \\ \hline a_{10} & A & a_{M,M+1} \\ \hline & & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} u_0 \\ \hline u \\ \hline u_{M+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \hline b \\ \hline \beta \end{pmatrix} \qquad (8)$$

non : déjà passé dans le vecteur b

Mais on a déjà connu le problème par $u_0$, $u_{M+1}$ qui sont les C.L.

## ii) Eléments finis P1

Soit $X = H^1(0,1)$ , $V = \{ v \in X : v(0) = \alpha,\ v(1) = \beta \}$
$V_0 = \{ v \in X : v(0) = v(1) = 0 \}$ (9)

### a) Problème variationnel

Soit :

$$-\mu \cdot u'' + b \cdot u' = 0 \qquad (10)$$

Soit $v \in V_0$, alors : $\cdot v$ et $\int$ : avec $\mu = cte$, $b = cte$ :

$$\underbrace{-\int \mu \cdot u'' \cdot v} + \int b \cdot u' \cdot v = 0$$

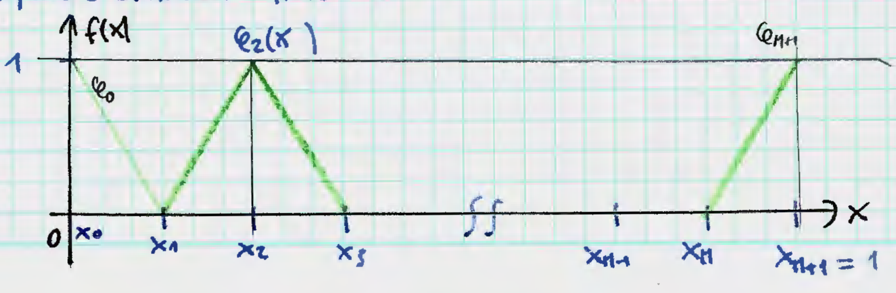
$$= \int \mu \cdot u' \cdot v' \underbrace{- \mu \cdot u' \cdot v \Big|_0^1}_{=0 \text{ car } v \in V_0}$$

$$\Longrightarrow \int \mu \cdot u' \cdot v' + \int b \cdot u' \cdot v = 0 \qquad \forall v \in V_0$$

$$\Longrightarrow \int_0^1 \mu \cdot u'(x) \cdot v'(x)\,dx + \int_0^1 b \cdot u'(x) \cdot v(x)\,dx = 0 \qquad \forall v \in V_0 \qquad (11)$$

### b) Pb. variationnel : forme matricielle

Soit l'espace d'éléments finis $X^1$




$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$$

$$X_h = \text{vect}\{\varphi_i\}$$

Comme (11) est vrai $\forall v \in \bar{V}_0$ et $X_h \subset V_0$, alors en particulier (11) est vrai $\forall \varphi_i$, alors :

$$\int_0^1 \mu \cdot u_h'(x) \cdot \varphi_i'(x)\, dx + \int_0^1 b \cdot u'(x) \cdot \varphi_i(x)\, dx = 0 \qquad (12)$$

On cherche une solution $u_h \in X_h$, alors :

$$u_h = \sum_{n=0}^{M+1} u_n \cdot \varphi_n \quad , u_0 = \alpha \quad , u_{M+1} = \beta \qquad (13)$$

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{j-1}}{\underbrace{x_j - x_{j-1}}_{=h}} & x \in [x_{j-1}, x_j] \\ \dfrac{x - x_{j+1}}{\underbrace{x_j - x_{j+1}}_{=-h}} & x \in [x_j, x_{j+1}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad (14)$$

$$\varphi_j'(x) = \begin{cases} 1/h & x \in [x_{j-1}, x_j] \\ -1/h & x \in [x_j, x_{j+1}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad (15)$$

(12) et (13) $\Rightarrow$

$$\sum_{j=0}^{M+1} \int_0^1 \mu \cdot \varphi_j' \cdot \varphi_i' \cdot u_j + \sum_{j=0}^{M+1} \int_0^1 b \cdot u_j \cdot \varphi_j' \cdot \varphi_i = 0 \qquad (16)$$

Ce qui est la multiplication de 1 ligne d'une matrice par le vecteur $u$ :

$$\sum_{j=0}^{M+1} u_j \cdot \underbrace{\left\{ \int_0^1 \mu \cdot \varphi_j' \varphi_i' + \int_0^1 b \cdot \varphi_j' \cdot \varphi_i \right\}}_{a_{ij}} = 0 \qquad (17)$$

On calcule les éléments de matrice $a_{ij}$ $\forall i,j = 1,\dots,n$ ; on voit que ces éléments doivent être nuls pour $|i-j| > 1$ :

$i=j$ : $\quad a_{ii} = \int_0^1 \mu \cdot \varphi_i'^2 + \int_0^1 b \cdot \varphi_i' \cdot \varphi_i$

On fait un changement de variables comme translation qui rapporte l'intégration sur l'intervalle $[-h, h]$ :

$$a_{ii} = \mu \cdot \frac{1}{h^2} \int_{-h}^{h} dx + b \cdot \int_{-h}^{0} \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{h}(x+h) + b \cdot \int_0^h -\frac{1}{h} \cdot \left(-\frac{1}{h}\right) \cdot (x-h)$$

$$= \frac{2 \cdot \mu}{h} + \frac{b}{h^2} \cdot \left\{ \int_{-h}^{0} x+h + \int_0^h x-h \right\}$$

$$= 2 \cdot \frac{\mu}{h} + \frac{b}{h^2} \cdot \left\{ \cancel{+h^2} \cancel{-\tfrac{1}{2}h^2} + \cancel{\tfrac{1}{2}h^2} \cancel{-h^2} \right\}$$

$$a_{ii} = 2 \cdot \frac{\mu}{h} \qquad (18)$$

$i = j-1$ : $\quad a_{i,i+1} = \int_0^1 \mu \cdot \varphi_i' \cdot \varphi_{i+1}' + \int_0^1 b \cdot \varphi_{i+1}' \cdot \varphi_i$

$$= \int_0^h \mu \cdot \left(\frac{1}{h}\right)\left(-\frac{1}{h}\right) + \int_0^h b \cdot \left(\frac{1}{h}\right) \cdot \frac{x-h}{-h}$$

$$= -\frac{\mu}{h} - \frac{b}{h^2} \cdot \int_0^h x-h$$

$$= -\frac{\mu}{h} - \frac{b}{h^2} \cdot \left\{ \frac{1}{2}h^2 - h^2 \right\}$$

$$a_{i,i+1} = -\frac{\mu}{h} + \frac{b}{2} \qquad (19)$$

$i = j+1$ : $\quad a_{i,i-1} = \underbrace{\int_0^1 \mu \cdot \varphi_i' \cdot \varphi_{i-1}'}_{= -\frac{\mu}{h}} + \int_0^1 b \cdot \varphi_{i-1}' \cdot \varphi_i$

$$= -\frac{\mu}{h} + \int_0^1 b \cdot \varphi_{i-1}' \cdot \varphi_i$$

$$= -\frac{\mu}{h} + \int_{-h}^{0} b \cdot \left(-\frac{1}{h}\right) \cdot \frac{x-h}{h}$$

$$= -\frac{\mu}{h} - \frac{1}{h^2} \cdot b \cdot \left\{-\frac{1}{2}h^2 + h^2\right\}$$

$$a_{i,i-1} = -\frac{\mu}{h} - \frac{b}{2} \tag{20}$$

Ce qui donne :

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{2\mu}{h} & -\frac{\mu}{h} & \ddots \\ -\frac{\mu}{h} & \frac{2\mu}{h} & \ddots \\ & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & b/2 & \\ -b/2 & 0 & \ddots \\ & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \tag{22}$$

avec $A = A_1 + A_2$. Mais ces matrices sont de taille $M \times M$, et on veut aussi les conditions au bord : $u_0 = \alpha$, $u_{M+1} = \beta$, alors :

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline \tilde{a}_{10} & & \\ & A = \{a_{ij}\} & \\ & & \tilde{a}_{M,M+1} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_M \\ u_{M+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} \tag{23}$$

$$\tilde{a}_{10} = -\frac{\mu}{h} - \frac{b}{2}$$

$$\tilde{a}_{M,M+1} = -\frac{\mu}{h} + \frac{b}{2}$$

Comme on connaît $u_0$ et $u_{M+1}$, alors on reformule (23) pour se concentrer uniquement sur le problème donné par $A$ :

$$A \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{M-1} \\ u_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \cdot \tilde{a}_{10} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\beta \cdot \tilde{a}_{M,M+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot \frac{\mu}{h} + \frac{\alpha \cdot b}{2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta \cdot \frac{\mu}{h} - \beta \cdot \frac{b}{2} \end{pmatrix} \tag{24}$$

En comparant (24) et (8) on voit que on a le même problème.

On voit aussi que $A_1$ symétrique, $A_2$ antisymétrique, et on vérifie que $A$ est inversible : par cela on vérifie que $A$ est définie positive, i.e. le det de toutes les sous-matrices principales est

$>0$, donc $\det A \neq 0 \Rightarrow \ker A = \emptyset$ :

$$x^t \cdot A \cdot x = x^t \cdot (A_1 + A_2) \cdot x = x^t A_1 \cdot x + \underbrace{x^t A_2 \cdot x}_{=0 \text{ car } A_2 \text{ anti-sym.}} = x^t A_1 \cdot x \quad (25)$$

Or la matrice $A_1$ est du type:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & -b & & \\ -b & a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (26)$$

qui est définie positive par la série 1.

## 3) Propriété des matrices

Soit $A \in M_N(\mathbb{R})$, alors $A$ est dite monotone si $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $A \cdot X \geq 0 \Rightarrow X \geq 0$. Dans ce cas:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{i)} & A = \{a_{ij}\} \in Gl_N(\mathbb{R}) \\ \text{ii)} & a_{ii} \geq 0 \quad \forall i \\ \text{iii)} & a_{ij} \leq 0 \quad \forall i \neq j \\ \text{iv)} & a_{ii} \geq -\sum_{i \neq j} a_{ij} \quad \forall i \end{array}\right\} \Rightarrow A \text{ est monotone}$$

On aimerait trouver les conditions pour que les matrices $A_1$ et $A_2$ soient monotones. On vérifie i) à iv) sur $A = A_1 + A_2$.

i) déjà vérifié : oui

ii) $\frac{2\mu}{h} \geq 0$ : oui

iii) $-\frac{\mu}{h} \leq 0$ ; $-\frac{b}{2} \leq 0$ : oui, et: $-\frac{\mu}{h} - \frac{b}{2} \leq 0$ oui

$$-\frac{\mu}{h} + \frac{b}{2} \leq 0 \Rightarrow \frac{b \cdot h}{2 \cdot \mu} \leq 1$$

$\Rightarrow$ le nb. de Pechlet doit être $< 1$

iv) $\frac{2\mu}{h} \geq -\left\{ -\frac{\mu}{h} + \frac{b}{2} - \frac{\mu}{h} - \frac{b}{2} \right\} = \frac{2\mu}{h} \Rightarrow$ oui ($i$ fixé)

## 4) Différences finies décentrées

La reformulation des différences finies avec un schéma décentré permet d'obtenir la stabilité inconditionnelle :

$$-\mu \cdot \frac{u_{n+1} - 2 \cdot u_n + u_{n-1}}{h^2} + b \cdot \frac{u_n - u_{n-1}}{2h} = 0 \quad (27)$$

Construisons le système $A \cdot u = b$ :

$n = 1$ : $-\mu \cdot \frac{u_2 - 2u_1 + \overset{=\alpha}{u_0}}{h^2} + b \cdot \frac{u_1 - \overset{=\alpha}{u_0}}{2h} = 0$

$n = 2$ : $-\mu \cdot \frac{u_3 - 2u_2 + u_1}{h^2} + b \cdot \frac{u_2 - u_1}{2h} = 0$

$\vdots$

$n = M$ : $-\mu \cdot \frac{\overset{=\beta}{u_{M+1}} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} + b \cdot \frac{\overset{=\beta}{u_n} - u_{n-1}}{2h} = 0$

$$\Rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \frac{\mu}{h^2} \quad ; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & -1 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \frac{b}{2h} \quad (28)$$

$$b = \left( \frac{\mu}{h^2}\cdot\alpha + \frac{b}{2h}\cdot\alpha \;;\; 0;\dots;0;\; \frac{\mu}{h^2}\cdot\beta - \frac{b}{2h}\cdot\beta \right) \tag{29}$$

La condition de monotonicité de $A = A_1 + A_2$ est donnée par $A_2$, il faut que :

i) $A$ inversible, donc $x^t A x \geq 0 \Rightarrow x^t A_2 x \geq 0 \quad \forall x$, i.e.

$$x^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & -1 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} x \geq 0$$

$$\Rightarrow (x_1, \dots, x_M) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 + x_2 \\ -x_2 + x_3 \\ \vdots \\ -x_{M-1} + x_M \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\Rightarrow x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + x_2^2 - x_2 x_3 + x_3^2 \dots - x_{M-1} x_M + x_M^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{M} x_i^2 - \sum_{i=1}^{M-1} x_i \cdot x_{i+1} \geq 0 \tag{30}$$

Pour $M=2$, on peut utiliser l'identité :

$$(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - x_1 \cdot x_2 \cdot 2 \geq 0 \qquad \text{etc.}$$

ii) $a_{ii} \geq 0$ : oui

iii) $a_{ij} \leq 0$, $i \neq j$ : oui inconditionnellement

iv) $a_{ii} \geq -\sum_{i \neq j} a_{ij} \quad \forall i$ : $\quad 2 \cdot \frac{\mu}{h^2} + \frac{b}{2h} \overset{?}{\geq} -\left\{ -\frac{\mu}{h^2} - \frac{b}{2h} \right\} = \frac{\mu}{h^2} + \frac{b}{2h} \Rightarrow$ oui.

La seule condition revient à voir que $x^t A_2 x \geq 0$, ce qui doit certainement inconditionnellement être le cas.

## 5) Conditions aux Limites de Neumann

Soit :

$$\left.\begin{aligned} -\mu \cdot u'' + b \cdot u' &= 0 \qquad , x \in [0,1] \\ u(0) &= \alpha \\ u'(1) &= \beta \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Soit : $W = \{ v \in X : v(0) = \alpha \}$
$W_0 = \{ v \in X : v(0) = 0 \}$

alors on veut les élém. finis P1.

### i) formulation variationnelle

Soit $v \in V_0$, alors :

$$-\mu \cdot \int_0^1 u'' \cdot v + b \cdot \int_0^1 u' \cdot v = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\int_0^1 \mu \cdot u'(x) \cdot v'(x)\, dx + \int_0^1 b \cdot u'(x) \cdot v(x)\, dx = 0} \qquad \forall v \in V_0 \tag{32}$$

### ii) Formulation matricielle

Soit $W = \text{vect}\{\varphi_i\}$, alors :

$$u = \sum_{i=0}^{M+1} u_i \cdot \varphi_i(x) \qquad ; \quad \varphi_i(x_j) = \delta_{ij} \tag{33}$$

Par les conditions aux bords, on a $u_0 = \alpha$. Par contre :

$$u'(x) = \sum_{i=0}^{M+1} u_i \cdot \varphi_i'(x) \qquad (34)$$

Par la condition sur $\varphi_{M+1}(x)$, il faut que :

$$u_{M+1} \cdot \varphi'_{M+1}(x) = \beta \qquad (35)$$

Or $\varphi_{M+1} \notin C^1$ au point $x = 1$. Pour combler ce problème on peut choisir des intervalles de discrétisation t.q. $\frac{1}{h} = \beta \Longrightarrow h = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{M+1}$, donc $M = \beta - 1$. Mais dans ce cas $\beta \in \mathbb{N}$, ce qui est une restriction non désirée. On peut choisir une fonction $\varphi_{M+1}(x)$ un peu plus spéciale t.q. :

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{M+1}(\underbrace{1}_{=x_{M+1}}) &= 1 \\ \varphi_{M+1}(x_M) &= 0 \\ \varphi'_{M+1}(x_{M+1}) &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

$$\Downarrow \; u_{M+1} = \beta$$

La condition $\varphi_{M+1}(1) = 1$ est pas nécessaire. En cherchant une solution du type:

$$\varphi_{M+1}(x) = a' \cdot (x - x_M)^2 + b' \cdot (x - x_M) + c' \qquad (37)$$

On trouve :

$$b' = \frac{2}{h} - 1 = \frac{2-h}{h} \qquad (38)$$

$$a' = \frac{-1 + h}{h^2} \qquad (39)$$

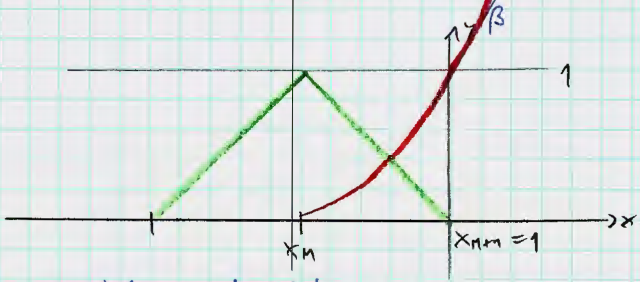
On vérifie bien que

$$\begin{aligned} \varphi_{M+1}(x_M + h) = a' \cdot h^2 + b' \cdot h &= \frac{-1+h}{h^2} \cdot h^2 + 2 - h \\ &= -1 + h + 2 - h \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi'_{M+1}(x_M + h) = 2 \cdot a' \cdot h + b' &= -2 \cdot \cancel{h} \cdot \frac{1-h}{h^2} + \frac{2}{h} - 1 \\ &= -\frac{2}{h} + \frac{2}{h} - 1 + 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

On a avec cette nouvelle définition $u_0 = \alpha$, $u_{M+1} = \beta$ (on aurait aussi pu choisir $\varphi_{M+1}(x)$ t.q. $\varphi'_{M+1}(1) = \beta$ et on aurait eu $u_{M+1} = 1$). Le calcul est identique que pour le point 2). La seule différence est le coefficient $\tilde{a}_{M,M+1}$ de (23) :

$$\tilde{a}_{M,M+1} = \int_0^1 \mu \cdot \varphi_M' \cdot \varphi'_{M+1} + \int_0^1 b \cdot \varphi'_{M+1} \cdot \varphi_M \qquad (40)$$




$$\varphi'_{M+1}(x) = 2 \cdot a' \cdot (x - x_M) + b' \qquad (41)$$

$$\Rightarrow \tilde{a}_{n,n+1} = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \mu\cdot\left(-\frac{1}{h}\right)\cdot\left\{2\cdot a'\cdot(x-x_n)+b'\right\}\,dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}}\left\{2\cdot a'\cdot(x-x_n)+b'\right\}\cdot\frac{x-x_{n+1}}{-h}\,dx$$

$$= -\frac{\mu}{h}\cdot\int_{x_n}^{x_{n+1}}\left[2a'(x-x_n)+b'\right]dx \quad - \frac{1}{h}\cdot b\int_{x_n}^{x_{n+1}}\left(2\cdot a'(x-x_n)+b'\right)(x-x_{n+1})\,dx$$

Changement de variables $y = x - x_n \rightarrow dy = dx$, alors:

$$\tilde{a}_{n,n+1} = -\frac{\mu}{h}\cdot\int_0^h 2\cdot a'\cdot x + b'\,dx - \frac{b}{h}\cdot\int_0^h (2\cdot a'\cdot x + b')\cdot(x-h)\,dx$$

$$= -\frac{\mu}{h}\cdot\left\{a'\cdot h^2 + b'\cdot h\right\} - \frac{b}{h}\cdot\int_0^h 2\cdot a'\cdot x^2 + b'\cdot x - 2a'\cdot h\cdot x - b'\cdot h\,dx$$

$$= -\mu\cdot(a'\cdot h + b') - \frac{b}{h}\cdot\left\{\frac{2}{3}a'\cdot h^3 + \frac{b'}{2}\cdot h^2 - \frac{2}{2}\cdot a'\cdot h^3 - b'\cdot h^2\right\}$$

$$= -\mu\cdot(a'\cdot h + b') - \frac{b}{h}\cdot\left\{-\frac{1}{3}a'h^3 - \frac{1}{2}b'\cdot h^2\right\}$$

$$= -\mu\cdot(a'\cdot h + b') - b\cdot\left(-\frac{1}{3}a'\cdot h^2 - \frac{1}{2}b'\cdot h\right) \qquad (42)$$

avec les définitions de $a', b'$ on a:

$$\tilde{a}_{n,n+1} = -\mu\cdot\left(\frac{\cancel{h}-1}{h} + \frac{2-\cancel{h}}{h}\right) + b\cdot\left(+\frac{1}{3}(h-1) + \frac{1}{2}(2-h)\right)$$

$$= -\frac{\mu}{h} + b\cdot\left(\frac{1}{3}h - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{2}h\right)$$

$$= -\frac{\mu}{h} + b\cdot\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}h\right)$$

$$\tilde{a}_{n,n+1} = -\frac{\mu}{h} + \frac{1}{3}b\cdot\left(2 - \frac{1}{2}h\right) \qquad (43)$$

On obtient finalement le système:

$$\begin{pmatrix} \frac{2\mu}{h} & -\frac{\mu}{h}+\frac{b}{2} & & & \\ -\frac{\mu}{h}-\frac{b}{2} & \frac{2\mu}{h} & -\frac{\mu}{h}+\frac{b}{2} & & \\ & -\frac{\mu}{h}-\frac{b}{2} & \frac{2\mu}{h} & -\frac{\mu}{h}+\frac{b}{2} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\cdot\frac{\mu}{h} + \frac{1}{2}\alpha\cdot b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta\cdot\frac{\mu}{h} - \frac{1}{3}\beta\cdot b\cdot\left(2-\frac{1}{2}h\right) \end{pmatrix}$$

La solution étant donnée par:

$$u(x) = \alpha\cdot\varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x)\cdot u_i + \beta\cdot\varphi_{n+1}(x) \qquad (44)$$

## 3ème série

Soit $\Omega$ un ouvert polygonal de $\mathbb{R}^3$, $b : \Omega \to \mathbb{R}^3$ et $\mu : \Omega \to \mathbb{R}$ des fonctions continues et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de $L^2(\Omega)$. On suppose que : $0 < \mu_0 \leq \mu(x) \leq \mu_1$, $|b(x)| \leq b_1$ et $\operatorname{div} b(x) = 0$, $\forall x \in \Omega$.
On note $n$ la normale sortante à $\Omega$ et on considère une partition de la frontière $\Gamma$ de $\Omega$ : $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. On se donne des fonctions régulières $u^d : \Gamma_1 \to \mathbb{R}$ et $g : \Gamma_2 \to \mathbb{R}$.
On va analyser une méthode de stabilisation par diffusion numérique pour le problème stationnaire d'advection diffusion suivant : trouver $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\operatorname{div}(\mu(x)\nabla u(x)) + b(x) \cdot \nabla u(x) & = & f(x), & x \in \Omega, \\ u & = & u^d & \text{sur } \Gamma_1, \\ \mu \dfrac{\partial u}{\partial n} & = & g & \text{sur } \Gamma_2. \end{array} \right. \tag{1}$$

⊗ **1)** On note $X = H^1(\Omega)$, $V^d = \{u \in X, u|_{\Gamma_1} = u^d\}$ et $V = \{v \in X, v|_{\Gamma_1} = 0\}$. On pose

S mth.

$$a(u,v) = \int_\Omega (\mu \nabla u \cdot \nabla v + b \cdot \nabla u\, v)\, dx \quad \text{et} \quad F(v) = \int_\Omega f v\, dx + \int_{\Gamma_2} g v\, d\gamma.$$

**a)** Montrer que si $u$ est solution du problème (1) alors $u$ est solution du problème faible : trouver $u \in V^d$ tel que pour tout $v \in V$

$$a(u,v) = F(v) \tag{2}$$

**b)** On suppose que $b \cdot n > 0$ sur $\Gamma_2$. Montrer que pour tout $w$ et $v \in V$

$$a(v,v) \geq \mu_0 ||\nabla v||^2_{L^2(\Omega)} \quad \text{et} \quad |a(w,v)| \leq M ||\nabla w||_{L^2(\Omega)} ||\nabla v||_{L^2(\Omega)}.$$

**2)** On se donne une triangulation $\mathcal{T}_h$ du domaine $\Omega$ ($h > 0$ désignant la taille caractéristique des triangles $T_i \in \mathcal{T}_h$) et un sous-espace de $X$ de dimension finie $X_h = \{v_h \in \mathcal{C}^0(\Omega), v_h|_{T_i} \in \mathbb{P}_k, \forall T_i \in \mathcal{T}_h\}$.
On note $u_h^d$ la fonction de $X_h$ qui coïncide avec $u^d$ en chaque point de $\Gamma_1$ et qui vaut 0 en tous les autres points du maillage. On note $V_h^d = \{u_h \in X_h, u_h|_{\Gamma_1} = u_h^d\}$ et $V_h = \{v_h \in X_h, v_h|_{\Gamma_1} = 0\}$.
L'approximation du problème (2) est : trouver $\tilde{u}_h \in V_h^d$ tel que pour tout $v_h \in V_h$,

$$a(\tilde{u}_h, v_h) = F(v_h) \tag{3}$$

On pose $u_h = \tilde{u}_h - u_h^d$. Vérifier que l'approximation de (2) peut s'écrire : trouver $u_h \in V_h$ tel que, pour tout $v_h \in V_h$

$$a(u_h, v_h) = F^d(v_h) \tag{4}$$

avec $F^d(v_h) = F(v_h) - a(u_h^d, v_h)$. Ayant ainsi ramené la résolution du problème non homogène (3) au problème homogène (4), on pourra supposer dans toute la suite, *sans restriction de généralité*, que $u^d = 0$ (et donc $F^d = F$ et $V_h^d = V_h$).

**3)** On introduit à présent un terme de diffusion numérique à $a(\cdot,\cdot)$ : on se donne $Q \geq 0$ et on pose pour $v_h$ et $w_h \in X_h$,

$$a_h(w_h, v_h) = a(w_h, v_h) + Qh \int_\Omega \nabla w_h \cdot \nabla v_h\, dx.$$

Désormais $u_h$ désigne la solution du problème de Galerkin généralisé : trouver $u_h \in V_h$ tel que pour tout $v_h \in V_h$

$$a_h(u_h, v_h) = F(v_h). \tag{5}$$

**a)** Vérifier que, pour tout $v_h \in V_h$, $a_h(v_h, v_h) \geq \mu_h ||\nabla v_h||^2_{L^2(\Omega)}$ avec $\mu_h = \mu_0 + Qh$.

**b)** Soit $v_h \in V_h$, on note $w_h = v_h - u_h$. Vérifier que $\mu_h ||\nabla(v_h - u_h)||^2_{L^2(\Omega)} \leq a_h(v_h, w_h) - F(w_h)$.

En utilisant le fait que $a(u, w_h) = F(w_h)$ en déduire

$$||\nabla(v_h - u_h)||_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\mu_h} \sup_{w_h \in V_h} \frac{|a_h(v_h, w_h) - a(v_h, w_h)|}{||\nabla w_h||_{L^2(\Omega)}} + \frac{M}{\mu_h} ||\nabla(v_h - u)||_{L^2(\Omega)}$$

En déduire finalement (en utilisant $||\nabla(u - u_h)||_{L^2(\Omega)} \leq ||\nabla(u - v_h)||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla(v_h - u_h)||_{L^2(\Omega)}$) l'inégalité suivante (lemme de Strang) :

$$||\nabla(u - u_h)||_{L^2(\Omega)} \leq \inf_{v_h \in V_h} \left\{ \frac{1}{\mu_h} \sup_{w_h \in V_h} \frac{|a_h(v_h, w_h) - a(v_h, w_h)|}{||\nabla w_h||_{L^2(\Omega)}} + \left(1 + \frac{M}{\mu_h}\right) ||\nabla(v_h - u)||_{L^2(\Omega)} \right\} \quad (6)$$

**4) a)** Montrer que, pour tout $w_h \in V_h$, on a

$$\frac{|a_h(v_h, w_h) - a(v_h, w_h)|}{||\nabla w_h||_{L^2(\Omega)}} \leq Qh ||\nabla v_h||_{L^2(\Omega)}. \quad (7)$$

**b)** On note $\Pi_h u$ l'interpolée de $u$ dans $V_h$. On rappelle le résultat sur l'erreur d'interpolation

$$||\nabla(\Pi_h u - u)||_{L^2(\Omega)} \leq C_1 |u|_{H^{k+1}(\Omega)} \, h^k \quad (8)$$

où $k$ est le degré des polynômes intervenant dans la définition de $X_h$ et $C_1$ une constante strictement positive indépendante de $h$. On peut aussi démontrer qu'il existe $C_2 > 0$ telle que $||\nabla(\Pi_h u)||_{L^2(\Omega)} \leq C_2 ||\nabla u||_{L^2(\Omega)}$.
Déduire de (6), (7) et (8) que l'erreur commise quand on résout (5) est :

$$||\nabla(u - u_h)||_{L^2(\Omega)} \leq C_3 \left\{ \left(1 + \frac{M}{\mu_h}\right) |u|_{H^{k+1}(\Omega)} \, h^k + \frac{Q}{\mu_h} ||\nabla u||_{L^2(\Omega)} \, h \right\}.$$

Corrigé (3e série).

① On multiplie (1) par $v$ et on intègre : $-\int_\Omega \mathrm{div}(\mu\nabla u)\, v + b\cdot\nabla u\, v = \int_\Omega f v$

$$\int_\Omega \mu \nabla u\cdot\nabla v - \int_{\Gamma_2} \mu\frac{\partial u}{\partial n}\, v\, d\gamma + \int_\Omega b\cdot\nabla u\, v = \int_\Omega f v \quad (\text{car } v=0 \text{ sur } \Gamma_1)$$

$$\int_\Omega \mu\nabla u\cdot\nabla v + \int_\Omega b\cdot\nabla u\, v = \int_\Omega f v + \int_{\Gamma_2} g\, v\, d\gamma \quad (\text{car } \mu\frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ sur } \Gamma_2)$$

② ⓐ Approximation de (2) : trouver $\tilde u_h \in V_h^d$ t.q. $\forall v_h\in V_h$, $a(\tilde u_h, v_h) = F(v_h)$

Au lieu de résoudre ce problème, on introduit $u_h^d$, un "relèvement discret" de $u^d$ et on résout : trouver $u_h \in \underline{V_h}$, t.q. $\forall v_h \in V_h$

$$a(u_h, v_h) = F(v_h) - a(u_h^d, v_h)$$

On s'est ainsi ramené à la résolution d'un problème homogène (i.e. $u_h = 0$ sur $\Gamma$). La solution du problème initial s'obtient simplement par : $\tilde u_h = u_h + u_h^d$.

ⓑ * Remarquer que : $\int_\Omega b\cdot\nabla v\, v = \int_\Omega b\cdot\nabla \frac{v^2}{2} = \underbrace{-\int_\Omega \mathrm{div}\, b\, \frac{v^2}{2}}_{=0 \text{ car div } b=0} + \underbrace{\int_{\Gamma_2} b\cdot n\, \frac{v^2}{2}}_{\geq 0 \text{ (car } b\cdot n\geq 0 \text{ sur }\Gamma_2)}$

d'où $a(v,v) \geq \int_\Omega \mu|\nabla v|^2 \geq \mu_0 \|\nabla v\|^2_{L^2}$

* $|a(u,v)| = \left|\int_\Omega \mu\nabla u\cdot\nabla v + \int_\Omega b\cdot\nabla u\, v\right| \leq \mu_1 \|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^2} + b_1\|\nabla u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}$

Rappel : $\|v\|_{L^2}\leq C_p\|\nabla v\|_{L^2}$ ($C_p$ : cste de Poincaré), car $v/_{\Gamma_1}=0$.

d'où $|a(u,v)| \leq M\|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^2}$ avec $M = \mathrm{Max}(\mu_1, b_1 C_p)$

③ ⓐ $a_h(v_h,v_h) = a(v_h,v_h) + Qh\int_\Omega |\nabla v_h|^2$

$$\geq \mu_0\|\nabla v_h\|^2_{L^2} + Qh \int_\Omega|\nabla v_h|^2 \quad (\text{car } V_h\subset V).$$

$$\geq (\mu_0 + Qh)\|\nabla v_h\|^2_{L^2} = \mu_h \|\nabla v_h\|^2_{L^2}$$

ⓑ * $\mu_h\|\nabla(v_h-u_h)\|^2_{L^2} \leq a_h(v_h-u_h, v_h-u_h)$ d'après ⓐ

or $a_h(v_h-u_h, v_h-u_h) = a_h(v_h-u_h, w_h)$ avec $w_h = v_h-u_h$

$$= a_h(v_h,w_h) - a_h(u_h,w_h)$$

$$= a_h(v_h,w_h) - F(w_h) \quad (\text{par def de } u_h)$$

* $\mu_h\|\nabla(v_h-u_h)\|^2_{L^2} \leq a_h(v_h,w_h) - F(w_h) = a_h(v_h,w_h) - a(u,w_h)$

$$\leq a_h(v_h,w_h) - a(v_h,w_h) + \underbrace{a(v_h,w_h) - a(u,w_h)}_{= a(v_h-u,\, w_h)\ \leq M\|\nabla(v_h-u)\|_{L^2}\|\nabla w_h\|_{L^2}}$$

d'où : $\mu_h\|\nabla(v_h-u_h)\|_{L^2} \leq \frac{|a_h(v_h,w_h)-a(v_h,w_h)|}{\|\nabla w_h\|_{L^2}} + M\|\nabla(v_h-u)\|_{L^2}$

$$\|\nabla(v_h-u_h)\|_{L^2} \leq \frac{1}{\mu_h}\sup_{w_h\in V_h}\frac{|a_h(v_h,w_h)-a(v_h,w_h)|}{\|\nabla w_h\|_{L^2}} + \frac{M}{\mu_h}\|\nabla(v_h-u)\|_{L^2}$$

* Finalement : $\|\nabla(u-u_h)\|_{L^2} \leq \|\nabla(u-v_h)\|_{L^2} + \|\nabla(v_h-u_h)\|_{L^2}$

$$\leq \left(1+\frac{M}{\mu_h}\right)\|\nabla(v_h-u)\|_{L^2} + \frac{1}{\mu_h}\sup_{w_h\in V_h}\frac{|a_h(v_h,w_h)-a(v_h,w_h)|}{\|\nabla w_h\|_{L^2}}$$

d'où le résultat en prenant l'inf sur $v_h$.

④ ⓐ $\frac{|a_h(v_h,w_h)-a(v_h,w_h)|}{\|\nabla w_h\|_{L^2(\Omega)}} = \frac{Qh\left|\int_\Omega \nabla w_h\cdot\nabla v_h\right|}{\|\nabla w_h\|_{L^2}}$

$$\leq Qh\|\nabla v_h\|_{L^2}$$

ⓑ $\frac{1}{\mu_h}\sup_{w_h\in V_h}\frac{|a_h(\ \ ,w_h) - a(\Pi_h u, w_h)|}{\|\nabla w_h\|_{L^2(\Omega)}} + \left(1+\frac{M}{\mu_h}\right)\|\nabla(\Pi_h u - u)\|_{L^2(\Omega)}$

$$\leq \frac{Q}{\mu_h}h\|\nabla(\Pi_h u)\|_{L^2(\Omega)} + \left(1+\frac{M}{\mu_h}\right)\|\nabla(\Pi_h u - u)\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq C_2\frac{Q}{\mu_h}h\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \left(1+\frac{M}{\mu_h}\right)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\, h^k$$

$C_3 = \max(C_1,C_2)$. On déduit de (3) :

$$\|\nabla(u-u_h)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3\left\{\frac{Q}{\mu_h}h + \left(1+\frac{M}{\mu_h}\right)h^k\right\}\|\nabla u\|_{L^2}$$

(on a la même inégalité en norme $H^1$ avec l'inégalité de Poincaré)

François Coppex, DP, EPFL.

# Analyse numérique EDP : Série 3

Soit :
$\Omega \subset \mathbb{R}^3$
$\mu : \Omega \to \mathbb{R}$, $0 < \mu_0 \leq \mu(x) \leq \mu_1$
$|b(x)| \leq b_1$, $\operatorname{div} \underline{b} = 0 \quad \forall x \in \Omega$
$\hat{n}$ normale sortante à $\Omega$
$\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $u^{\text{domé}} : \Gamma_1 \to \mathbb{R}$, $g : \Gamma_2 \to \mathbb{R}$

$$(Pb)\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\mu(x)\nabla u(x)\right) + b(x)\cdot\nabla u(x) = f(x) & x \in \Omega \\ u = u^{\text{domé}} \text{ sur } \Gamma_1 & : \text{Dirichlet (cond. essentielle)} \\ \mu\cdot\underbrace{\frac{\partial u}{\partial \hat{n}}}_{=\underline{\nabla}u\cdot\hat{n}} = g \text{ sur } \Gamma_2 & : \text{Neumann (cond. naturelle)} \end{cases}$$

## 1) Problème faible

Soit :

$$a(u,v) = \int_\Omega \left(\mu\underline{\nabla}u\cdot\underline{\nabla}v + \underline{b}\,\underline{\nabla}u\cdot v\right)dx \qquad (1)$$

$$F(v) = \int_\Omega f\cdot v\,dx + \int_{\Gamma_2} g\cdot v\,d\gamma \qquad (2)$$

a) A voir : $u$ sol. (Pb.) $\Longrightarrow$ $u$ sol. pb. faible : trouver $u \in V^d$ : $\forall v \in V$ $a(u,v) = F(v)$

Soit $u$ sol. de (Pb), alors :

$$-\operatorname{div}(\mu\cdot\nabla u) + b\cdot\nabla u = f$$

$$\Longrightarrow \underbrace{-\int_\Omega \underbrace{\operatorname{div}(\mu\cdot\nabla u)}_{a'}\cdot\underbrace{v}_{b}}_{\text{parties}: \;= \int_\Omega \underline{\nabla}v\cdot\underline{\nabla}u\cdot\mu - \int_{\partial\Omega}\mu\cdot\nabla u\cdot v} + \int_\Omega b\cdot\nabla u\cdot v = \int_\Omega f\cdot v$$

$$\underbrace{-\int_{\partial\Omega}\mu\cdot\nabla u\cdot v}_{= -\int_{\Gamma_1}\mu\cdot\nabla u\cdot v_{\hat{n}} - \int_{\Gamma_2}\mu\nabla u\cdot v\cdot\hat{n} \;=\; -\int_{\Gamma_2}\mu\nabla u\cdot v\cdot\hat{n}}$$

$=0$ sur $\Gamma_1$ car $V = \{v \in X : v|_{\Gamma_1} = 0\}$

$$\Longrightarrow \int_\Omega \nabla u\nabla v\cdot\mu + \int_\Omega b\cdot\nabla u\cdot v = \int_\Omega f\cdot v + \int_{\Gamma_2}\mu\cdot\nabla u\cdot v\cdot\hat{n}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\int_\Omega \left(\mu\,\underline{\nabla}u\,\underline{\nabla}v + \underline{b}\,\underline{\nabla}u\cdot v\right)}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega f\cdot v + \int_{\Gamma_2}\underbrace{\mu\cdot\underline{\nabla}u\cdot\hat{n}}_{=g}\cdot v}_{F(v)} \qquad \# \qquad (3)$$

b) Soit $b\cdot\hat{n} > 0$ sur $\Gamma_2$, à voir : continuité, coercivité

i) Coercivité : $\forall v \in V$, $|a(v,v)| \geq \mu_0\cdot\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}$

$$a(v,v) = \int_\Omega \left(\mu(x)\cdot\underline{\nabla}v\cdot\underline{\nabla}v + b\cdot\underline{\nabla}v\;v\right)dx$$

$$= \int_\Omega \mu(x)\underline{\nabla}v\underline{\nabla}v + \int_\Omega \underline{b}\,\underline{\nabla}v\;v$$

$$\leq \mu_1\cdot\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} + \underbrace{\int_\Omega \underline{b}\,\underline{\nabla}v\;v}_{=\frac{1}{2}\int_\Omega \underline{b}\,\nabla(v^2) \;\overset{\text{parties}}{=}\; -\frac{1}{2}\int_\Omega v^2\cdot\underbrace{\operatorname{div}b}_{=0} + \frac{1}{2}\int_\Gamma \underline{b}\cdot v^2\cdot\hat{n}\,ds \;=\; \frac{1}{2}\int_\Gamma v^2\,\underline{b}\cdot\hat{n}}$$

$$= \mu_1\cdot\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\underbrace{v^2}_{=0\text{ sur }\Gamma_1}\underline{b}\cdot\hat{n} + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2} v^2\underbrace{\underline{b}\cdot\hat{n}}_{>0}$$

$$= \mu_1\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2} v^2\underbrace{\underline{b}\cdot\hat{n}}_{\geq 0}$$

$\Longrightarrow \underline{a(v,v) \geq \mu_1 \cdot \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}}$ # (4)

ii) Continuité : $\forall w,v \in V$ , $|a(w,v)| \leq M \cdot \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$

$$|a(w,v)| = \left| \int_\Omega \mu \cdot \nabla w \cdot \nabla v + b \cdot \nabla w \cdot v \right|$$

$$\leq \left| \int_\Omega \mu \cdot \nabla w \cdot \nabla v \right| + \left| \int_\Omega b \cdot \nabla w \cdot v \right|$$

$$\leq \mu_1 \cdot \underbrace{\left| \int_\Omega \nabla w \, \nabla v \right|}_{= |\langle \nabla w | \nabla v \rangle|^2} + \left| \int_\Omega b \, \nabla w \, v \right|$$

$$\overset{C.S.}{\leq} \mu_1 \cdot \|\nabla w\|_{L^2} \cdot \|\nabla v\|_{L^2} + \left| \int_\Omega \underline{b} \, \underline{\nabla w} \, v \right|$$

$N(a\cdot b) \leq N(a) \cdot N(b)$

$$\leq \mu_1 \cdot \|\nabla w\|_{L^2} \cdot \|\nabla v\|_{L^2} + b_1 \cdot \left| \int_\Omega \nabla w \cdot v \right|$$

$$\overset{C.S.}{\leq} \mu_1 \cdot \|\nabla w\|_{L^2} \cdot \|\nabla v\|_{L^2} + b_1 \cdot \|\nabla w\|_{L^2} \cdot \|v\|_{L^2}$$

Avec l'inégalité de Poincaré : $\|v\|_{L^2} \leq C_p \cdot \|\nabla v\|_{L^2}$ si $v$ n'est pas constante, ce qui est le cas ici car $v|_{\Gamma_1} = 0$, $v|_{\Gamma_2} \neq 0$, alors :

$$\overset{\text{Poincaré}}{\leq} \mu_1 \cdot \|\nabla w\|_{L^2} \cdot \|\nabla v\|_{L^2} + b_1 \cdot C_p \cdot \|\nabla w\|_{L^2} \cdot \|\nabla v\|_{L^2}$$

$$= (\mu_1 + b_1 \cdot C_p) \, \|\nabla w\|_{L^2} \cdot \|\nabla v\|_{L^2}$$

$\Longrightarrow \underline{|a(w,v)| \leq M \cdot \|\nabla w\|_{L^2} \cdot \|\nabla v\|_{L^2} \quad , M = \mu_1 + b_1 \cdot C_p}$ (5)

2) Problème non homogène via problème homogène

Soit $\mathcal{T}_h$ une $\Delta$-gulonisation de $\Omega$, $u_h^d$ la fonction de $X_h = \{ v_h \in C^0(\Omega) : v_h|_{T_i} \in \mathbb{P}_k \ \forall T_i \in \mathcal{T}_h \}$ qui coïncide avec $u^d$ sur $\Gamma_1$ et 0 sur les autres points de maillage.

$$u_h^d = \begin{cases} u^d & \text{sur } \Gamma_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{6}$$

L'approximation du pb. $a(u,v) = F(v)$ est $a(\tilde{u}_h, v_h) = F(v_h)$ , $\tilde{u}_h \in V_h^d = \{ u_h \in X_h : u_h|_{\Gamma_1} = u_h^d \}$, soit $V_h = \{ v_h \in X_h : v_h|_{\Gamma_1} = 0 \}$. Soit :

$$u_h = \tilde{u}_h - u_h^d \tag{7}$$

i.e. on va se ramener au même espace $V_h$ en prenant une fonction quelconque $\in V_h^d$, et écrire la solution cherchée $\tilde{u}_h$ comme la somme d'une fct. $\in V_h$ et de la fct. (relèvement) $\in V_h^d$, ce qui nous ramène au même espace : il faut vérifier que : le pb. se ramène à trouver $u_h \in V_h$ : $\forall v_h \in V_h$ :

$$\begin{cases} a(u_h, v_h) = F^d(v_h) \\ F^d(v_h) = F(v_h) - a(u_h^d, v_h) \end{cases} \tag{8}$$

On a :

$$a(\tilde{u}_h, v_h) = a(u_h + u_h^d, v_h) = a(u_h, v_h) + a(u_h^d, v_h) = F(v_h)$$

$$\Longrightarrow a(u_h, v_h) = \underbrace{F(v_h) - a(u_h^d, v_h)}_{:= F^d(v_h)} \tag{9}$$

Ainsi on a ramené la sol. du pb. non hom. au pb. hom, donc dans la suite on peut supposer sans restriction de généralité que $u^d = 0$ et donc $F^d = F$ , $V_h^d = V_h$ .

## 3) Diffusion numérique

Soit $Q > 0$, soit $v_h, w_h \in X_h$, soit :

$$a_h(w_h, v_h) = a(w_h, v_h) + Q \cdot h \cdot \int_\Omega \nabla w_h \cdot \nabla v_h \, dx \qquad (10)$$

Le pb. avec diffusion numérique est : trouver $u_h \in V_h$ : $\forall v_h \in V_h$ :

$$a_h(u_h, v_h) = F(v_h) \qquad (11)$$

a) A voir : $\forall v_h \in V_h$, $a_h(v_h, v_h) \geq \mu_h \cdot \|\nabla v_h\|^2_{L^2(\Omega)}$, $\mu_h = \mu_0 + Q \cdot h$

On a :

$$a_h(v_h, v_h) = \underbrace{a(v_h, v_h)}_{\mu_0 \cdot \|\nabla v_h\|^2_{L^2(\Omega)}} + Q \cdot h \cdot \int_\Omega \nabla v_h \cdot \nabla v_h \, dx$$

$$\geq \mu_0 \cdot \|\nabla v_h\|^2_{L^2(\Omega)} + Q \cdot h \cdot \underbrace{\int_\Omega \nabla v_h \nabla v_h}_{= |\langle \nabla v_h | \nabla v_h \rangle_{L^2}|^2}$$

$$\mu_0 \cdot \|\nabla v_h\|^2_{L^2(\Omega)} + Q \cdot h \cdot \|\nabla v_h\|^2_{L^2}$$

$$= (\mu_0 + Q \cdot h) \cdot \|\nabla v_h\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\Longrightarrow \underline{a_h(v_h, v_h) \geq \mu_h \|\nabla v_h\|^2_{L^2(\Omega)} \quad , \mu_h = \mu_0 + Q \cdot h} \qquad (12)$$

b) A voir : $v_h \in V_h$, $w_h = v_h - u_h$, alors : $\mu_h \cdot \|\nabla(v_h - u_h)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq a_h(v_h, w_h) - F(w_h)$

$w_h$ représente la différence entre la solution cherchée et $v_h$ la fct. quelconque. On a :

$$\mu_h \cdot \|\nabla(v_h - u_h)\|^2_{L^2} \underset{w_h \in V_h}{\overset{\text{pt. a)}}{\leq}} a_h(v_h - u_h, v_h - u_h)$$

$$= a_h(v_h, v_h - u_h) - a_h(u_h, v_h - u_h)$$

$$= a_h(v_h, w_h) - \underbrace{a_h(u_h, w_h)}_{\overset{\text{def.}}{=} F(w_h)}$$

$$\Longrightarrow \underline{\mu_h \cdot \|\nabla(v_h - u_h)\|^2_{L^2} \leq a_h(v_h, w_h) - F(w_h)} \qquad (13)$$

c) A voir : $\|\nabla(v_h - u_h)\|_{L^2} \leq \frac{1}{\mu_h} \cdot \sup_{w_h \in V_h} \frac{|a_h(v_h, w_h) - a(v_h, w_h)|}{\|\nabla w_h\|_{L^2}} + \frac{M}{\mu_h} \|\nabla(v_h - u)\|_{L^2}$

On a :

$$\|\nabla(v_h - u_h)\|^2_{L^2} \overset{b)}{\leq} \frac{a_h(v_h, w_h) - F(w_h)}{\mu_h}$$

$$= \frac{1}{\mu_h} \cdot \left( a_h(v_h, w_h) - a(u, w_h) \right)$$

$$= \frac{1}{\mu_h} \cdot \left( a_h(v_h, w_h) - a(v_h, w_h) + a(v_h, w_h) - a(u, w_h) \right)$$

$$= \frac{1}{\mu_h} \cdot \left( a_h(v_h, w_h) - a(v_h, w_h) \right) + \frac{1}{\mu_h} \cdot \underbrace{\left( a(v_h, w_h) - a(u, w_h) \right)}_{= a(v_h - u, w_h)}$$

$$\leq \frac{1}{\mu_h} \cdot \left| a_h(v_h, w_h) - a(v_h, w_h) \right| + \frac{1}{\mu_h} \cdot \underbrace{|a(v_h - u, w_h)|}_{\overset{\text{continuité}}{\leq} M \cdot \|\nabla(v_h - u)\|_{L^2} \cdot \|\nabla w_h\|_{L^2}}$$

$$\leq \frac{1}{\mu_h} \cdot \left( a_h(v_h, w_h) - a(v_h, w_h) \right) + \frac{M}{\mu_h} \cdot \|\nabla(v_h - u)\|_{L^2} \cdot \|\nabla w_h\|_{L^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{\|\nabla(v_h - u_h)\|^2_{L^2}}{\|\nabla w_h\|_{L^2}} \leq \frac{1}{\mu_h} \cdot \frac{a_h(v_h, w_h) - a(v_h, w_h)}{\|\nabla w_h\|_{L^2}} + \frac{M}{\mu_h} \cdot \|\nabla(v_h - u)\|_{L^2} \quad , w_h = v_h - u_h$$

$$\Longrightarrow \|\nabla(v_h - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\mu_h} \cdot \frac{a_h(v_h, w_h) - a(v_h, w_h)}{\|\nabla w_h\|_{L^2}} + \frac{M}{\mu_h} \|\nabla(v_h - u)\|_{L^2}$$

$$\Rightarrow \quad \|\nabla(v_h - u_h)\|_{L^2} \leq \frac{1}{\mu_h} \cdot \sup_{w_h \in V_h} \frac{|a_h(v_h,w_h) - a(v_h,w_h)|}{\|\nabla w\|_{L^2}} + \frac{M}{\mu_h} \cdot \|\nabla(v_h - u)\|_{L^2} \qquad (14)$$

d) Lemme de Strang: $\|\nabla(u-u_h)\|_{L^2} \leq \inf_{v_h \in V_h} \left\{ \frac{1}{\mu_h} \sup_{w_h \in V_h} \frac{|a_h(v_h,w_h) - a(v_h,w_h)|}{\|\nabla w_h\|_{L^2}} + \left(1+\frac{M}{\mu_h}\right) \cdot \|\nabla(v_h - u)\|_{L^2} \right\}$

Avec l'inég. du triangle:

$$\|\nabla(u-u_h)\|_{L^2} \leq \|\nabla(u-v_h)\|_{L^2} + \underbrace{\|\nabla(v_h-u_h)\|_{L^2}}_{\overset{c)}{\leq} \frac{1}{\mu_h} \cdot \sup_{w_h \in V_h} \frac{|a_h(v_h,w_h) - a(v_h,w_h)|}{\|\nabla w\|_{L^2}} + \frac{M}{\mu_h} \cdot \|\nabla(v_h-u)\|_{L^2}}$$

$$\leq \frac{1}{\mu_h} \cdot \sup_{w_h \in V_h} \frac{|a_h(v_h,w_h) - a(v_h,w_h)|}{\|\nabla w\|_{L^2}} + \left(1+\frac{M}{\mu_h}\right) \cdot \|\nabla(v_h-u)\|_{L^2} \qquad \forall v_h \in V_h$$

$$\Rightarrow \quad \|\nabla(u-u_h)\|_{L^2} \leq \inf_{v_h \in V_h} \left\{ \frac{1}{\mu_h} \sup_{w_h \in V_h} \frac{|a_h(v_h,w_h) - a(v_h,w_h)|}{\|\nabla w\|_{L^2}} + \left(1+\frac{M}{\mu_h}\right) \cdot \|\nabla(v_h-u)\|_{L^2} \right\} \qquad (15)$$

4) Estimations de l'erreur commise

a) A voir: $\forall w_h \in V_h$ on a: $\frac{|a_h(v_h,w_h) - a(v_h,w_h)|}{\|\nabla w_h\|_{L^2}} \leq Q \cdot h \cdot \|\nabla v_h\|_{L^2(\Omega)}$

Par le point 3), on a par définition de l'introduction de la diffusion numérique:

$$|a_h(v_h,w_h) - a(v_h,w_h)| = \left| Q \cdot h \cdot \int_\Omega \underline{\nabla} v_h \cdot \underline{\nabla} w_h \right|$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|a_h(v_h,w_h) - a(v_h,w_h)|}{\|\nabla w\|_{L^2}} = \frac{Q \cdot h}{\|\nabla w\|_{L^2}} \left| \int_\Omega \nabla v_h \nabla w_h \right|$$

$$\overset{c.s.}{\leq} \frac{Q \cdot h}{\|\nabla w\|_{L^2}} \cdot \|\nabla v_h\| \cdot \|\nabla w_h\|_{L^2}$$

$$= Q \cdot h \cdot \|\nabla v_h\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|a_h(v_h,w_h) - a(v_h,w_h)|}{\|\nabla w\|_{L^2}} \leq Q \cdot h \cdot \|\nabla v_h\|_{L^2(\Omega)} \qquad (16)$$

b) Erreur commise par résolution de $a_h(u_h,v_h) = F(v_h)$: $\|\nabla(u-u_h)\|_{L^2} \leq C_3 \cdot \left\{ \left(1+\frac{M}{\mu_h}\right) \cdot |u|_{H^{k+1}(\Omega)} + \frac{Q}{\mu_h} \cdot \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \cdot h \right\}$

Soit $\Pi_h u$ l'interpolée de $u$ dans $V_h$, alors un résultat sur l'interpolation, avec $|\cdot|$ la semi-norme:

$$\|\nabla(\Pi_h u - u)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \cdot |u|_{H^{k+1}(\Omega)} \cdot h^k \quad , C_1 > 0 \quad , C_1 \neq C_1(h) \qquad (17)$$

$$\|\nabla(\Pi_h u)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 \cdot \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \qquad (18)$$

Ce résultat (15) étant vrai $\forall v_h$ (car on prend l'infimum), ce résultat est en particulier vrai pour l'interpolée $\Pi_h u$:

$$\|\nabla(u-u_h)\|_{L^2} \leq \frac{1}{\mu_h} \cdot \underbrace{\frac{|a_h(\Pi_h u,w_h) - a(\Pi_h u,w_h)|}{\|\nabla w\|_{L^2}}}_{\overset{(16)}{\leq} Q \cdot h \cdot \|\nabla \Pi_h u\| \overset{(18)}{\leq} Q \cdot h \cdot C_2 \cdot \|\nabla u\|_{L^2}} + \left(1+\frac{M}{\mu_h}\right) \cdot \underbrace{\|\nabla(\Pi_h u - u)\|_{L^2}}_{\overset{(17)}{\leq} C_1 \cdot |u|_{H^{k+1}} \cdot h^k}$$

$$\leq C_1 \cdot \left(1+\frac{M}{\mu_h}\right) \cdot |u|_{H^{k+1}} \cdot h^k + C_2 \cdot \frac{Q \cdot h}{\mu_h} \cdot \|\nabla u\|_{L^2} \quad , C_3 = \max\{C_1, C_2\}$$

$$\leq C_3 \cdot \left\{ \left(1+\frac{M}{\mu_h}\right) \cdot |u|_{H^{k+1}} \cdot h^k + \frac{Q}{\mu_h} \cdot \|\nabla u\|_{L^2} \cdot h \right\}$$

$$\Longrightarrow \quad \|\nabla(u-u_h)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3 \cdot \left[ \left(1+\frac{M}{\mu_h}\right) \cdot |u|_{H^{k+1}} \cdot h^k + \frac{Q}{h} \cdot \|\nabla u\|_{L^2} \cdot h \right] \quad (19)$$

## 5) Remarques

Par exemple, si $Q = 0$ alors on n'a pas de diffusion numérique et on a des E.F. non stabilisés :

$$\|\nabla(u-u_h)\|_{L^2} \leq C \cdot \left(1+\frac{M}{\mu}\right) \cdot |u| \cdot h^k \qquad , M = b \quad , \frac{b}{\mu} \gg 1$$

Par contre, avec la viscosité numérique :

$$\|\nabla(u-u_h)\|_{L^2} \leq C \cdot \left(1+\frac{M}{\mu+Q\cdot h} \cdot |u| \cdot h^k + \frac{Q}{\mu+Q\cdot h} \|\nabla u\| \cdot h\right)$$

avec $k=1$, on a le même ordre en $h^1$ : la diffusion numérique ne domine pas. Avec $k \geq 2$, on a tjs une erreur d'ordre $h^1$ due à la diffusion numérique, donc cela ne sert à rien de rajouter des $k > 1$.

# 4ème série

**Exercice 1 (équation des ondes)**
Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ avec $\alpha < \beta$. On se donne deux fonctions régulières $u_0$ et $v_0 : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ et on considère l'équation des ondes

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \gamma^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & = & 0, \qquad t > 0, \quad x \in [\alpha, \beta], \\ u(0,x) & = & u_0(x), \qquad x \in [\alpha, \beta], \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) & = & v_0(x), \qquad x \in [\alpha, \beta], \\ u(t,\alpha) & = & 0, \qquad t > 0, \\ u(t,\beta) & = & 0 \qquad t > 0. \end{array} \right. \tag{1}$$

**1)** En multipliant l'équation des ondes par $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ et en intégrant, montrer que

$$\|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\|^2_{L^2(\alpha,\beta)} + |\gamma|^2 \|\frac{\partial u}{\partial x}(t)\|^2_{L^2(\alpha,\beta)} = \|v_0\|^2_{L^2(\alpha,\beta)} + |\gamma|^2 \|\frac{\partial u_0}{\partial x}\|^2_{L^2(\alpha,\beta)}$$

En déduire que si (1) admet une solution, celle-ci est unique.

**2)** On pose $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2)^T$ avec $\omega_1 = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ et $\omega_2 = \dfrac{\partial u}{\partial t}$. Vérifier que l'équation des ondes est équivalente à un système hyperbolique du premier ordre, c'est à dire de la forme

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + A\cancel{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0,$$

où $A$ est une matrice diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

**3)** On note $T$ une matrice telle que $\Lambda = T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ et on pose $\boldsymbol{\chi} = (\chi_1, \chi_2)^T = T^{-1}\boldsymbol{\omega}$, ($\chi_1$ et $\chi_2$ sont les *variables caractéristiques*). Vérifier que

$$\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial x} = 0,$$

et exprimer $\chi_1$ et $\chi_2$ en fonction de $u_0$ et $v_0$.

**4)** En revenant aux variables $\omega_1$ et $\omega_2$, en déduire que la solution de l'équation des ondes est donnée par

$$u(x,t) = \frac{u_0(x - \gamma t) + u_0(x + \gamma t)}{2} + \frac{1}{2\gamma} \int_{x-\gamma t}^{x+\gamma t} v_0(s)\, ds.$$

**Exercice 2 (Schémas aux différences finies pour l'équation de transport)**
On se donne $c > 0$ et on considère l'équation de transport avec conditions aux limites périodiques :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} & = & 0 \text{ pour } (x,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) & = & u_0(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R}, \\ u(1,t) & = & u(0,t), \text{ pour } t \in \mathbb{R}_+, \end{array} \right. \tag{2}$$

avec $u_0(x) = e^{i2k\pi x}$, où $k \in \mathbb{Z}$ et $i^2 = -1$.

**1)** Déterminer la solution analytique de (2).

**2)** On se donne une grille sur le domaine $[0,1] \times \mathbb{R}_+$, de pas $\Delta x$ en espace, avec $\Delta x = 1/M$, $M \in \mathbb{N}$ et $\Delta t$ en temps : $x_j = j\Delta x$, $j = 0, ..., M$, et $t_n = n\Delta t$. On note $u_j^n$ une approximation de $u(x_j, t_n)$. Dans toute l'exercice, on pose $u_j^0 = u_0(x_j)$ et $u_0^n = u_M^n$.
On considère le schéma suivant, appelé schéma d'Euler explicite (ou "progressif") centré :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \tag{3}$$

Si $v$ est une solution régulière du problème continu, on définit l'*erreur de troncature* par

$$\left| \frac{v(x_j, t_{n+1}) - v(x_j, t_n)}{\Delta t} + c\frac{v(x_{j+1}, t_n) - v(x_{j-1}, t_n)}{2 \cdot \Delta x} \right|$$

Si l'erreur de troncature est un $\mathcal{O}(\Delta x^p, \Delta t^q)$ on dit que le schéma est précis à l'ordre $q$ en temps et $p$ en espace. Montrer que le schéma (3) est d'ordre 1 en temps et 2 en espace.

**3)** Pour les schémas envisagés dans cet exercice, on vérifie facilement qu'il existe un $\lambda_k \in \mathbb{C}$ tel que

$$u_j^{n+1} = \lambda_k u_j^n.$$

On dira que le schéma est *stable* si, pour tout $k$, $|\lambda_k| \leq 1$. Le schéma (3) est-il stable ?

**4)** Reprendre les deux questions précédentes (en adaptant la définition de l'erreur de troncature) avec le schéma d'Euler explicite décentré :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0.$$

**5)** Faire de même avec le schéma de Lax-Wendroff :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{c^2 \Delta t}{2}\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0\ .$$

Exercice 2

(1) $u(x,t) = u_0(x-ct) = e^{2ik\pi(x-ct)}$ (rq : $|u(x,t)| = 1$)

(2) $\dfrac{u(x_j,t_{n+1}) - u(x_j,t)}{\Delta t} = \partial_t u(x_j,t_n) + O(\Delta t)$

$\dfrac{u(x_{j+1},t_n) - u(x_{j-1},t)}{2\Delta x} = \partial_x u(x_j,t_n) + O(\Delta x^2)$

L'erreur de troncature est donc en $O(\Delta t + \Delta x^2)$.

(3) $u_j^{n+1} = -\frac{\nu}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + u_j^n$ avec $\nu = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$.

$u_j^n = \gamma_k^n u_j^0 = \gamma_k^n e^{ij\xi_k}$ avec $\xi_k = 2k\pi\Delta x$.

d'où $\gamma_k = -\frac{\nu}{2}(e^{i\xi_k} - e^{-i\xi_k}) + 1 = 1 - i\nu\sin\xi_k$

$|\gamma_k| = 1 + \nu^2\sin^2\xi_k$.

Ainsi, $\exists\, \xi_k \,/\, |\gamma_k| > 1$. Le schéma centré est donc instable.

(4) On a $\dfrac{u(x_j,t^n) - u(x_{j-1},t^n)}{\Delta x} = O(\Delta x) + \partial_x u$

Le schéma est donc précis à l'ordre 1 en temps et en espace.

$u_j^{n+1} = u_j^n - \nu(u_j^n - u_{j-1}^n)$

$\gamma_k = 1 - \nu(1 - e^{-i\xi_k}) = 1 + \nu(\cos\xi_k - 1) - i\nu\sin\xi_k$.

$|\gamma_k|^2 = [1 + \nu(\cos\xi_k - 1)]^2 + \nu^2\sin^2\xi_k$.

$= [\nu\cos\xi_k - (\nu-1)]^2 + \nu^2\sin^2\xi_k = 2\nu^2 - 2\nu + 1 - 2(\nu-1)\nu\cos\xi_k$

$= 1 - 2\nu(1-\nu)(1-\cos\xi_k)$

$|\gamma_k|^2 \leq 1 \iff 0 \leq 2\nu(1-\nu)(1-\cos\xi_k) \iff \boxed{\nu \leq 1}$.

(5) $u_j^{n+1} = u_j^n + \partial_t u\,\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2}\partial_{tt} u + O(\Delta t^3)$

or $\partial_t u + c\,\partial_x u = 0$ d'où $\partial_{tt} u + c\,\partial_{xt} u = 0$

$\partial_{xt} u + c\,\partial_{xx} u = 0$

d'où $\partial_{tt} u = c^2\partial_{xx} u$

on en déduit : $u(x_j,t^{n+1}) = u(x_j,t^n) + \partial_t u\,\Delta t + \frac{c^2\Delta t^2}{2}\partial_{xx} u + O(\Delta t^3)$

or $\partial_{xx} u = \dfrac{u(x_{j+1},t_n) - 2u(x_j,t_n) + u(x_{j-1},t_n)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$

d'où $u(x_j,t^{n+1}) = u(x_j,t^n) + \partial_t u\,\Delta t + \frac{c^2\Delta t^2}{2\Delta x^2}\big(u(x_{j+1},t_n) - 2u(x_j,t_n) + u(x_{j-1},t_n)\big) + O(\Delta x^2)\Delta t^2 + O(\Delta t^3)$

d'où :

$\dfrac{u(x_j,t^{n+1}) - u(x_j,t^n)}{\Delta t} - \dfrac{c^2\Delta t}{2}\,\dfrac{u(x_{j+1},t^n) - 2u(x_j,t^n) + u(x_{j-1},t^n)}{\Delta x^2}$

$= \partial_t u + O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$

$= -c\,\partial_x u + O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$

$= -c\,\dfrac{u(x_{j+1},t_n) - u(x_{j-1})}{2\Delta x} + O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$.

Le schéma de Lax-Wendroff est donc d'ordre 2 en temps et en espace.

Stabilité : (on note $\gamma_k$ "$\gamma$" et $\xi_k$ "$\xi$".)

$\dfrac{\gamma - 1}{\Delta t} + \dfrac{c}{\Delta x} i\sin\xi - \dfrac{c^2\Delta t}{2\Delta x^2}(2\cos\xi - 2) = 0$.

$\gamma = 1 + \nu^2(\cos\xi - 1) - \nu i\sin\xi$

$|\gamma|^2 = [1 + \nu^2(\cos\xi - 1)]^2 + \nu^2\sin^2\xi$

$= \dots = 1 + (1-\cos\xi)(2\nu^4 - 2\nu^2) + (\nu^2 - \nu^4)(1-\cos^2\xi)$

$= 1 - \nu^2(1-\nu^2)(2 - 2\cos\xi - 1 + \cos^2\xi)$

$= 1 - \nu^2(1-\nu^2)(\cos\xi - 1)^2$

d'où $|\gamma|^2 \leq 1 \iff \nu^2(1-\nu^2)(\cos\xi - 1)^2 \geq 0$

$\iff \boxed{\nu \leq 1}$

4ème série. (corrigé).

**Exercice 1**

(1) * $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\alpha^\beta |\partial_t u|^2 - \underbrace{\gamma^2\int_\alpha^\beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial t}}_{\frac{\gamma^2}{2}\frac{d}{dt}\int_\alpha^\beta\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 - \frac{\gamma^2}{2}\left[\partial_x u\,\partial_t u\right]_\alpha^\beta} = \int_\alpha^\beta f\,\partial_t u$

d'où $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\partial_t u\|^2_{L^2} + \gamma^2\|\partial_x u\|^2_{L^2}\right) = 0$

d'où le résultat en intégrant entre $t=0$ et $t$.

* unicité : si $v$ et $w$ sont 2 solutions de (1), on a par linéarité, en posant $u = v - w$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \gamma^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(0,x) = 0 \\ \partial_t u(0,x) = 0 \end{cases}$$

le calcul précédent donne $\|\partial_t u\|^2_{L^2} + \gamma^2\|\partial_x u\|^2_{L^2} = 0$

d'où $u = 0$, i.e. $w = v$.

(2) $\frac{\partial \omega_2}{\partial t} = \gamma^2\frac{\partial \omega_1}{\partial x}$ et $\frac{\partial \omega_1}{\partial t} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x}$ d'où $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\gamma^2 & 0\end{bmatrix}$

$Sp\,A = \{\gamma, -\gamma\}$ $\quad T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\gamma & \gamma\end{bmatrix}$ $\quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2\gamma \\ 1/2 & 1/2\gamma\end{bmatrix}$

$\Lambda = \operatorname{diag}(\gamma, -\gamma) = T^{-1}AT$

$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1 \\ \mathcal{X}_2\end{bmatrix} = T^{-1}\Lambda = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\omega_1 - \frac{1}{2\gamma}\omega_2 \\ \frac{1}{2}\omega_1 + \frac{1}{2\gamma}\omega_2\end{bmatrix}$

$\partial_t\omega + A\partial_x\omega = 0 \Rightarrow \partial_t T^{-1}\omega + T^{-1}AT\,\partial_x(T^{-1}\omega) = 0$

$\Rightarrow \partial_t\mathcal{X} + \Lambda\partial_x\mathcal{X} = 0$

$\frac{\partial \mathcal{X}_1}{\partial t} + \gamma\frac{\partial \mathcal{X}_1}{\partial x} = 0 \Rightarrow \mathcal{X}_1(x,t) = \mathcal{X}_1(x-\gamma t, 0)$

$\frac{\partial \mathcal{X}_2}{\partial t} - \gamma\frac{\partial \mathcal{X}_2}{\partial x} = 0 \Rightarrow \mathcal{X}_2(x,t) = \mathcal{X}_2(x+\gamma t, 0)$

d'où $\mathcal{X}_1(x,t) = \frac{1}{2}u_0'(x-\gamma t) - \frac{1}{2\gamma}v_0(x-\gamma t)$

$\mathcal{X}_2(x,t) = \frac{1}{2}u_0'(x+\gamma t) + \frac{1}{2\gamma}v_0(x+\gamma t)$

(3) $\omega = T\mathcal{X}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \omega_1 = \frac{1}{2}\left[u_0'(x+\gamma t) + u_0'(x-\gamma t)\right] + \frac{1}{2\gamma}\left[v_0(x+\gamma t) - v_0(x-\gamma t)\right]$

d'où, en intégrant par rapport à $x$, à $t$ fixé :

(*) $u(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_0(x+\gamma t) + u_0(x-\gamma t)\right] + \frac{1}{2\gamma}\int_{x-\gamma t}^{x+\gamma t} v_0(\xi)\,d\xi + C(t)$

où $C(t)$ est une fonction de $t$ à déterminer.

Or, $\frac{\partial u}{\partial t} = \omega_2 = \frac{\gamma}{2}\left[u_0'(x+\gamma t) - u_0'(x-\gamma t)\right] + \frac{1}{2}\left[v_0(x+\gamma t) + v_0(x-\gamma t)\right]$

et en dérivant (*) par rapport à $t$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\gamma}{2}\left[u_0'(x+\gamma t) + u_0'(x-\gamma t)\right] + \frac{1}{2}\left[v_0(x+\gamma t) + v_0(x-\gamma t)\right] + C'(t)$$

d'où $C'(t) = 0$

$C(t) = \text{Cste} = 0$ (avec les conditions initiales).

# Analyse numérique des EDP : Série 4 : Pb. hyperboliques

## Exercice 1 : Equation des ondes

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 &&, t>0 \quad , x \in I = [\alpha,\beta] \\
&u(0,x) = u_0(x) &&, x \in I \\
&\partial_t u(0,x) = v_0(x) &&, x \in I \\
&u(t,\alpha) = u(t,\beta) = 0 &&, t>0
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

### 1) Unicité de la solution

On multiplie l'éqn. par $\frac{\partial u}{\partial t}$ puis on intègre :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} - \gamma^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\int_I \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t}}_{= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right)} - \gamma^2 \int_I \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} = \text{cte}\cancel{(t)}^{?=0}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t} \int_I \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} - \gamma^2 \cdot \underbrace{\int_I \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{b''} \cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{a}} = \text{c}\cancel{te}(t)^{?=0}$$

$$= -\int_I a'b' + ab'\Big|_\alpha^\beta$$

$$= -\int_I \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_\alpha^\beta}_{=0 \text{ car } u(t,\alpha) = u(t,\beta) = 0 \Rightarrow \partial_t \ldots = 0}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t} \int_I \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \gamma^2 \cdot \int_I \underbrace{\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)}_{= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}}_{= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)} = \text{cte}(t)$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t} \int_I \underbrace{\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \gamma^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)}_{A(t)} = \text{cte}\cancel{(t)}^{?=0}$$

$$\Longrightarrow A(t) = A(t=0)$$

$$\Longrightarrow \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2}^2 + \gamma^2 \cdot \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^2}^2 = \| v_0 \|_{L^2}^2 + \gamma^2 \left\| \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\|_{L^2}^2 \quad (2)$$

Vérifions avec (2) l'unicité de la solution. Soient $u, v$ 2 solutions de (1). Alors ces 2 sol. doivent vérifier (2), en écrivant (2) pour $u$ et $v$ et en prenant la différence des éqn. on obtient :

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2}^2 + \gamma^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^2}^2 = \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{L^2}^2 + \gamma^2 \left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2}^2 \quad (3)$$

Dans un premier temps, on va montrer que si 2 sol. sont lin.dép., i.e. $u = \lambda(t) \cdot v$, alors $\lambda(t) = 1$. Comme $u$ et $v$ sont sol. de (1), donc vérifient les m̃. C.I et C.B., il faut que :

$$\begin{cases} u(t=0, x) = u_0(x) \\ \lambda(t=0) \cdot u(t=0, x) = u_0(x) \end{cases} \Longrightarrow \lambda(t=0) = 1 \quad (4)$$

$$\begin{cases} \partial_t u(0,x) = v_0(x) \\ \partial_t (\lambda \cdot u)_{t=0} = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial t} \cdot u + \lambda \cdot \frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = v_0(x) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\lambda(t))\Big|_{t=0} \cdot u_0(x) + \underbrace{\lambda(t=0)}_{\overset{(4)}{=}1} \cdot v_0(x) = v_0(x)$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\lambda(t=0)\right)\Big|_{t=0} u_0(x) = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda(t) = cte|_t = cte \in \mathbb{R}$$

Par la linéarité de (1), on a que $\lambda = 1$. Donc si 2 sol. sont lin. dép. dans $L^2(I)$, alors $\lambda = 1$.

Si on montre que $\nexists$ de sol. lin. indép , alors on a démontré l'unicité des sol. de (1).

Soient $u, v$ 2 sol. lin. indépendantes, alors l'espace vectoriel $\mathbb{V}$ des solutions est de dimension $\dim(\mathbb{V}) \geqslant 2$. On peut toujours écrire cet espace comme :

$$\mathbb{V} = \mathbb{U} \boxplus \mathbb{W} \qquad (5)$$

$$\mathbb{U} = \text{vect}\{u\}$$

si on arrive à montrer que $\dim \mathbb{W} = 0$, alors on a l'unicité. Soit $v \in \mathbb{W}$, $\text{vect}(v) \subseteq \mathbb{W}$, alors $u \perp_{L^2} v$, et comme la norme de $L^2(I)$ découle du P.S de $L^2(I)$, qui est linéaire:

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2}^2 = \left\langle \frac{\partial u}{\partial t} \,\middle|\, \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle$$

Ainsi on remarque que :

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2}^2 - \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{L^2}^2 = \left\langle \frac{\partial u}{\partial t} \,\middle|\, \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial v}{\partial t} \,\middle|\, \frac{\partial v}{\partial t} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial t} \,\middle|\, \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \right\rangle - \underbrace{\left\langle \frac{\partial u}{\partial t} \,\middle|\, \frac{\partial v}{\partial t} \right\rangle}_{=0 \text{ par } \perp} + \underbrace{\left\langle \frac{\partial v}{\partial t} \,\middle|\, \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle}_{=0 \text{ par } \perp}$$

$$= \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(u-v) \,\middle|\, \frac{\partial}{\partial t}(u+v) \right\rangle \qquad (6)$$

De même pour $\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2$, et (2) devient :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}(u-v) \,\middle|\, \frac{\partial}{\partial t}(u+v) \right\rangle + \gamma^2 \cdot \left\langle \frac{\partial}{\partial x}(u-v) \,\middle|\, \frac{\partial}{\partial x}(u+v) \right\rangle = 0 \qquad \forall x, t$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} u = v \\ u = -v \quad : \text{exclu car } \lambda = +1 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ $u = v$

$\Longrightarrow$ contradiction avec l'hyp. que $v \in \mathbb{W}$

$\Longrightarrow$ $\mathbb{W} = \mathbb{U}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dim(\mathbb{W}) = 0 \\ \dim(\mathbb{U}) = 1 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ l'esp. vect. des sol. est de dim 1, et de plus toutes les sol. de (1) lin. dép. de $u$ apparaissent avec le facteur $\lambda = 1$

$\Longrightarrow$ $\exists!$ solution à (1).

## 2) Reformulation du problème

Soit :

$$\underline{\omega} = (\omega_1, \omega_2) \quad ; \omega_1 = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \omega_2 = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad (7)$$

A voir :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \iff \frac{\partial \omega}{\partial t} + A \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \qquad (8)$$

(7) dans l'éqn. (1) $\Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial t} \omega_2 - \gamma^2 \frac{\partial}{\partial x} \omega_1 = 0 \qquad (9)$$

En développant l'éqn. proposée :

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial t} + a_{11} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \qquad (10)$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial t} + a_{21} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial \omega_2}{\partial x} = 0 \qquad (11)$$

(9) et (11) $\Rightarrow$

$$a_{22} = 0 \quad ; \quad a_{21} = -\gamma^2 \qquad (12)$$

En développant (10) on a :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + a_{11} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0 \qquad \forall x, t \qquad (13)$$

Comme cette relation doit être vraie $\forall x, t$, alors :

$$a_{11} = 0 \quad ; \quad a_{12} = -1 \qquad (14)$$

$\Rightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\gamma^2 & 0 \end{pmatrix} \qquad (15)$$

3) Reformulation

Soit $\Lambda = T^{-1} A T = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, soit $x = (x_1, x_2)^t = T^{-1} \omega$, alors on diagonalise $A$ :

$$\det(A - \lambda \cdot I_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ -\gamma^2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \gamma^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \gamma \qquad (16)$$

Vecteurs propres : $\lambda_1 = +\gamma$ :

$$\begin{pmatrix} -\gamma & -1 \\ -\gamma^2 & -\gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\gamma \cdot x_1 - x_2 = 0 \\ -\gamma^2 \cdot x_1 - \gamma x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = -\gamma \cdot x_1 \\ -\gamma^2 \cdot x_1 + \gamma^2 \cdot x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\gamma \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{\lambda_1} = (1, -\gamma)$$

$\lambda_2 = -\gamma$

$$\begin{cases} \gamma \cdot x_1 - x_2 = 0 \\ -\gamma^2 \cdot x_1 + \gamma \cdot x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \gamma \cdot x_1 \\ -\gamma^2 \cdot x_1 + \gamma^2 \cdot x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = +\gamma \end{cases}$$

$$V_{\lambda_2} = (1, \gamma)$$

Ainsi :

$$T = \left( V_{\lambda_1} \,\vdots\, V_{\lambda_2} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\gamma & \gamma \end{pmatrix} \qquad (17)$$

$$T^{-1} = \frac{1}{\det T} \cdot \begin{pmatrix} \gamma & -1 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\gamma} \cdot \begin{pmatrix} \gamma & -1 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} \qquad (18)$$

Soit :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\gamma} \begin{pmatrix} \gamma & -1 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\gamma} \begin{pmatrix} \gamma \cdot \omega_1 - \omega_2 \\ \gamma \cdot \omega_1 + \omega_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\gamma} \begin{pmatrix} \gamma \cdot \omega_1 - \omega_2 \\ \gamma \cdot \omega_1 + \omega_2 \end{pmatrix} \qquad (19)$$

Alors :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + A \cdot \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial t} + T \Lambda T^{-1} \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow T^{-1} \frac{\partial w}{\partial t} + \Lambda T^{-1} \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left( T^{-1} w \right) + \Lambda \frac{\partial}{\partial x} \left( T^{-1} w \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \chi + \Lambda \cdot \frac{\partial}{\partial x} \chi = 0 \qquad (20)$$

On a donc découplé nos équations :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial \chi_1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial \chi_1}{\partial x} = 0 \longrightarrow \chi_1(x,t) = \chi_1(x - \lambda_1 \cdot t) = \chi_1^\circ (x - \lambda_1 \cdot t) \\ \frac{\partial \chi_2}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial \chi_2}{\partial x} = 0 \longrightarrow \chi_2(x,t) = \chi_2(x - \lambda_2 \cdot t) = \chi_2^\circ (x - \lambda_2 \cdot t) \end{array}\right\} \quad (21)$$

Avec : (19) $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \chi_1(0) = \frac{1}{2\gamma} \cdot \left( \gamma \overbrace{\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{t=0}}^{= \frac{\partial u_0}{\partial x}} - \overbrace{\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}}^{= V_0(x)} \right) = \frac{1}{2\gamma} \cdot \left( \gamma \frac{\partial u_0}{\partial x} - V_0(x) \right) \\ \chi_2(0) = \frac{1}{2\gamma} \cdot \left( \gamma \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{t=0} + \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} \right) = \frac{1}{2\gamma} \left( \gamma \cdot \frac{\partial u_0}{\partial x} + V_0(x) \right) \end{array}\right\} \quad (22)$$

4) <u>Solution de l'éqn. des ondes</u>

(21), (22) $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \chi_1(x,t) = \chi_1^\circ (x - \lambda_1 \cdot t) = \frac{1}{2\gamma} \left( \gamma \frac{\partial u_0}{\partial x} (x - \lambda_1 \cdot t) - V_0 (x - \lambda_1 \cdot t) \right) \\ \chi_2(x,t) = \chi_2^\circ (x - \lambda_2 \cdot t) = \frac{1}{2\gamma} \cdot \left( \gamma \frac{\partial u_0}{\partial x} (x - \lambda_2 \cdot t) + V_0 (x - \lambda_2 \cdot t) \right) \end{array}\right\} \quad (23)$$

Avec :

$$\chi(x,t) = T^{-1} w = \frac{1}{2\gamma} \begin{pmatrix} \gamma & -1 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\gamma} \begin{pmatrix} \gamma \cdot w_1 - w_2 \\ \gamma \cdot w_1 + w_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\gamma} \cdot \begin{pmatrix} \gamma \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} \\ \gamma \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (24)$$

(23) et (24) $\Rightarrow$

$$\gamma \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} = \gamma \frac{\partial u_0}{\partial x} (x - \lambda_1 \cdot t) - V_0 (x - \lambda_1 \cdot t) \qquad (25)$$

$$\gamma \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = \gamma \frac{\partial u_0}{\partial x} (x - \lambda_2 \cdot t) + V_0 (x + \lambda_2 \cdot t) \qquad (26)$$

(25) + (26) $\Rightarrow$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} (x - \gamma \cdot t) + \frac{\partial u_0}{\partial x} (x + \gamma \cdot t) \right) + \frac{1}{2\gamma} \cdot \left( V_0 (x + \gamma \cdot t) - V_0 (x - \gamma \cdot t) \right) \qquad (27)$$

(26) − (25) $\Rightarrow$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\gamma}{2} \cdot \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} (x + \gamma \cdot t) - \frac{\partial u_0}{\partial x} (x - \gamma \cdot t) \right) + \frac{1}{2} \left( V_0 (x + \gamma \cdot t) - V_0 (x - \gamma \cdot t) \right) \qquad (28)$$

En $t$ fixé avec (27) on a :

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \left( u_0 (x - \gamma \cdot t) + u_0 (x + \gamma \cdot t) \right) + \frac{1}{2\gamma} \cdot \left( \int_0^{x+\gamma t} V_0(s)\, ds - \int_0^{x-\gamma t} V_0(s)\, ds \right) + \text{cte}(t)$$

$$= \frac{1}{2} \left( u_0 (x - \gamma t) + u_0 (x + \gamma t) \right) + \frac{1}{2\gamma} \int_{x-\gamma t}^{x+\gamma t} V_0(s)\, ds + \text{cte}(t) \qquad (29)$$

En dérivant (29) par rapport à $t$ : $\frac{\partial}{\partial t} = -\gamma \frac{\partial}{\partial x}$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\gamma}{2} \cdot \left( -\frac{\partial u_0}{\partial x} (x - \gamma t) + \frac{\partial u_0}{\partial x} (x + \gamma t) \right) + \frac{\partial \text{cte}(t)}{\partial t} + \frac{1}{2\gamma} \cdot \gamma \left( V_0 (x + \gamma t) - V_0 (x - \gamma t) \right)$$

$$= \frac{\partial \text{cte}(t)}{\partial t} + \frac{\gamma}{2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} (x + \gamma t) - \frac{\partial u_0}{\partial x} (x - \gamma t) \right) + \frac{1}{2} \left( V_0 (x + \gamma t) - V_0 (x - \gamma t) \right) \qquad (30)$$

En comparant (30) et (28), on en conclut que $Cte(t) = Cte \in \mathbb{R}$ $\forall x, t$, de plus avec la C.I. qui dit que $u(0,x) = u_0(x)$, alors $Cte = 0$, donc :

$$\left|\begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \gamma^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & , t > 0, \quad x \in I = [\alpha, \beta] \\ u(0,x) = u_0(x) & , x \in I \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = V_0(x) & , x \in I \\ u(t,x) = 0 \quad \forall x \in \partial I & \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \quad u(x,t) = \frac{u_0(x-\gamma t) + u_0(x+\gamma t)}{2} + \frac{1}{2\gamma}\int_{x-\gamma t}^{x+\gamma t} V_0(s)\,ds \qquad (31)$$

## Exercice 2 : différences finies pour l'équation de transport

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & , (x,t) \in [0,1] \times \mathbb{R} \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \\ u(1,t) = u(0,t) & t \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \quad (1)$$

$$u_0(x) = e^{2\pi i k x} \quad , k \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

### 1) Solution analytique

On pose :

$$u(x,t) = u_0(x - c \cdot t) \quad (3)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = -c \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = -c \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + c \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Soit $u_0(x) = e^{2\pi i k x}$, alors :

$$u_0(x - c \cdot t) = u(x,t) = e^{2\pi i k (x - c \cdot t)} \quad (4)$$

et : $|u(x,t)| = 1$.

### 2) Erreurs de troncature

Soit le schéma de Euler progressif :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \cdot \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2 \cdot \Delta x} = 0 \quad (5)$$

$$u_j^n \simeq u(x_j, t_n)$$

Soit $V$ une solution du problème continu (1), alors on définit l'erreur de troncature par :

$$\left| \frac{V(x_j, t_{n+1}) - V(x_j, t_n)}{\Delta t} + c \cdot \frac{V(x_{j+1}, t_n) - V(x_{j-1}, t_n)}{2 \cdot \Delta x} \right| \quad (6)$$

On va voir que le schéma (5) est d'ordre 1 en temps et 2 en espace :

$$V(t_{n+1}, x_j) - V(t_n, x_j) \overset{D.L.}{=} V(t_n, x_j) + \Delta t \cdot \partial_t V(t_n, x_j) + O(\Delta t^2) - V(t_n, x_j)$$

$$= \Delta t \cdot \partial_t V(t_n, x_j) + O(\Delta t^2) \quad (7)$$

$$V(x_{j+1}, t_n) = V(x_j, t_n) + \Delta x \, \partial_x V(x_j, t_n) + \frac{\Delta x^2}{2} \partial^2_{xx} V(x_j, t_n) + O(\Delta x^3) \quad (8)$$

$$V(x_{j-1}, t_n) = V(x_j, t_n) - \Delta x \, \partial_x V(x_j, t_n) + \frac{\Delta x^2}{2} \partial^2_{xx} V(x_j, t_n) + O(\Delta x^3) \quad (9)$$

Alors :

$$\frac{(7)}{\Delta t} + c \cdot \frac{(8)-(9)}{2 \cdot \Delta x} = \frac{\Delta t \cdot \partial_t V(t_n, x_j) + O(\Delta t^2)}{\Delta t} + c \cdot \frac{2 \cdot \Delta x \cdot \partial_x V(x_j, t_n) + O(\Delta x^3)}{2 \cdot \Delta x}$$

$$= \partial_t V(t_n, x_j) + \frac{O(\Delta t^2)}{\Delta t} + c \cdot \partial_x V(x_j, t_n) + \frac{O(\Delta x^3)}{\Delta x}$$

$$= \underbrace{\partial_t V(t_n, x_j) + c \cdot \partial_x V(x_j, t_n)}_{=0} + O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$$

$$= O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$$

#

### 3) Stabilité du schéma

En partant du schéma de Euler progressif :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{c}{2}\cdot\frac{\Delta t}{\Delta x}\cdot\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) \quad (10)$$

Avec : $$u_j^0 = u_0(x_j) = u_0(j\cdot\Delta x) = e^{2\pi i k j \Delta x} := e^{i\xi_k\cdot j} \quad ; \xi_k = 2\cdot\pi\cdot k\cdot\Delta x \quad (11)$$

(10) et (11) $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
u_j^1 &= u_j^0 - \frac{c}{2}\cdot\frac{\Delta t}{\Delta x}\cdot\left(u_{j+1}^0 - u_{j-1}^0\right)\\
&= e^{i\xi_k\cdot j} - \frac{c}{2}\cdot\frac{\Delta t}{\Delta x}\cdot\left(e^{i\xi_k(j+1)} - e^{i\xi_k(j-1)}\right)\\
&= e^{i\xi_k\cdot j}\cdot\left(1 - \frac{c}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(e^{i\xi_k} - e^{-i\xi_k}\right)\right)\\
&= e^{i\xi_k\cdot j}\cdot\left(1 - c\cdot i\cdot\frac{\Delta t}{\Delta x}\cdot\sin(\xi_k)\right)\\
&= \underbrace{\left(1 - i\cdot c\cdot\frac{\Delta t}{\Delta x}\cdot\sin(2\pi k\cdot\Delta x)\right)}_{\lambda}\underbrace{e^{i2\pi k\Delta x\cdot j}}_{u_j^0} \quad (12)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} u_j^1 = \lambda\cdot u_j^0 \\ \lambda = 1 - i\cdot c\cdot\frac{\Delta t}{\Delta x}\cdot\sin(2\pi k\Delta x)\end{cases} \quad (13)$$

On a ainsi :

$$u_j^n = \lambda^n\cdot u_j^0$$

$$\Longrightarrow |u_j^n| = |\lambda|^n |u_j^0| = |\lambda|^n$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} |u_j^n| \overset{|\lambda|>1}{=} \infty \qquad \forall\Delta x, \Delta t. \quad (14)$$

On n'a donc pas la stabilité, car il y a divergence $\forall\Delta x, \Delta t$.

## 4) Schéma de Euler décentré

### i) Erreur de troncature

Le schéma est donné par :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c\cdot\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (15)$$

L'erreur de troncature est donc donnée par le module de (15), soit : $u$ sol. du pb. continu :

$$u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j) = \Delta t\cdot\partial_t u(t_n, x_j) + O(\Delta t^2) \quad (16)$$

$$u(x_j, t_n) - u(x_{j-1}, t_n) = u(x_j, t_n) - u(x_j, t_n) + \Delta x\,\partial_x u(x_j, t_n) + O(\Delta x^2) \quad (17)$$

(15), (16), (17) $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
\frac{(16)}{\Delta t} + c\cdot\frac{(17)}{\Delta x} &= \partial_t u(t_n, x_j) + \frac{O(\Delta t^2)}{\Delta t} \quad c\cdot\partial_x u(x_j, t_n) + \frac{O(\Delta x^2)}{\Delta x}\\
&= \underbrace{\partial_t u(t_n, x_j) + c\cdot\partial_x u(x_j, t_n)}_{=0} + O(\Delta t) + O(\Delta x)\\
&= O(\Delta x) + O(\Delta t) \quad (18)
\end{aligned}$$

### ii) Stabilité du schéma

(15) $\Longrightarrow$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c\cdot\frac{\Delta t}{\Delta x}\cdot\left(u_j^n - u_{j-1}^n\right) \quad (19)$$

Ainsi :

$$u_j^1 = u_j^0 - c\cdot\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_j^0 - u_{j-1}^0\right)$$
$$= e^{i\xi j} - c\cdot\frac{\Delta t}{\Delta x}\cdot\left(e^{i\xi j} - e^{i\xi(j-1)}\right)$$
$$= e^{i\xi j}\cdot\left(1 - c\cdot\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(1-e^{-i\xi}\right)\right)$$

$$\left.\begin{aligned} u_j^1 &= \lambda\cdot u_j^0 \\ \lambda &= 1 - c\cdot\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(1-e^{-i\xi}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Ce qui est le m. cas que dans le cours : stabilité si $\Delta t \leq \frac{1}{a}\cdot\Delta x$.

## 5) Schéma de Lax-Wendroff

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} + c\cdot\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\cdot\Delta x} - \frac{c^2}{2}\Delta t\,\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0 \qquad (21)$$

### i) Erreur de troncature

Soit $u$ solution du problème discret, alors :

$$u(t_{n+1},x_j) - u(t_n,x_j) = \Delta t\,\partial_t u(t_n,x_j) + O(\Delta t^2) \qquad (22)$$
$$u(x_{j+1},t_n) = u(x_j,t_n) + \Delta x\,\partial_x u(x_j,t_n) + \frac{\Delta x^2}{2}\,\partial_x\partial_x u(x_j,t_n) + O(\Delta x^3) \qquad (23)$$
$$u(x_{j-1},t_n) = u(x_j,t_n) - \Delta x\,\partial_x u(x_j,t_n) + \frac{\Delta x^2}{2}\,\partial^2_{xx} u(x_j,t_n) + O(\Delta x^3) \qquad (24)$$

(22) à (24) dans (21) $\Rightarrow$

$$(21) \overset{\text{pb. 2)}}{=} O(\Delta t) + O(\Delta x^2) - \frac{c^2}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\cdot\left(\cancel{2\cdot u(x_j,t_n)} + \Delta x^2\,\partial^2_{xx}u(x_j,t_n) + O(\Delta x^3) - \cancel{2\cdot u(x_j,t_n)}\right)$$
$$= O(\Delta t) + O(\Delta x^2) - \frac{c^2}{2}\Delta t\,\underbrace{\partial^2_{xx}u(x_j,t_n)}_{=\frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}u(x_j,t_n)} - \frac{c^2}{2}\Delta t\,O(\Delta x)$$
$$= O(\Delta t) + O(\Delta x^2) - \frac{c}{2}\cdot\Delta t\cdot\underbrace{\partial_x\partial_t u(x_j,t_n)}_{O(\Delta x)\cdot O(\Delta t)} - \frac{c^2}{2}\Delta t\,\underbrace{O(\Delta x)}_{=O(\Delta t)}$$

En l'on voit qu'il faut aller à l'ordre supérieur dans les D.L. pour obtenir qqch d'intéressant.

$$\left.\begin{aligned} u(t_{n+1},x_j) - u(t_n,x_j) &= \Delta t\,\partial_t u(t_n,x_j) + \frac{\Delta t^2}{2}\,\partial^2_{tt}u(t_n,x_j) + O(\Delta t^3) \\ u(x_{j+1},t_n) &= u(x_j,t_n) + \Delta x\,\partial_x u(x_j,t_n) + \frac{\Delta x^2}{2}\,\partial^2_{xx}u(x_j,t_n) + \frac{\Delta x^3}{6}\,\partial^3_{xxx}u(x_j,t_n) + O(\Delta x^4) \\ u(x_{j-1},t_n) &= \quad " \quad - \quad " \quad + \quad " \quad - \quad " \quad + O(\Delta x^4)\end{aligned}\right\} \quad (25)$$

$\Longrightarrow$

$$(21) = \partial_t u(t_n,x_j) + \frac{\Delta t}{2}\,\partial^2_{tt}u(t_n,x_j) + O(\Delta t^2) + \frac{c}{2\cancel{\Delta x}}\cdot\left(2\cdot\cancel{\Delta x}\,\partial_x u(x_j,t_n) + \frac{\Delta x^{\cancel{3}\,2}}{3}\,\partial^3_{xxx}u(x_j,t_n) + O(\Delta x^{\cancel{4}\,3})\right)$$
$$- \frac{c^2}{2}\frac{\Delta t}{\cancel{\Delta x^2}}\left(\cancel{2\cdot u(x_j,t_n)} + \cancel{\Delta x^2}\,\partial^2_{xx}u(x_j,t_n) + O(\Delta x^{\cancel{4}\,2}) - \cancel{2\cdot u(x_j,t_n)}\right)$$
$$= \underbrace{\partial_t u(t_n,x_j) + \partial_x u(x_j,t_n)}_{=0} + \frac{\Delta t}{2}\,\partial^2_{tt}u(t_n,x_j) + O(\Delta t^2) + \frac{c}{2\cdot 3}\cdot\Delta x^2\cdot\partial^3_{xxx}u(x_j,t_n) + \frac{c}{2}\,O(\Delta x^3)$$
$$- \frac{c^2}{2}\cdot\Delta t\,\partial^2_{xx}u(x_j,t_n) - \frac{c^2}{2}\Delta t\,O(\Delta x^2)$$
$$= \frac{\Delta t}{2}\,\underbrace{\partial^2_{tt}u(t_n,x_j)}_{=O(\Delta t^2)} + \frac{c}{6}\,\Delta x^2\,\underbrace{\partial^3_{xxx}u(x_j,t_n)}_{=O(\Delta x^3)} - \frac{c^2}{2}\Delta t\,\underbrace{\partial^2_{xx}u(x_j,t_n)}_{O(\Delta t)\cdot O(\Delta x)} - \frac{c^2}{2}\Delta t\,O(\Delta x^2) + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^3)$$
$$= O(\Delta t) + O(\Delta x) + O(\Delta x) + O(\Delta t^3) + O(\Delta x^3)$$
$$= O(\Delta t) + O(\Delta x)$$

## 5ème série

### Exercice 1 (Eléments finis pour une EDP hyperbolique)

Soit un domaine $\Omega$ de $\mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou 3, de frontière $\Gamma$. On se donne des fonctions régulières $\mathbf{a} : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $a_0 : \Omega \to \mathbb{R}$, $f : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$ et on considère le problème hyperbolique suivant : trouver u tel que

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \partial_t u + \mathbf{a}\cdot\nabla u + a_0 u & = & f & \text{sur } \Omega\times(0,T), \\ u & = & 0 & \text{sur } \Gamma^{in}\times(0,T), \\ u(x,0) & = & u_0 & \text{sur } \Omega. \end{array} \right. \tag{1}$$

avec $\Gamma^{in} = \{x \in \Gamma, \mathbf{a}(x)\cdot\mathbf{n} < 0\}$. On supposera qu'il existe $\mu_0 > 0$ tel que pour tout $x \in \Omega$, $\mu_0 \leq a_0(x) - \frac{1}{2}\mathrm{div}\,\mathbf{a}(x)$.

**1)** Pour la discrétisation en espace de (2), on introduit une triangulation $\mathcal{T}_h$ de $\Omega$ et l'espace d'éléments finis $X_h = \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}), v_h|_K \in \mathbb{P}_k(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}$. On pose $V_h^{in} = \{v_h \in X_h, v_h|_{\Gamma^{in}} = 0\}$. On considère alors le problème semi-discrétisé suivant : trouver $u_h \in V_h^{in}$ tel que pour tout $\mu_h \in V_h^{in}$
v

$$\int_\Omega \partial_t u_h v_h\,dx + \int_\Omega \mathbf{a}\cdot\nabla u_h v_h\,dx + \int_\Omega a_0 u_h v_h\,dx = \int_\Omega f v_h \qquad \text{sur } (0,T) \tag{2}$$

et $u(x,0) = u_{0,h}$ sur $\Omega$, où $u_{0,h}$ désigne l'interpolé de $u_0$ dans $X_h$.
Etablir qu'une solution $u_h$ de (2) satisfait l'inégalité :

$$\|u_h(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \mu_0\int_0^t \|u_h(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds + \int_0^t\int_{\Gamma\setminus\Gamma^{in}} \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\,u_h^2\,d\gamma ds \leq \|u_{0,h}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\mu_0}\int_0^t \|f(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds$$

**2)** Pour la discrétisation en temps, on considère le schéma d'Euler implicite : trouver $u_h^{n+1} \in V_h^{in}$ tel que pour tout $v_h \in V_h^{in}$

$$\frac{1}{\Delta t}\left(\int_\Omega u_h^{n+1}v_h\,dx - \int_\Omega u_h^n v_h\,dx\right) + \int_\Omega \mathbf{a}\cdot\nabla u_h^{n+1}v_h\,dx + \int_\Omega a_0 u_h^{n+1}v_h\,dx = \int_\Omega f^{n+1}v_h\,dx,$$

et $u_h^0 = u_{0,h}$. En prenant $v_h = u_h^{n+1}$ établir la stabilité de ce schéma.
**Indic. :** on utilisera $\int_\Omega uv\,dx = -\|u-v\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)}$

### Exercice 2 (Equations équivalentes pour des schémas aux différences finies)

permet de juger qualitativement rapidement un schéma.

**1)** On approche la solution de l'équation de transport par le schéma de Lax-Friedrichs

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{u_{j-1}^n + u_{j+1}^n}{2}}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0. \tag{3}$$

Etablir que l'équation aux dérivées partielles formellement satisfaite à l'ordre 3 par une fonction régulière interpolant la solution numérique obtenue avec ce schéma est :

$$\partial_t u + a\partial_x u = \frac{\Delta x^2}{2\Delta t}(1-\nu^2)\partial_{xx}u + \frac{a\Delta x^2}{3}(1-\nu^2)\partial_{xxx}u$$

(où $\nu = a\Delta t/\Delta x$). C'est l'*équation équivalente* du schéma à l'ordre 3.
**2)** Montrer que l'équation équivalente à l'ordre 3 du schéma de Lax-Wendroff

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{a^2\Delta t}{2}\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0 \tag{4}$$

est

$$\partial_t u + a\partial_x u = -\frac{a\Delta x^2}{6}(1-\nu^2)\partial_{xxx}u.$$

**3)** Comparer ces deux schémas en termes de diffusion et de dispersion.

Série 5 (corrigé).

**Exercice 2**

(1) $u(x,t+\Delta t) = u(x,t) + \Delta t\, \partial_t u + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_{tt} u + \frac{\Delta t^3}{6} \partial_{ttt} u + \mathcal{O}(\Delta t^4)$

$u(x+\Delta x, t) = u(x,t) + \Delta x\, \partial_x u + \frac{\Delta x^2}{2} \partial_{xx} u + \frac{\Delta x^3}{6} \partial_{xxx} u + \mathcal{O}(\Delta x^4)$

$u(x-\Delta x, t) = u(x,t) - \Delta x\, \partial_x u + \frac{\Delta x^2}{2} \partial_{xx} u - \frac{\Delta x^3}{6} \partial_{xxx} u + \mathcal{O}(\Delta x^4)$

d'où : $$\frac{u(x,t+\Delta t) - \frac{u(x+\Delta x,t)+u(x-\Delta x,t)}{2}}{\Delta t} = \partial_t u + \frac{\Delta t}{2} \partial_{tt} u + \frac{\Delta t^2}{6} \partial_{ttt} u - \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \partial_{xx} u + \mathcal{O}\left(\Delta t^3 + \frac{\Delta x^4}{\Delta t}\right)$$

et $$\frac{u(x+\Delta x,t) - u(x-\Delta x,t)}{2\Delta x} = \partial_x u + \frac{\Delta x^2}{6} \partial_{xxx} u + \mathcal{O}(\Delta x^3)$$

d'où (1) $$\boxed{\partial_t u + a\partial_x u + \frac{a\Delta x^2}{6} \partial_{xxx} u - \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \partial_{xx} u + \frac{\Delta t}{2} \partial_{tt} u + \frac{\Delta t^2}{6} \partial_{ttt} u = \mathcal{O}\left(\Delta x^3 + \Delta t^3 + \frac{\Delta x^4}{\Delta t}\right)}$$

On fait l'hypothèse $\exists\, \lambda$ cte / $\Delta x = \lambda \Delta t$ et on pose $h = \Delta x$.

On va éliminer formellement les dérivées par rapport à $t$ :

$$\partial_{tt} u = -a\, \partial_{tx} u + \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \partial_{txx} u - \frac{\Delta t}{2} \partial_{ttt} u + \mathcal{O}(h^2).$$

d'où (2) $$\partial_t u + a\partial_x u + \frac{a\Delta x^2}{6} \partial_{xxx} u - \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \partial_{xx} u - \frac{a\Delta t}{2} \partial_{tx} u + \frac{\Delta x^2}{4} \partial_{txx} u - \frac{\Delta t^2}{4} \partial_{ttt} u + \frac{\Delta t^2}{6} \partial_{ttt} u = \mathcal{O}(h^3)$$

(2) $\Rightarrow$ $$\partial_{xt} u = -a\, \partial_{xx} u + \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \partial_{xxx} u + \frac{a\Delta t}{2} \partial_{xtx} u + \mathcal{O}(h^2)$$

d'où : (3) $$\partial_t u + a\partial_x u + \frac{a\Delta x^2}{6} \partial_{xxx} u - \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \partial_{xx} u + \frac{a^2\Delta t}{2} \partial_{xx} u - \frac{a\Delta x^2}{4} \partial_{xxx} u - \frac{a^2\Delta t^2}{4} \partial_{xxt} u + \frac{\Delta x^2}{4} \partial_{txx} u - \frac{\Delta t^2}{12} \partial_{ttt} u = \mathcal{O}(h^3).$$

or $\partial_{xxt} u = -a\, \partial_{xxx} u + \mathcal{O}(h)$

d'où (4) $$\partial_t u + a\partial_x u + \left(\frac{a\Delta x^2}{6} - \frac{a\Delta x^2}{4} + \frac{a^3\Delta t^2}{4} - \frac{a\Delta x^2}{4}\right) \partial_{xxx} u + \left(\frac{a^2\Delta t}{2} - \frac{\Delta x^2}{2\Delta t}\right) \partial_{xx} u - \frac{\Delta t^2}{12} \partial_{ttt} u = \mathcal{O}(h^3)$$

Or $\partial_{ttt} u = (-a)^3 \partial_{xxx} u + \mathcal{O}(h)$.

d'où $$\partial_t u + a\, \partial_x u + \left(\frac{a^3\Delta t^2}{4} - \frac{a\Delta x^2}{3}\right) \partial_{xxx} u + \left(\frac{a^2\Delta t}{2} - \frac{\Delta x^2}{2\Delta t}\right) \partial_{xx} u + \frac{a^3\Delta t^2}{12} \partial_{xxx} u = \mathcal{O}(h^3)$$

$$\boxed{\partial_t u + a\partial_x u = \left(\frac{a\Delta x^2}{3} - \frac{a^3\Delta t^2}{3}\right) \partial_{xxx} u + \left(\frac{\Delta x^2}{2\Delta t} - \frac{a^2\Delta t}{2}\right) \partial_{xx} u + \mathcal{O}(h^3)}$$

(2)

$u(x,t+\Delta t) = u(x,t) + \Delta t\, \partial_t u + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_{tt} u + \frac{\Delta t^3}{6} \partial_{ttt} u + \mathcal{O}(\Delta t^4)$

$u(x+\Delta x, t) = u(x,t) + \Delta x\, \partial_x u + \frac{\Delta x^2}{2} \partial_{xx} u + \frac{\Delta x^3}{6} \partial_{xxx} u + \mathcal{O}(\Delta x^4)$

$u(x-\Delta x, t) = u(x,t) - \Delta x\, \partial_x u + \frac{\Delta x^2}{2} \partial_{xx} u - \frac{\Delta x^3}{6} \partial_{xxx} u + \mathcal{O}(\Delta x^4)$

d'où : $$\frac{u(x,t+\Delta t) - u(x,t)}{\Delta t} = \partial_t u + \frac{\Delta t}{2} \partial_{tt} u + \frac{\Delta t^2}{6} \partial_{ttt} u + \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

$$\frac{u(x+\Delta x,t) - u(x-\Delta x,t)}{2\Delta x} = \partial_x u + \frac{\Delta x^2}{6} \partial_{xxx} u + \mathcal{O}(\Delta x^3).$$

et $u(x+\Delta x,t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x,t) = \Delta x^2 \partial_{xx} u + \mathcal{O}(\Delta x^4)$.

d'où $$\boxed{\partial_t u + a\, \partial_x u + \frac{\Delta t}{2} \partial_{tt} u + \frac{\Delta t^2}{6} \partial_{ttt} u + \frac{a\Delta x^2}{6} \partial_{xxx} u - \frac{a^2\Delta t}{2} \partial_{xx} u = \mathcal{O}(\Delta t^3, \Delta x^3, \Delta t \Delta x^2)}$$

A nouveau, on cherche à éliminer les $\partial_{tt}$ et $\partial_{ttt}$ :

$$\partial_{tt} u = -a\, \partial_{tx} u - \frac{\Delta t}{2} \partial_{ttt} u + \frac{a^2}{2} \Delta t\, \partial_{xxt} u + \mathcal{O}(h^2).$$

d'où $$\partial_t u + a\partial_x u - \frac{a\Delta t}{2} \partial_{tx} u + \left(-\frac{\Delta t^2}{4} + \frac{\Delta t^2}{6}\right) \partial_{ttt} u + \frac{a\Delta x^2}{6} \partial_{xxx} u + \frac{a^2\Delta t^2}{4} \partial_{xxt} u - \frac{a^2\Delta t}{2} \partial_{xx} u = \mathcal{O}(h^3)$$

Or $\partial_{xt} u = -a\, \partial_{xx} u + \frac{a\Delta t}{2} \partial_{txx} u + \frac{a^2\Delta t}{2} \partial_{xxx} u + \mathcal{O}(h^2)$.

d'où $$\partial_t u + a\, \partial_x u + \frac{a^2\Delta t}{2} \partial_{xx} u - \frac{a^2\Delta t^2}{4} \partial_{txx} u - \frac{\Delta t^2}{12} \partial_{ttt} u - \frac{a^3\Delta t^2}{4} \partial_{xxx} u + \frac{a^2\Delta t^2}{4} \partial_{xxt} u + \frac{a\Delta x^2}{6} \partial_{xxx} u - \frac{a^2\Delta t}{2} \partial_{xx} u = \mathcal{O}(h^3)$$

Or $\partial_{xxt} u = -a\, \partial_{xxx} u + \mathcal{O}(h)$

d'où $$\partial_t u + a\partial_x u + \frac{a^3\Delta t^2}{4} \partial_{xxx} u - \frac{a^3\Delta t^2}{4} \partial_{xxx} u + \frac{a\Delta x^2}{6} \partial_{xxx} u - \frac{\Delta t^2}{12} \partial_{ttt} u - \frac{a^3\Delta t^2}{4} \partial_{xxx} u = \mathcal{O}(h^3)$$

or $\partial_{ttt} u = -a^3 \partial_{xxx} u + \mathcal{O}(h)$

d'où $\partial_t u + a \partial_x u + \left(\frac{a \Delta x^2}{6} - \frac{a^3 \Delta t^2}{6}\right) \partial_{xxx} u = \mathcal{O}(h^3)$.

$$\partial_t u + a \partial_x u = -\frac{a \Delta x^2}{6}\left(1 - \frac{a^2 \Delta t^2}{\Delta x^2}\right) \partial_{xxx} u + \mathcal{O}(h^3).$$

(3) - LW est moins diffusif que LF.
- LW " " dispersif " ".
- La sol° de LW est "en retard" par rapport à la solution exacte alors que la sol° de LF est "en avance".

Exercice 1

(1) On multiplie par $u$ et on intègre :

$$\int_\Omega \partial_t u\, u + \int_\Omega a \cdot \nabla u\, u + \int_\Omega a_0 u = \int_\Omega f u$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2 + \int_{\partial\Omega} a \cdot n \frac{u^2}{2} - \int_\Omega \operatorname{div} a \frac{u^2}{2} + \int_\Omega a_0 u^2 = \int f u$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2 + \underbrace{\int_{\partial\Omega \setminus \Gamma_{in}} a \cdot n \frac{u^2}{2}}_{\geq 0} + \mu_0 \int_\Omega u^2 \leq \left|\int f u\right| \leq \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2}$$

$$\leq \frac{1}{2\mu_0}\|f\|_{L^2}^2 + \frac{\mu_0}{2}\|u\|_{L^2}^2$$

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2 + \mu_0 \int_\Omega u^2 + \int_{\partial\Omega\setminus\Gamma_{in}} a \cdot n\, u^2 \leq \frac{1}{\mu_0}\|f\|_{L^2}^2.$$

d'où le résultat en intégrant entre 0 et $t$.

(2) $$\int_\Omega |u_h^{n+1}|^2 - \int_\Omega u_h^n u_h^{n+1} + \Delta t \int_\Omega a \cdot \nabla \frac{(u_h^{n+1})^2}{2} + \Delta t \int_\Omega a_0 (u_h^{n+1})^2 = \Delta t \int f^{n+1} u_h^{n+1}$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |u_h^{n+1}|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega |u_h^n|^2 + \frac{1}{2}\|u_h^{n+1} - u_h^n\|_{L^2}^2 + \Delta t \int_{\partial\Omega - \Gamma_{in}} a \cdot n \frac{(u_h^{n+1})^2}{2}$$

$$+ \Delta t \int_\Omega \left(a_0 - \frac{1}{2}\operatorname{div} a\right)(u_h^{n+1})^2$$

$$= \Delta t \int f^{n+1} u_h^{n+1}$$

d'où :

$$\frac{1}{2}\|u_h^{n+1}\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}\|u_h^n\|_{L^2}^2 + \Delta t\, \mu_0 \|u_h^{n+1}\|_{L^2}^2 \leq \Delta t \|f^{n+1}\|_{L^2}\|u_h^{n+1}\|_{L^2}$$

$$\leq \frac{\Delta t}{2\mu_0}\|f^{n+1}\|_{L^2} + \frac{\Delta t\, \mu_0}{2}\|u^{n+1}\|_{L^2}^2$$

$$\|u_h^{n+1}\|_{L^2}^2 + \Delta t\, \mu_0 \|u_h^{n+1}\|_{L^2}^2 \leq \|u_h^n\|_{L^2}^2 + \frac{\Delta t}{2\mu_0}\|f^{n+1}\|_{L^2}$$

d'où $$\|u_h^n\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{1+\Delta t \mu_0}\|u_h^{n-1}\|_{L^2}^2 + \frac{\Delta t}{2\mu_0(1+\Delta t)}\|f^n\|_{L^2}$$

$$\|u_h^n\|_{L^2}^2 \leq \alpha^n \|u_h^0\|^2 + \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}\frac{\Delta t}{2\mu_0(1+\Delta t)}\|f\|_{\ell^\infty(L^2)}$$

avec $\alpha = \frac{1}{1+\Delta t \mu_0}$

François Coppex, DP, EPFL.

# Analyse numérique des EDP : Série 5

## Exercice 1 : E.F. EDP hyperbolique

$$\left.\begin{array}{lll} \partial_t u + \underline{a}\cdot\underline{\nabla} u + a_0\cdot u = f & & \Omega\times[0,T] \\ u=0 & & \Gamma^{in}\times[0,T] \\ u(x,0) = u_0 & & \Omega \end{array}\right\} \quad (1)$$

avec $\Gamma^{in} = \{x\in\Gamma \text{ t.q. } \underline{a}(x)\cdot\hat{n} < 0\}$. On suppose de plus que $\exists\, \mu_0 > 0$ t.q. $\forall x\in\Omega$

$$\mu_0 \leq a_0(x) - \frac{1}{2}\underline{\nabla}\cdot\underline{a}(x) \quad (2)$$

### 1) Inégalité sur une solution $u_h$

Soit une triangulation $\mathcal{T}_h$ de $\Omega$ et l'espace E.F. $X_h = \{v_h \in C^0(\bar\Omega) \text{ t.q. } v_h|_K \in \mathbb{P}_n(K)\ \forall K\in\mathcal{T}_h\}$, $V_h^{in} = \{v_h\in X_h \text{ t.q. } v_h|_{\Gamma^{in}} = 0\}$. Soit $u_h\in V_h^{in}$, $v_h\in V_h^{in}$, alors en multipliant (1) par $v_h$ et en intégrant on obtient :

$$\int_\Omega \partial_t u_h\cdot v_h\,dx + \int_\Omega \underline{a}\cdot\underline{\nabla}u_h\cdot v_h\,dx + \int_\Omega a_0\cdot u_h\cdot v_h = \int_\Omega f\cdot v_h \quad , \text{ sur } [0,T] \quad (3)$$

avec $u(x,0) = u_{0,h}$ sur $\Omega$, avec $u_{0,h}$ l'interpolée de $u_0$ dans $X_h$. On aimerait voir que une solution $u_h$ de (3) $u_h$, satisfait l'inégalité :

$$\|u_h(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \mu_0\int_0^t \|u_h(s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds + \int_0^t\int_{\Gamma/\Gamma^{in}} \underline{a}\cdot\hat{n}\, u_h^2\,d\gamma\,ds \leq \|u_{0,h}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\mu_0}\int_0^t \|f(s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds \quad (4)$$

---

Soit dans (3) le cas particulier où $v_h = u_h$, alors :

$$\underbrace{\frac{1}{2}\int_\Omega \partial_t u_h^2}_{=\frac{1}{2}\partial_t\|u_h\|^2_{L^2(\Omega)}} + \underbrace{\int_\Omega \underline{a}\cdot\frac{1}{2}\underline{\nabla}(u_h^2)}_{=-\frac{1}{2}\int_\Omega u_h^2\,\underline{\nabla}\underline{a} + \frac{1}{2}\int_\Gamma a\cdot u_h^2} + \int_\Omega a_0\,u_h^2 = \int_\Omega f\cdot u_h$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\partial_t\|u_h\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega u_h^2\cdot\underbrace{\left(a_0 - \frac{1}{2}\underline{\nabla}\cdot\underline{a}\right)}_{\geq\mu_0} + \frac{1}{2}\int_{\Gamma/\Gamma^{in}} a\cdot u_h^2 = \int_\Omega f\cdot u_h$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u_h\|^2_{L^2(\Omega)} + \mu_0\cdot\|u_h\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\int_{\Gamma/\Gamma^{in}} a\cdot u_h^2 \leq \int_\Omega f\cdot u_h \quad (5)$$

On va établir l'inégalité de Young :

$$(a-b)^2 = a^2+b^2-2\cdot a\cdot b \geq 0$$

$$\Rightarrow a^2+b^2 \geq 2\cdot a\cdot b$$
$$\Rightarrow a\cdot b \leq \frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2} \quad (6)$$

Soit $a := \sqrt{\varepsilon}\cdot a$ ; $b := \frac{b}{\sqrt{\varepsilon}}$, alors (6) devient :

$$a\cdot b \leq \frac{\varepsilon\cdot a^2}{2} + \frac{b^2}{2\cdot\varepsilon} \quad (7)$$

Soit $\varepsilon := 2\cdot\varepsilon$, alors (7) devient :

$$a\cdot b \leq \varepsilon\cdot a^2 + \frac{b^2}{4\cdot\varepsilon} \quad (8)$$

Ce qui est l'inégalité de Young. On a alors avec Cauchy-Schwartz :

$$\int_\Omega f\cdot u_h = \underbrace{\langle f|u_h\rangle}_{\in\mathbb{R}} = |\langle f|u_h\rangle| \overset{C.S.}{\leq} \|f\|\cdot\|u_h\|$$
$$\overset{(8)}{\leq} \varepsilon\cdot\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4\cdot\varepsilon}\|u_h\|^2_{L^2(\Omega)} \quad (9)$$

(5) et (9) $\Rightarrow$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)} + \mu_0\|u_n\|^2_{L^2} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\Gamma/\rho in} a\cdot u_n^2}_{>0} \leq \varepsilon\cdot\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4\varepsilon}\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad (10)$$

On choisit $\varepsilon$ t.q. on se ramène à l'expression de la donnée, i.e. il faut que:

$$\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)}: \frac{1}{4\varepsilon} = \frac{\mu_0}{2} \Rightarrow 4\varepsilon = \frac{2}{\mu_0} \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{2\mu_0} \qquad (11)$$

$$\|f\|^2_{L^2(\Omega)}: \varepsilon = \frac{1}{2\mu_0} \qquad (12)$$

Ce qui est possible car on a bien $(11) = (12)$, donc $(10)$ devient:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)} + \mu_0\|u_n\|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\int_{\Gamma/\rho in} a\cdot u_n^2 \leq \frac{1}{2\mu_0}\|f\|^2_{L^2} + \frac{\mu_0}{2}\|u_n\|^2_{L^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\|u_n\|^2_{L^2} + \mu_0\|u_n\|^2_{L^2} + \int_{\Gamma/\rho in} a\cdot u_n^2 \leq \frac{1}{\mu_0}\|f\|^2_{L^2}$$

$$\overset{\int_{t_0=0}^t}{\Longrightarrow} \|u_n(t)\|^2_{L^2} - \|u_{n,0}\|^2_{L^2} + \mu_0\int_0^t\|u_n(s)\|^2 ds + \int_0^t ds\int_{\Gamma/\rho in} a\cdot u_n^2\, dx \leq \frac{1}{\mu_0}\int_0^t\|f(s)\|^2_{L^2} ds$$

$$\Rightarrow \|u_n(t)\|^2_{L^2} + \mu_0\int_0^t\|u_n(s)\|^2 ds + \int_0^t ds\int_{\Gamma/\rho in} a\cdot\hat{n}\cdot u_n^2\, dx \leq \|u_{0,n}\|^2_{L^2} + \frac{1}{\mu_0}\int_0^t\|f(s)\|^2_{L^2} ds \qquad (13)$$

---

## 2) Discrétisation en temps: Euler implicite

Le pb. devient : trouver $u_n^{n+1} \in V_n^{in}$ t.q. $\forall v_n \in V_n^{in}$ on a:

$$\frac{1}{\Delta t}\left(\int_\Omega u_n^{n+1}v_n - \int_\Omega u_n^n\cdot v_n\right) + \int_\Omega a\,\nabla u_n^{n+1}\cdot v_n + \int_\Omega a_0\cdot u_n^{n+1}v_n = \int_\Omega f^{n+1}\cdot v_n \qquad (14)$$

ici on fait une discrétisation en différences finies dans le temps, avec des éléments finis pour l'espace à cause de la triangularisation du domaine $\Omega$ qui peut être très compliquée. On aimerait établir la stabilité de ce schéma, i.e. montrer

$$\|u_h^n\|^2_{\Delta,p} \leq \|u_h^0\|^2_{\Delta,p}\cdot C_1 + C_2 \quad , C_1, C_2 \in \mathbb{R}/\{\infty\} \qquad (15)$$

Soit $v_h = u_h^{n+1}$, alors $(14) \Rightarrow$

$$\frac{1}{\Delta t}\left(\int_\Omega (u_h^{n+1})^2 - \int_\Omega u_h^n\cdot u_h^{n+1}\right) + \underbrace{\int_\Omega a\,\nabla u_h^{n+1}\cdot u_h^{n+1}} + \int_\Omega a_0(u_h^{n+1})^2 = \int_\Omega f^{n+1}\cdot u_h^{n+1} \qquad (16)$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega a\,\nabla\left((u_h^{n+1})^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\int_\Omega (u_h^{n+1})^2\,\underline{\nabla}a + \int_{\Gamma/\rho in} a\cdot(u_h^{n+1})^2\hat{n}$$

avec

$$\|u-v\|^2 = \langle u-v|u-v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 - \langle u|v\rangle - \langle v|u\rangle \quad , u,v \in \mathbb{R}$$

$$= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u|v\rangle$$

$$\Rightarrow \langle u|v\rangle = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2}\|v\|^2 - \|u-v\|^2 \qquad (17)$$

$(16)$ et $(17) \Rightarrow$

$$\frac{1}{\Delta t}\left(\|u_h^{n+1}\|^2 - \frac{1}{2}\|u_h^{n+1}\|^2 - \frac{1}{2}\|u_h^n\|^2 + \|u_h^n - u_h^{n+1}\|^2\right) + \int_\Omega (u_h^{n+1})^2\cdot\underbrace{\left(a_0 - \frac{1}{2}\operatorname{div} a\right)}_{\geq \mu_0} + \int_{\Gamma_{in}} a(u_h^{n+1})^2\hat{n} = \int_\Omega f^{n+1}u_h^{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\Delta t}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\|u_h^{n+1}\|^2 - \frac{1}{2}\|u_h^n\|^2 + \|u_h^n - u_h^{n+1}\|^2\right)}_{\leq \frac{1}{2}\|u_h^{n+1}\|^2 - \|u_h^n\|^2} + \mu_0\cdot\int_\Omega (u_h^{n+1})^2 + \int_{\Gamma/\rho in} a\cdot\hat{n}\cdot(u_h^{n+1})^2 = \int_\Omega f^{n+1}u_h^{n+1}$$

$\hookrightarrow > 0 \Rightarrow \longrightarrow 0$ (majoration)

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{2\Delta t}\left(\|u_h^{n+1}\|^2 - \|u_h^n\|^2\right) + \mu_0 \int_\Omega (u_h^{n+1})^2 + \int_{\Gamma/\Gamma_{in}} \underline{a}\cdot\hat{n}\cdot(u_h^{n+1})^2 \leq \int_\Omega f^{n+1}\cdot u_h^{n+1} \tag{18}$$

avec de même :

$$\int_\Omega f^{n+1}\cdot u_h^{n+1} \leq \varepsilon \|f^{n+1}\|^2_{L^2} + \frac{1}{4\varepsilon}\|u_h^{n+1}\|^2_{L^2} \tag{19}$$

(18) et (19) $\Longrightarrow$

$$\frac{1}{2\Delta t}\left(\|u_h^{n+1}\|^2 - \|u_h^n\|^2_{L^2}\right) + \mu_0 \|u_h^{n+1}\|^2 + \underbrace{\int_{\Gamma/\Gamma_{in}} \underline{a}\cdot\hat{n}\left(u_h^{n+1}\right)^2}_{\geq 0 \longrightarrow 0} \leq \varepsilon\|f^{n+1}\|^2_{L^2} + \frac{1}{4\varepsilon}\|u_h^{n+1}\|^2_{L^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{2\Delta t}\left(\|u_h^{n+1}\|^2_{L^2} - \|u_h^n\|^2_{L^2}\right) + \mu_0\|u_h^{n+1}\|^2 \leq \varepsilon\|f^{n+1}\|^2_{L^2} + \frac{1}{4\varepsilon}\|u_h^{n+1}\|^2_{L^2}$$

$$\overset{\varepsilon = \frac{1}{2\mu_0}}{\Longrightarrow} \quad \frac{1}{2\Delta t}\left(\|u_h^{n+1}\|^2_{L^2} - \|u_h^n\|^2_{L^2}\right) + \frac{1}{2}\mu_0\|u_h^{n+1}\|^2 \leq \frac{1}{2\mu_0}\|f^{n+1}\|^2_{L^2}$$

$$\overset{\cdot 2\Delta t}{\Longrightarrow} \quad \|u_h^{n+1}\|^2_{L^2} - \|u_h^n\|^2_{L^2} + \mu_0\cdot\Delta t\cdot\|u_h^{n+1}\|^2 \leq \frac{\Delta t}{\mu_0}\|f^{n+1}\|^2_{L^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \|u_h^{n+1}\|^2_{L^2}\cdot\left(1+\mu_0\cdot\Delta t\right) \leq \frac{\Delta t}{\mu_0}\cdot\|f^{n+1}\|^2_{L^2} + \|u_h^n\|^2_{L^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \|u_h^{n+1}\|^2_{L^2} \leq \underbrace{\frac{\Delta t}{\mu_0}\cdot\frac{1}{1+\mu_0\cdot\Delta t}}_{a}\|f^{n+1}\|^2_{L^2} + \underbrace{\frac{1}{1+\mu_0\cdot\Delta t}}_{b}\|u_h^n\|^2_{L^2} \tag{20}$$

Par récurrence :

$$\begin{aligned}
\|u_h^n\|^2 &\leq a\|f^n\|^2 + b\|u_h^{n-1}\|^2 \\
&\leq a\cdot\|f^n\|^2 + b\cdot\left(a\cdot\|f^{n-1}\|^2 + b\|u_h^{n-2}\|^2\right) \\
&\leq a\|f^n\|^2 + ab\|f^{n-1}\|^2 + b^2\left(a\|f^{n-2}\|^2 + b\cdot\|u_h^{n-3}\|^2\right) \\
&= a\|f^n\|^2 + ab\|f^{n-1}\|^2 + ab^2\|f^{n-2}\|^2 + b^3\|u_h^{n-3}\|^2 \\
&\leq \dots \\
&\leq a\cdot\sum_{k=0}^{n}\underbrace{\|f^{n-k}\|^2}_{\leq\|f\|^2}\cdot b^k + b^n\cdot\|u_h^0\|^2 \\
&\leq a\cdot\|f\|^2\sum_{k=0}^{n} b^k + b^n\|u_h^0\|^2 \\
&= a\cdot\|f\|^2\cdot\frac{1-b^{n+1}}{1-b} + b^n\cdot\|u_h^0\|^2 \quad , \ |b|<1
\end{aligned}$$

$$\|u_h^n\|^2 \leq a\cdot\|f\|^2\cdot\frac{1-b^{n+1}}{1-b} + b^n\cdot\|u_h^0\|^2 \tag{21}$$

Comme $|b|<1$, on a montré la stabilité du schéma, i.e. on a (15). De plus, si $\lim_{n\to\infty}$, on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\|u_h^n\|^2 &\overset{|b|<1}{\leq} \frac{a}{1-b}\|f\|^2 \\
&= \frac{\Delta t}{\mu_0}\cdot\frac{1}{1+\mu_0\cdot\Delta t}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{1+\mu_0\Delta t}}\|f\|^2 \\
&= \frac{\Delta t}{\mu_0}\cdot\frac{1}{1+\mu_0\Delta t}\cdot\frac{1}{\frac{\cancel{1}+\mu_0\Delta t-\cancel{1}}{1+\mu_0\Delta t}}\|f\|^2 \\
&= \frac{\cancel{\Delta t}}{\mu_0}\cdot\frac{\cancel{1+\mu_0\Delta t}}{\cancel{1+\mu_0\Delta t}}\cdot\frac{1}{\mu_0\cancel{\Delta t}}\|f\|^2 \\
&= \frac{1}{\mu_0^2}\cdot\|f\|^2
\end{aligned} \tag{22}$$

Notre schéma numérique se comporte donc bien vis-à-vis de la stabilité. Ce schéma est implicite, pour la discrétisation en temps :

$$\frac{u_{j+1}^{x} - u_{j-1}^{x}}{2 \cdot \Delta t} \longrightarrow \begin{cases} x = n \Rightarrow \text{instable} & \text{(explicite)} \\ x = n+1 \Rightarrow \text{stable} & \text{(progressif, implicite)} \end{cases}$$

## Exercice 2 : Equations équivalentes pour des schémas D.F.

### 1) Lax-Friedrichs

On part de :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

et on va voir que notre schéma approxime mieux l'équation équivalente :

$$\partial_t u + a \cdot \partial_x u = \frac{\Delta x^2}{2\Delta t}(1-\nu^2)\,\partial_{xx} u + \frac{a \cdot \Delta x^2}{3}(1-\nu^2)\,\partial_{xxx} u \quad , \nu = \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot a \qquad (2)$$

Soit $u$ une fonction interpolante suffisamment régulière t.q.

$$\frac{u(x_j, t^{n+1}) - \dfrac{u(x_{j-1}, t^n) + u(x_{j+1}, t^n)}{2}}{\Delta t} + a \cdot \frac{u(x_{j+1}, t_n) - u(x_{j-1}, t^n)}{2 \cdot \Delta x} = 0 \qquad (3)$$

Ce schéma est celui de Lax-Friedrichs. La question est de trouver quelle est l'équation que vérifie $u$ à l'ordre 3.

A l'ordre 1, on a l'équation (1). A l'ordre 3, on fait ces D.L.

$$u(x_j, t^{n+1}) = u(x_j, t^n) + \Delta t\, \partial_t u + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_{tt} u + \frac{\Delta t^3}{6} \partial_{ttt} u + O(\Delta t^4) \qquad (4)$$

$$u(x_{j+1}, t^n) = u(x_j, t_n) + \Delta x\, \partial_x u + \frac{\Delta x^2}{2} \partial_{xx} u + \frac{\Delta x^3}{6} \partial_{xxx} u + O(\Delta x^4) \qquad (5)$$

$$u(x_{j-1}, t^n) = u(x_j, t_n) - \Delta x\, \partial_x u + \frac{\Delta x^2}{2} \partial_{xx} u - \frac{\Delta x^3}{6} \partial_{xxx} u + O(\Delta x^4) \qquad (6)$$

En remplaçant dans le schéma numérique (3) on a :

$$\frac{1}{\Delta t} \cdot \left( \Delta t \partial_t u + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_{tt} u + \frac{\Delta t^3}{6} \partial_{ttt} u - \frac{\Delta x^2}{2} \partial_{xx} u + O(\Delta x^4) + O(\Delta t^4) \right) + \frac{a}{\Delta x} \left( \Delta x \cdot \partial_x u + \frac{\Delta x^3}{6} \partial_{xxx} u + O(\Delta x^4) \right) = 0$$

$$\Rightarrow \partial_t u + a \cdot \partial_x u + a \cdot \frac{\Delta x^2}{6} \partial_{xxx} u - \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{\Delta t} \partial_{xx} u + \frac{\Delta t}{2} \partial_{tt} u + \frac{\Delta t^2}{6} \partial_{ttt} u + O\left(\frac{\Delta x^4}{\Delta t^3}\right) + O(\Delta x^3) + O(\Delta t^3) = 0 \qquad (7)$$

Il faut éliminer les dérivées par rapport au temps, pour cela on dérive (7) judicieusement en se limitant à l'ordre 3 et réinsère les éqn. obtenues pour éliminer $\partial_{tt}$ et $\partial_{ttt}$ :

$$\partial_t(7) \Rightarrow \quad \partial_{tt} u + a\, \partial_t \partial_x u + \frac{\Delta t}{2} \partial_{ttt} u = O(\Delta t^3) + O(\Delta x^3)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta t}{2} \partial_{tt} u = -a \cdot \frac{\Delta t}{2} \partial_{tx} u - \frac{\Delta t^2}{4} \partial_{ttt} u + O(\dots) \qquad (8)$$

(8) dans (7) $\Rightarrow$

$$\partial_t u + a \cdot \partial_x u + a \cdot \frac{\Delta x^2}{6} \partial_{xxx} u - \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{\Delta t} \partial_{xx} u - a \cdot \frac{\Delta t}{2} \partial_{tx} u - \frac{\Delta t^2}{4} \partial_{ttt} u + \frac{\Delta t^2}{6} \partial_{ttt} u + O(\dots) = 0 \qquad (9)$$

$$\partial_x(7) \Rightarrow \quad \partial_{tx} u + a\, \partial_{xx} u - \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{\Delta t} \partial_{xxx} u + \frac{\Delta t}{2} \partial_{ttx} u + O(\dots) = 0$$

$$\Rightarrow \quad -a \cdot \frac{\Delta t}{2} \partial_{tx} u = a^2 \cdot \frac{\Delta t}{2} \partial_{xx} u - a \cdot \frac{\cancel{\Delta t}}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{\cancel{\Delta t}} \partial_{xxx} u + a \cdot \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{\Delta t}{2} \partial_{ttx} u$$

$$= a^2 \cdot \frac{\Delta t}{2} \partial_{xx} u - a \cdot \frac{\Delta x^2}{4} \partial_{xxx} u + a \cdot \frac{\Delta t^2}{4} \partial_{ttx} u \qquad (10)$$

(10) dans (9) $\Rightarrow$

$$\partial_t u + a \partial_x u + a \frac{\Delta x^2}{6} \partial_{xxx} u - \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{\Delta t} \partial_{xx} u + a^2 \frac{\Delta t}{2} \partial_{xx} u - a \cdot \frac{\Delta x^2}{4} \partial_{xxx} u + a \cdot \frac{\Delta t^2}{4} \partial_{ttx} u$$
$$- \frac{\Delta t^2}{4} \partial_{ttt} u + \frac{\Delta t^2}{6} \partial_{ttt} u + O(\dots) = 0$$

$$\Rightarrow \partial_t u + a \cdot \partial_x u + \partial_{xxx} u \cdot \underbrace{\left( a \cdot \frac{\Delta x^2}{6} - a \cdot \frac{\Delta x^2}{4} \right)}_{= -a \cdot \Delta x^2 \cdot \frac{1}{12}} + \partial_{xx} u \cdot \left( -\frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{\Delta t} + a^2 \frac{\Delta t}{2} \right) + \partial_{ttt} u \cdot \overbrace{\left( \frac{\Delta t^2}{6} - \frac{\Delta t^2}{4} \right)}^{= -\Delta t^2 \cdot \frac{1}{12}}$$
$$+ a \cdot \frac{\Delta t^2}{4} \partial_{ttx} u = 0$$

$$\Rightarrow \partial_t u + a \partial_x u - a \cdot \frac{\Delta x^2}{12} \cdot \partial_{xxx} u + \partial_{xx} u \cdot \left( a^2 \frac{\Delta t}{2} - \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{\Delta t} \right) - \frac{\Delta t^2}{12} \cdot \partial_{ttt} u + a \cdot \frac{\Delta t^2}{4} \partial_{ttx} u = 0 \qquad (11)$$

$\partial_t (8) \Rightarrow \quad \frac{\Delta t}{2} \partial_{ttt} u = -a \cdot \frac{\Delta t}{2} \partial_{ttx} u \quad + O(\cdots)$

$$\Rightarrow \quad a \cdot \frac{\Delta t^2}{4} \partial_{ttx} = -\frac{\Delta t^2}{4} \partial_{ttt} u \qquad (12)$$

(12) dans (11) $\Rightarrow$

$$\partial_t u + a \cdot \partial_x u - a \cdot \frac{\Delta x^2}{12} \partial_{xxx} u + \partial_{xx} u \cdot \underbrace{\left( a^2 \cdot \frac{\Delta t}{2} - \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{\Delta t} \right)} - \underbrace{\frac{\Delta t^2}{4} \partial_{ttt} u - \frac{\Delta t^2}{12} \partial_{ttt} u} = 0$$

$$= \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \cdot \left( -1 + \frac{2 \cdot \Delta t}{\Delta x^2} \cdot a^2 \frac{\Delta t}{2} \right) \qquad = -\frac{1}{3} \Delta t^2 \partial_{ttt} u$$

$$= \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \cdot \left( \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \cdot a^2 - 1 \right)$$

$$= \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} (\nu - 1)$$

$$\Rightarrow \quad \partial_t u + a \cdot \partial_x u = \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} (1 - \nu) \partial_{xx} u + a \cdot \frac{\Delta x^2}{12} \partial_{xxx} u + \frac{1}{3} \Delta t^2 \partial_{ttt} u \qquad (13)$$

Avec une erreur de calcul qqe part : on ne peut pas éliminer $\partial_{ttt}$.

## 2) Lax-Wendroff

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \cdot \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2 \cdot \Delta x} - \frac{a^2 \cdot \Delta t}{2} \cdot \frac{u_{j+1}^n - 2 \cdot u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0 \qquad (14)$$

$$\partial_t u + a \cdot \partial_x u = -\frac{a \cdot \Delta x^2}{6} \cdot (1 - \nu^2) \partial_{xxx} u \qquad (15)$$

On procède de même :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \cdot \left( \Delta t \partial_t u + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_{tt} u + \frac{\Delta t^3}{6} \partial_{ttt} u + O(\Delta t^4) \right)$$

$$= \partial_t u + \frac{\Delta t}{2} \partial_{tt} u + \frac{\Delta t^2}{6} \partial_{ttt} u + O(\Delta t^3) \qquad (16)$$

$$a \cdot \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2 \cdot \Delta x} = \frac{a}{\Delta x} \cdot \left( \Delta x \partial_x u + \frac{\Delta x^3}{6} \partial_{xxx} u + O(\Delta x^4) \right)$$

$$= a \cdot \partial_x u + a \cdot \frac{\Delta x^2}{6} \partial_{xxx} u + O(\Delta x^3) \qquad (17)$$

$$\frac{a^2 \cdot \Delta t}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = \frac{a^2 \Delta t}{2} \cdot \frac{1}{\Delta x^2} \cdot \left( 2\cancel{u} + \Delta x^2 \partial_{xx} u - 2\cancel{u} + O(\Delta x^4) \right)$$

$$= \frac{a^2 \cdot \Delta t}{2} \partial_{xx} u + O(\Delta x^2)$$

On voit donc que pour ce terme il faut développer à ~~un~~ deux ordre supérieur et ajouter à (5) et (6) :

$$u(x_{j+1}, t_n) = u(x_j, t_n) + \Delta x \partial_x u + \frac{\Delta x^2}{2} \partial_{xx} u + \frac{\Delta x^3}{6} \partial_{xxx} u + \frac{\Delta x^4}{24} \partial_{xxxx} u + \frac{\Delta x^5}{120} \partial_{xxxxx} u + O(\Delta x^6) \qquad (18)$$

$$u(x_{j-1}, t_n) = u(x_j, t_n) - \Delta x \partial_x u + \frac{\Delta x^2}{2} \partial_{xx} u - \frac{\Delta x^3}{6} \partial_{xxx} u + \frac{\Delta x^4}{24} \partial_{xxxx} u - \frac{\Delta x^5}{120} \partial_{xxxxx} u + O(\Delta x^6) \qquad (19)$$

Avec (18) et (19) :

ou bien 5

$$\frac{a^2 \Delta t}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = \frac{a^2 \cdot \Delta t}{2} \cdot \frac{1}{\Delta x^2} \cdot \left( \Delta x^2 \cdot \partial_{xx} u + \frac{\Delta x^4}{12} \partial_{xxxx} u + O(\Delta x^6) \right)$$

$$= \frac{a^2 \cdot \Delta t}{2} \partial_{xx} u + \frac{a^2 \cdot \Delta t}{24} \cdot \Delta x^2 \cdot \partial_{xxxx} u + O(\Delta x^4) \qquad (20)$$

(16), (17), (20), (14) $\Rightarrow$

$$\partial_t u + a \cdot \partial_x u + \frac{\Delta t}{2} \partial_{tt} u + \frac{\Delta t^2}{6} \partial_{ttt} u + a \cdot \frac{\Delta x^2}{6} \partial_{xxx} u + a^2 \cdot \frac{\Delta t}{2} \partial_{xx} u + \frac{a^2 \Delta t}{24} \Delta x^2 \partial_{xxxx} u + O(\cdots) = 0 \qquad (21)$$

On procède de même :

$\partial_t(20) \Rightarrow \quad \partial_{tt} u + a \partial_{tx} u + \frac{\Delta t}{2} \partial_{ttt} u + a^2 \frac{\Delta t}{2} \partial_{xxt} u + O(\dots) = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta t}{2} \cdot \partial_{tt} u = - \frac{\Delta t}{2} \cdot a \cdot \partial_{tx} u - \frac{\Delta t^2}{4} \partial_{ttt} u - a^2 \frac{\Delta t^2}{4} \partial_{xxt} u \qquad (22)$$

(21) et (22) $\Rightarrow$

$$\partial_t u + a \cdot \partial_x u - \frac{\Delta t}{2} a \partial_{tx} u - \frac{\Delta t^2}{4} \partial_{ttt} u - a^2 \frac{\Delta t^2}{4} \partial_{xxt} u + \frac{\Delta t^2}{6} \partial_{ttt} u + a \cdot \frac{\Delta x^2}{6} \partial_{xxx} u + a^2 \cdot \frac{\Delta t}{2} \partial_{xx} u = 0$$

$$\Rightarrow \partial_t u + a \partial_x u + \partial_{ttt} u \cdot \left(-\frac{1}{12}\right) \Delta t^2 - \frac{\Delta t}{2} a \cdot \partial_{tx} u - a^2 \frac{\Delta t^2}{4} \partial_{xxt} u + a \cdot \frac{\Delta x^2}{6} \partial_{xxx} u + a^2 \frac{\Delta t}{2} \partial_{xx} u = 0 \qquad (23)$$

$\partial_t(22) \Rightarrow \quad \frac{1}{6} \cdot \frac{\Delta t^2}{2} \partial_{ttt} u = -\frac{1}{6} \frac{\Delta t^2}{2} \cdot a \cdot \partial_{ttx} u + O(\dots) \qquad (24)$

(23) et (24) $\Rightarrow$

$$\partial_t u + a \partial_x u + \partial_{xx} u \cdot a^2 \cdot \frac{\Delta t}{2} + \partial_{xxx} u \cdot a \cdot \frac{\Delta x^2}{6} + \frac{\Delta t^2}{12} a \cdot \partial_{ttx} u - \frac{\Delta t}{2} a \partial_{tx} u - a^2 \frac{\Delta t^2}{4} \partial_{xxt} u = 0 \qquad (25)$$

$\partial_x(21) \Rightarrow \quad \partial_{tx} u + a \cdot \partial_{xx} u + \frac{\Delta t}{2} \partial_{ttx} u + O(\dots) = 0$

$$\Rightarrow \quad \partial_{tx} u = -a \partial_{xx} u - \frac{\Delta t}{2} \partial_{ttx} u$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\Delta t}{2} \cdot a \cdot \partial_{tx} u = \frac{\Delta t}{2} \cdot a^2 \partial_{xx} u + \frac{\Delta t^2}{4} \cdot a \cdot \partial_{ttx} u \qquad (26)$$

(26) et (25) $\Rightarrow$

$$\partial_t u + a \cdot \partial_x u + \partial_{xx} u \cdot a^2 \frac{\Delta t}{2} + \partial_{xxx} u \cdot a \cdot \frac{\Delta x^2}{6} + \frac{\Delta t^2}{12} \cdot a \cdot \partial_{ttx} u - a^2 \frac{\Delta t^2}{4} \partial_{xxt} u + \frac{\Delta t}{2} \cdot a^2 \cdot \partial_{xx} u + \frac{\Delta t^2}{4} \cdot a \cdot \partial_{ttx} u = 0 \qquad (27)$$

$\partial_t(26) \Rightarrow$

$$\partial_{ttx} u = -a \cdot \partial_{txx} u \qquad (28)$$

$\partial_x(26) \Rightarrow \quad \partial_{txx} u = -a \partial_{xxx} u \qquad (29)$

(28) et (29) $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} \partial_{ttx} u &= a^2 \partial_{xxx} u \\ \partial_{txx} u &= -a \partial_{xxx} u \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

(27) et (30) $\Rightarrow$

$$\partial_t u + a \cdot \partial_x u + \partial_{xx} u \cdot \left( a^2 \cdot \frac{\Delta t}{2} \ominus \frac{\Delta t}{2} \cdot a^2 \right) \ominus \partial_{xxx} u \cdot a \cdot \frac{\Delta x^2}{6} \ominus \frac{\Delta t^2}{\cancel{12}\,6} \cdot a \cdot a^2 \cdot \partial_{xxx} u$$
$$- a^2 \cdot \frac{\Delta t^2}{4} \cdot (-a) \cdot \partial_{xxx} u \ominus \frac{\Delta t^2}{4} \cdot a \cdot a^2 \cdot \partial_{xxx} u = 0$$

$$\Rightarrow \partial_t u + a \partial_x u + \partial_{xxx} u \cdot \left( a \cdot \frac{\Delta x^2}{6} - a^3 \cdot \frac{\Delta t^2}{6} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \partial_t u + a \cdot \partial_x u = - a \cdot \frac{\Delta x^2}{6} \cdot \left( 1 - \underbrace{a^2 \cdot \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}}_{= \nu^2} \right) \partial_{xxx} u$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\partial_t u + a \cdot \partial_x u = -a \cdot \frac{\Delta x^2}{6} (1 - \nu^2) \, \partial_{xxx} u} \qquad (31)$$

## 6ème série

**Exercice 1**
On considère le problème de Stokes stationnaire posé sur un domaine $\Omega$ de frontière $\Gamma$.

$$\begin{cases} -\nu\triangle\mathbf{u}+\nabla p &= \mathbf{f} & \text{sur } \Omega\in\mathbb{R}^2, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} &= 0 & \text{sur } \Omega, \\ \mathbf{u} &= 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{1}$$

où $f$ est une fonction donnée du problème.

**1)** Noter que $p$ n'est definie qu'au moins d'une constante près.

**2)** Prouver que

a) $-\displaystyle\int_\Omega \triangle\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \int_\Omega \nabla\mathbf{u}:\nabla\mathbf{v} - \int_{\partial\Omega}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial n}\cdot\mathbf{v}$ où $\int_\Omega \sigma\cdot\tau = \sum_{i,j}\int_\Omega \sigma_{ij}\tau_{ij}$ pour tout tenseur $\sigma,\tau$

b) $\displaystyle\int_\Omega \nabla p\cdot\mathbf{v} = -\int_\Omega p\operatorname{div}\mathbf{v} + \int_\Gamma p\,\mathbf{v}\cdot n$

**3)** Montrer que si $\mathbf{u}$ est $p$ sont solutions du problème (1), alors ils le sont aussi du problème faible suivant:

Trouver $\mathbf{u}\in\mathbf{V}\equiv[H_0^1(\Omega)]^2$, $p\in Q\equiv L_0^2(\Omega)=\{p\in L^2(\Omega):\ \int_\Omega p=0\}$ t.q.

$$\begin{cases} \nu\int_\Omega \nabla\mathbf{u}:\nabla\mathbf{v} - \int_\Omega p\operatorname{div}\mathbf{v} = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} & \forall\mathbf{v}\in\mathbf{V} \\ \int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{u}\,q = 0 & \forall q\in Q \end{cases} \tag{2}$$

**4)** Montrer que si $\mathbf{u}$ est la solution du problème (2), alors $\mathbf{u}$ satisfait le problème

$$\begin{cases} \mathbf{u}\in\mathbf{V}_{div}\equiv\{\mathbf{v}\in\mathbf{V}:\ \operatorname{div}\mathbf{v}=0\} & \\ \nu\int_\Omega \nabla\mathbf{u}:\nabla\mathbf{v} = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} & \forall\mathbf{v}\in\mathbf{V}_{div} \end{cases} \tag{3}$$

Montrer ensuite que ce problème admet une solution unique.

**Exercice 2**
Considerons maintenant le problème de Stokes stationnaire non homogène:

$$\begin{cases} -\nu\triangle\mathbf{u}+\nabla p &= \mathbf{f} & \text{sur } \Omega\in\mathbb{R}^2, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} &= 0 & \text{sur } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g} & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{4}$$

**1)** Montrer que pour que (4) admette une solution, il est nécessaire que $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{g}\cdot n = 0$.

**2)** Trouver une solution faible qui généralise la (2).

## Exercice 3

Soient $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}$ et $Q_h \subset Q$ deux espaces d'éléments finis avec base $\{\phi_i\}$ et $\{\psi_j\}$ respectivement. Considerons le problème approché:

$$\text{Trouver} \quad \mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h,\ p_h \in Q_h \quad \text{t.q.}$$

$$\begin{cases} \nu \int_\Omega \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h - \int_\Omega p_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\ \int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{u}_h \, q_h = 0 & \forall q_h \in Q_h \end{cases} \tag{5}$$

Montrer que sa forme algebrique s'écrit

$$\begin{cases} AU + D^T P = F \\ DU = 0 \end{cases} \tag{6}$$

où

$$A_{ij} = \nu \int_\Omega \nabla \phi_j : \nabla \phi_i \qquad D_{ij} = -\int_\Omega \operatorname{div} \phi_j \, \psi_i$$

## 6ème série (corrigé)

**Exercice 1**

① Si $(u,p)$ est solution de (1), $(u, p+C)$, avec $C\in\mathbb{R}$, est encore solution

② On multiplie la 1ère équation de (1) par $v\in V$ et on intègre :

$$-\nu\int_\Omega \Delta u\cdot v + \int_\Omega \nabla p\cdot v = \int_\Omega f\cdot v$$

$$\nu\int_\Omega \nabla u:\nabla v \underbrace{- \nu\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}\cdot v}_{0\ (v_{/\Gamma}=0)} - \int_\Omega p\,\mathrm{div}\, v \underbrace{+ \int_\Gamma p\, v\cdot n}_{0\ (v_{/\Gamma}=0)} = \int f\cdot v$$

De même, on multiplie la 2e eq. de (1) par $q\in Q$ et on intègre :

$$\int_\Omega q\ \mathrm{div}\, u = 0$$

③ * Si $u$ est solution de (2), on a $\int_\Omega q\ \mathrm{div}\, u = 0$, $\forall q\in L^2_0(\Omega)$.

Soit $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$ (fonction de $C^\infty(\Omega)$ à support compact).

$\varphi\in L^2$ et $\tilde\varphi = \varphi - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \varphi \in L^2_0$. On a donc :

$\int_\Omega \tilde\varphi\ \mathrm{div}\, u = 0$ ou encore : $\int_\Omega \varphi\ \mathrm{div}\, u = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \varphi \int_\Omega \mathrm{div}\, u$

or $\int_\Omega \mathrm{div}\, u = \int_\Gamma u\cdot n = 0$ $(u_{/\Gamma}=0)$ d'où :

$\forall \varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$, $\int_\Omega \varphi\ \mathrm{div}\, u = 0$.

Donc $\mathrm{div}\, u = 0$ p.p., et $u\in V_{div}$.

De plus, si $v\in V$, on a par hypothèse :

$$\nu\int_\Omega \nabla u:\nabla v - \int_\Omega p\,\mathrm{div}\, v = \int_\Omega f\cdot v.$$

Donc si $v\in V_{div}$, on a bien : $\nu\int_\Omega \nabla u:\nabla v = \int_\Omega f\cdot v$

* Unicité : soient $u_1$ et $u_2$ deux solutions de (3) :

$$\nu\int_\Omega \nabla u_1:\nabla v = \int_\Omega f\cdot v \quad \text{et} \quad \nu\int_\Omega \nabla u_2:\nabla v = \int_\Omega f\cdot v$$

On soustrait et on prend $v = u_1 - u_2$ :

$$\nu\int_\Omega |\nabla(u_1-u_2)|^2 = 0$$

Autrement dit : $\|\nabla(u_1-u_2)\|_{L^2} = 0$. Or $(u_1-u_2)_{/\Gamma} = 0$

donc $u_1 - u_2 = 0$. D'où l'unicité.

(rappel : la semi-norme $u\longmapsto \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ est une norme sur $H^1_0(\Omega)$ équivalente à la norme $H^1(\Omega)$. C'est une conséquence directe de l'inégalité de Poincaré)

**Exercice 2**

① Si (4) admet une solution $(u,p)$, on a $\mathrm{div}\, u = 0$, donc $\int_\Gamma u\cdot n = 0$, or $u_{/\Gamma} = g$ donc nécessairement $\int_\Gamma g\cdot n = 0$.

② Pour se ramener à un problème homogène on introduit un relèvement de $g$ : $u_g\in H^1(\Omega)$ tel que $u_{g/\Gamma} = g$ (ce qui est possible pour $g$ "assez régulier", plus précisément pour $g\in H^{1/2}(\Gamma)$). On a, en particulier,

$\|u_g\|_{H^1(\Omega)} \leq C\ \|g\|_{L^2(\Gamma)}$ (en fait on a même $\|u_g\|_{H^1(\Omega)} \leq C\,\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$)

On admet qu'on peut choisir $u_g$ tel que $\mathrm{div}\, u_g = 0$.

On pose $\tilde{u} = u - u_g$ :

$$\begin{cases} -\nu\Delta\tilde{u} - \Delta u_g + \nabla p = f \\ \operatorname{div}\tilde{u} = 0 \end{cases}$$

D'où : trouver $\hat{u} \in V$ tel que $\forall v \in V$ et $\forall q \in Q$ :

$$\begin{cases} \nu\int_\Omega \nabla\hat{u} : \nabla v - \int_\Omega p \operatorname{div} v = \int_\Omega f \cdot v - \int_\Omega \nabla u_g : \nabla v \\ \int q \operatorname{div}\hat{u} = 0. \end{cases}$$

③ Soit la forme linéaire $T : V \longrightarrow \mathbb{R}$

$$v \longmapsto \int_\Omega f \cdot v - \int_\Omega \nabla u_g : \nabla v$$

$$\begin{aligned} |\langle T, v\rangle| &\leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} + \|\nabla u_g\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^2} \\ &\leq \left(\|f\|_{L^2} + \|u_g\|_{H^1}\right)\|v\|_{H^1} \\ &\leq C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)}\right)\|v\|_{H^1} \\ &\leq C'\|v\|_{H^1}. \end{aligned}$$

ce qui prouve que $T$ est continue sur $H^1$, et donc continue sur $V$ (sous espace fermé de $H^1$). Donc $T \in V'$.

④ On procède de même :

$$\begin{cases} \tilde{u}\cdot\nabla\tilde{u} + u_g\cdot\nabla\tilde{u} + \tilde{u}\cdot\nabla u_g + u_g\cdot\nabla u_g - \nu\Delta\tilde{u} - \nu\Delta u_g \\ \quad + \nabla p = f \\ \operatorname{div}\hat{u} = 0 \end{cases}$$

Le problème s'écrit donc : trouver $\hat{u} \in V$ tel que $\forall v \in V$ et $\forall q \in Q$ :

$$\nu\int_\Omega \nabla\tilde{u} : \nabla v + \int_\Omega u_g \cdot \tilde{\ } \cdot v + \int_\Omega \hat{u}\cdot\nabla u_g \cdot v - \int_\Omega p \operatorname{div} v = \langle F, v\rangle$$

avec $\langle F, v\rangle = \int_\Omega f \cdot v - \nu\int_\Omega \nabla u_g : \nabla v - \int_\Omega u_g \cdot \nabla u_g \cdot v$

on a encore $F \in V'$ puisque :

$$|\langle F, v\rangle| \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1} + \nu\|u_g\|_{H^1}\|v\|_{H^1} + \|u_g\|_{L^4}\|\nabla u_g\|_{L^2}\|v\|_{L^4}$$

or $\|u_g\|_{L^4} \leq C\|u_g\|_{H^1}$ et $\|v\|_{L^4} \leq C\|v\|_{H^1}$ (inégalité de Sobolev) donc :

$$|\langle F, v\rangle| \leq C\left(\|f\|_{2} + \|g\|_{L^2(\Gamma)} + \|g\|^2_{L^2(\Gamma)}\right)\|v\|_{H^1}.$$

d'où $F \in V'$.

$\boxed{\text{Exercice 3}}$

$\vec{u}_h = \sum_{j=1}^{N} u_j \vec{\varphi}_j$ et $q_h = \sum_{j=1}^{M} q_j \psi_j$

(6) $\Leftrightarrow$
$$\begin{cases} \nu\sum_{j=1}^{N} u_j \int_\Omega \nabla\vec{\varphi}_j : \nabla\vec{\varphi}_i - \sum_{j=1}^{M} p_j \int \psi_j \operatorname{div}\vec{\varphi}_i = \int \vec{f}\cdot\vec{\varphi}_i \quad \forall i = 1, \dots, N. \\ \sum_{j=1}^{N} u_j \int_\Omega \operatorname{div}\vec{\varphi}_j\, \psi_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, M. \end{cases}$$

On note $U = (u_1, \dots, u_N)^T$, $P = (p_1, \dots, p_M)^T$.

Le système ci-dessus s'écrit bien. $F = (F_1, \dots, F_N)$.

$$\begin{cases} AU + D^T P = F \\ DU = 0. \end{cases}$$

François Coppex, DP, EPFL.

E.D.P. : Série 6

## Exercice 1 : problème de Stokes stationnaire

$$\begin{cases} -\nu\Delta\underline{u} + \underline{\nabla} p = \underline{f} & \text{sur } \Omega\subset\mathbb{R}^2 \\ \underline{\nabla}\cdot\underline{u} = 0 & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \qquad (1)$$

1) A voir : p est définie à une cte près

Soit $p' = p + \text{cte}$, alors $\nabla p = \nabla p'$ donne la même sol. pour (1)

2) Egalités simplificatrices

a) soit $\underline{u},\underline{v}\in\mathbb{R}^2$, alors on définit :

$$\nabla u : \nabla v := \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \qquad (2)$$

alors :

$$-\int_\Omega \Delta\underline{u}\cdot\underline{v} = -\int_\Omega\sum_{i=1}^{3}\Delta u_i\cdot v_i$$

$$\overset{\text{parties}}{=} \sum_{i=1}^{3}\int_\Omega \nabla u_i\cdot\nabla v_i - \sum_{i=1}^{3}\int_{\partial\Omega}\underline{\nabla} u\cdot\hat{n}_i\cdot v_i\, d\sigma$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{3}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n_i}\cdot v_i\, d\sigma$$

$$\overset{(2)}{=} \int_\Omega\nabla u : \nabla v - \int_{\partial\Omega}\frac{\partial\underline{u}}{\partial n}\cdot\underline{v}\, d\sigma$$

$$\Rightarrow -\int_\Omega\Delta\underline{u}\cdot\underline{v} = \int_\Omega\nabla u:\nabla v - \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \underline{n}}\cdot\underline{v}\, d\sigma \qquad (3)$$

b)
$$\int_\Omega\underline{\nabla} p\cdot\underline{v} \overset{\text{parties}}{=} -\int_\Omega p\,\underline{\nabla}\cdot\underline{v} + \int_{\partial\Omega}p\cdot\underline{v}\cdot\hat{n}\, d\sigma \qquad (4)$$

3) $u,p$ sol. de (1) $\Rightarrow$ sol. de (P.F).

Soit $u\in V = (H_0^1(\Omega))^2$, $p\in Q = L_0^2(\Omega) = \{p\in L^2(\Omega) \text{ t.q. } \int_\Omega p = 0\}$. En imposant que $p\in L_0^2(\Omega)$ on définit univoq. la cte. En multipliant par $v\in V$ et on intégrant (1) on a :

$$\nu\cdot\int_\Omega\nabla u:\nabla v - \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\cdot\cancelto{0}{v} - \int_\Omega p\cdot\underline{\nabla}\cdot\underline{v} + \int_{\partial\Omega}p\cdot\cancelto{0}{\underline{v}}\cdot\hat{n}\, d\sigma = \int_\Omega f\cdot v \qquad \forall v\in V \qquad (5)$$

Soit $q\in Q$, alors aussi :

$$\int_\Omega(\underline{\nabla}\cdot\underline{u})\cdot q = 0 \qquad \forall q\in Q \qquad (6)$$

4) Sol de (5), (6) reformulée

Soit $V_{div} = \{v\in V \text{ t.q. } \underline{\nabla}\cdot\underline{v} = 0\}$, alors : soit $u\in V_{div}$ $\Rightarrow$

$$\nu\int_\Omega\nabla u:\nabla v - \int_\Omega p\,\cancelto{=0}{\underline{\nabla}\cdot\underline{v}} = \int_\Omega f\cdot v \qquad , u\in V_{div},\ \forall v\in V_{div} \qquad (7)$$

Unicité de la solution : - soient $u, w$ 2 sol du pb. , alors :

$$\nu \int_\Omega \nabla u : \nabla v = \int_\Omega f \cdot v \qquad \forall v \in V_{div}$$

$$\nu \int_\Omega \nabla w : \nabla v = \int_\Omega f \cdot v \qquad \forall v \in V_{div}$$

$$\overset{\ominus}{\Longrightarrow} \nu \int_\Omega [\nabla u : \nabla v - \nabla w : \nabla v] = 0$$

$$\Longrightarrow \nu \int_\Omega [\nabla u - \nabla w] : \nabla w = 0$$

$$\Longrightarrow \nabla u - \nabla w = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow u = w + cte$$

Sur le bord, $u = 0 \Longrightarrow cte = 0 \Longrightarrow u = w$ #

Une autre manière de voir est d'utiliser le thm. de Lax-Milgram :

$$\begin{cases} u \in V \\ a(u,v) = (f, v) \end{cases} \quad , a \text{ bilinéaire, coercive, continue}$$

$$\Longrightarrow \exists ! \ u \text{ sol. de (Pb)}$$

avec ici $V = (H_0^1(\Omega))^2$ , $a(u,v) = \nu \int_\Omega \nabla u : \nabla v$

Exercice 2 : Problème de Stokes stationnaire : condition aux bords

$$\begin{cases} -\nu \Delta \underline{u} + \underline{\nabla} p = \underline{f} & \text{sur } \Omega \\ \underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0 & \text{sur } \Omega \\ \underline{u} = \underline{g} & \text{sur } \Gamma \end{cases} \qquad (1)$$

1) A voir : (1) admet une solution il faut que $\int_\Gamma \underline{g}\cdot n = 0$

On a : $\quad \operatorname{div} u = 0 \quad$ sur $\Omega$

$$\Rightarrow \int_\Omega \operatorname{div} u = 0$$

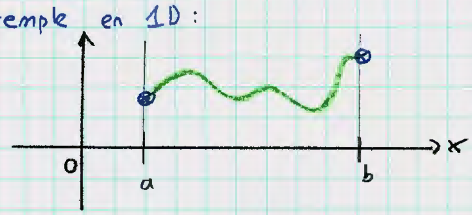
$$\Rightarrow \int_{\partial\Omega} u \cdot \underline{n} \, d\sigma = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\partial\Omega} g \cdot \underline{n} \, d\sigma = 0 \qquad (2)$$

on a donc que la condition $\operatorname{div} u = 0$ est équivalente à $\int_{\partial\Omega} g \cdot \underline{n} \, d\sigma = 0$.

2) Solution faible avec C.B.

Par exemple en 1D :




On écrit la solution comme $u = \mathring{u} + G$ t.q. $\mathring{u}|_{\partial\Omega} = 0$ , et $G$ qui donne la condition aux bords, alors en remplaçant dans (2) de la donnée :

$$\nu \int_\Omega \nabla(\mathring{u} + G) : \nabla v - \int_\Omega p \cdot \operatorname{div} v = \int_\Omega f \cdot v$$

$$\Rightarrow \nu \int_\Omega \nabla \mathring{u} : \nabla v - \int_\Omega p \cdot \operatorname{div} v = \int_\Omega f \cdot v - \nu \int_\Omega \nabla G : \nabla v \qquad \forall v \in V \qquad (3)$$

Pour l'éqn. à divergence :

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\mathring{u} + G) \cdot q = 0$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \operatorname{div} \mathring{u} \cdot q = - \int_\Omega \operatorname{div} G \cdot q \qquad \forall q \in Q \qquad (4)$$

Donc les C.B. ne font que ajouter un 2nd membre.

## Exercice 3 : formulation matricielle

Soit : $V_h \subset V$ , $\{\phi_i\}$
$Q_h \subset Q$ $\{\psi_j\}$

Trouver $u_h \in V_h$ , $p_h \in Q_h$ t.q.

$$\begin{cases} \nu \int_\Omega \nabla u_h : \nabla v_h - \int_\Omega p_h \cdot \operatorname{div}(v_h) = \int_\Omega f \cdot v_h & \forall v_h \in V_h \\ \int_\Omega \operatorname{div} u_h \cdot q_h = 0 & \forall q_h \in Q_h \end{cases} \qquad (1)$$

Avoir : $\Longrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot \underline{U} + D^t \cdot \underline{P} = F \\ a_{ij} = \nu \int_\Omega \nabla\phi_j : \nabla\phi_i \\ d_{ij} = -\int_\Omega \operatorname{div} \phi_j \, \psi_i \\ U = (u_1, u_2, \dots, u_n) \\ P = (p_1, p_2, \dots, p_n) \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Soit : $u_h = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot \phi_i$ , $v_h = \phi_j$ (3)

$p_h = \sum_{i=1}^{n} p_i \, \psi_i$ $q_h = \psi_j$ (4)

(3) et (4) dans (1) $\Longrightarrow$

i) Eqn. à divergence :

$$\int_\Omega \nabla \left( \sum_{i=1}^{n} u_i \phi_i \right) \cdot \psi_j = \sum_{i=1}^{n} u_i \underbrace{\int_\Omega \nabla\phi_i \, \psi_j}_{= -d_{ji}} = \underline{D \cdot u = 0} \qquad (5)$$

ii) Eqn. principale :

$$\nu \int_\Omega \nabla \left( \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot \phi_i \right) : \nabla \phi_j - \int_\Omega \left( \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \psi_i \right) \cdot \nabla \phi_j = \int_\Omega f \cdot \phi_j$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot \underbrace{\left( \nu \int_\Omega \nabla\phi_i : \nabla\phi_j \right)}_{= a_{ij}} - \sum_{i=1}^{n} p_i \underbrace{\int_\Omega \psi_i \, \nabla\phi_j}_{= d_{ij}} = \underbrace{\int_\Omega f \cdot \phi_j}_{= F_i}$$

$$\Longrightarrow \underline{A \cdot u + D^t p = F} \qquad (6)$$

# 7ème série

## I - Une simple propriété du système de Stokes

On désigne par $\Omega$ un domaine de $\mathbb{R}^2$ et on se donne deux espaces d'éléments finis $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ et $Q_h \subset L_0^2(\Omega)$. On cherche $u_h = (u_h, v_h) \in V_h^2$ et $p_h \in Q_h$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (\nabla u_h, \nabla w_h) - (\operatorname{div} w_h, p_h) & = & (f, w_h) \\ (\operatorname{div} u_h, q_h) & = & 0 \end{array} \right.$$

pour tout $(w_h, p_h) \in V_h^2 \times Q_h$. Sous forme matricielle, ce système peut s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} AU + D^T P & = & F, \\ DU & = & 0. \end{array} \right. \tag{1}$$

On note $N$ le nombre de degrés de liberté pour chaque composante de la vitesse et $M$ le nombre de degrés de liberté pour la pression. Autrement dit, $U$ est un vecteur de $\mathbb{R}^{2N}$, $P$ un vecteur de $\mathbb{R}^M$, $A$ une matrice $2N \times 2N$ et $D$ une matrice $N \times M$.

**1)** Vérifier que pour que le système (1) ait une unique solution $(U, P)$, il est nécessaire que $Ker D^T = \{0\}$ (ou, ce qui est équivalent, que le rang de $D^T$ soit maximum). En déduire que nécessairement $M \leq 2N$.

## II - Instabilité de la paire P1/P0.

**2)** On considère le maillage de la figure 1. Dans cet exemple, $V_h$ est l'espace des fonctions P1 (continue

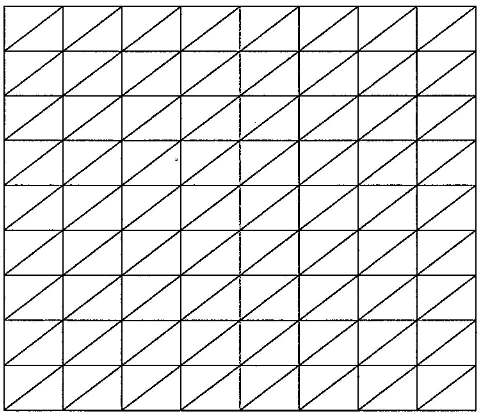


Figure 1:

sur $\Omega$ et affines par triangle) s'annulant sur le bord et $Q_h$ l'espace des fonctions P0 (constantes par triangle) de moyenne nulle sur $\Omega$. Vérifier que la paire d'éléments finis (P1/P0) est instable.

## III - Instabilité de la paire Q1/P0.

On considère à présent un maillage composé de carrés de côté $h$ (figure 2). Dans cet exemple, $V_h$ est l'espace des fonctions Q1 (continue sur $\Omega$, polynomiales de degré 1 par rapport a chaque variable sur chaque élément) s'annulant sur le bord et $Q_h$ l'espace des fonctions P0 de moyenne nulle sur $\Omega$.

**3)** Vérifier que le simple argument utilisé pour montrer l'instabilité de la paire P1/P0 ne permet pas de conclure à l'instabilité de la paire Q1/P0.

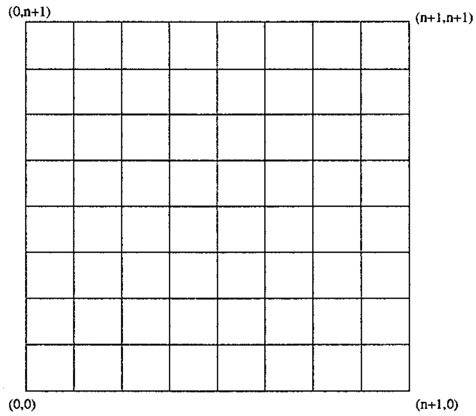



Figure 2:

**4)** On désigne par $K_{i,j}$ le carré dont le coin inférieur gauche est le noeud $(i,j)$, pour $i,j = 0,..,n$. On note $u_i$ (resp. $v_i$) la valeur de $u_h$ (resp. $v_h$) au noeud $i$ et $q_{i+1/2,j+1/2}$ la valeur (constante) de $q_h$ sur l'élément $K_{i,j}$.

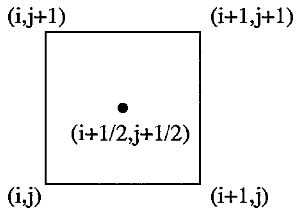



Figure 3: Un élément $K_{i,j}$

Montrer que pour tout $(u_h, v_h) \in V_h^2$ et $q_h \in Q_h$, on a :

$$\int_{K_{i,j}} q\frac{\partial u_h}{\partial x}\,dxdy = \frac{h}{2}q_{i+1/2,j+1/2}(u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j})$$

et que

$$\int_{K_{i,j}} q\frac{\partial v_h}{\partial y}\,dxdy = \frac{h}{2}q_{i+1/2,j+1/2}(v_{i+1,j+1} + v_{i,j+1} - v_{i+1,j} - v_{i,j})$$

**Indication :** on rappelle que si $\xi \longrightarrow g(\xi)$ est une fonction affine on a

$$\int_a^b g(\xi)\,d\xi = \underbrace{(b-a)}_{h}\frac{g(a)+g(b)}{2}.$$ moyenne f!

**5)** En déduire que :

$$\begin{aligned}\int_\Omega q_h \mathrm{div}\, u_h\,dxdy &= \frac{h}{2}\sum_{i,j=1}^{n} u_{i,j}(q_{i-1/2,j-1/2} + q_{i-1/2,j+1/2} - q_{i+1/2,j-1/2} - q_{i+1/2,j+1/2}) \\ &\quad + v_{i,j}(q_{i-1/2,j-1/2} - q_{i-1/2,j+1/2} + q_{i+1/2,j-1/2} - q_{i+1/2,j+1/2})\end{aligned}$$

**6)** En déduire qu'il existe un élément $q^*$ de $Q_h$ tel que

$$\int_\Omega q^* \mathrm{div}\, u = 0,$$

pour tout $u \in V_h$ (autrement dit, avec les notations de la première question $KerD \neq \{0\}$). Une telle fonction $q^*$ est appelée "pression parasite".

François Coppex, DP, EPFL.

# E.D.P. : Série 7

## I) Propriétés du système de Stokes

### i) Etablir la forme variationnelle du problème

Soit : $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \nabla p + (u\nabla)u = f \\ \nabla u = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t} - \nu\Delta u^{n+1} + \nabla p^{n+1} + (u^n\cdot\nabla)u^n = f^{n+1} \\ \nabla u^{n+1} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\Delta t}\cdot u^{n+1} + \nabla p^{n+1} - \nu\Delta u^{n+1} = \underbrace{f^{n+1} - (u^n\nabla)u^n + \frac{1}{\Delta t}u^n}_{:=g} \\ \nabla u^{n+1} = 0 \end{cases} \qquad , u := u^{n+1}, \; p := p^{n+1}$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \frac{1}{\Delta t} u\cdot v \; \underbrace{- \nu \int_\Omega \Delta u\cdot v}_{= \nu\int_\Omega \nabla u : \nabla v \, - \, \nu\int_{\partial\Omega} \nabla u\cdot n\cdot \cancel{v}\, d\Sigma} + \int_\Omega \nabla p\cdot v = \int_\Omega g\cdot v$$

$$\int_\Omega \nabla p\cdot v = -\int_\Omega p\cdot\nabla v + \int_{\partial\Omega} \cancel{p v\cdot \vec{n}} \quad (=0)$$

(avec $v = 0$ sur $\partial\Omega$)

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_\Omega \frac{1}{\Delta t} u\cdot v + \nu\int_\Omega \nabla u:\nabla v - \int_\Omega p\nabla v = \int_\Omega g v \\ \int_\Omega \nabla u\cdot v = 0 \end{cases}$$

Si on ne s'occupe pas du pb. stationnaire, alors le premier terme tombe, et

$$\begin{cases} \nu\int_\Omega \nabla u:\nabla v - \int_\Omega p\nabla v = \int_\Omega g v \\ \int_\Omega \nabla u\cdot v = 0 \end{cases}$$

Soit : $v = \varphi_i$, $u = \sum_{i=1}^{N} c_i\cdot\varphi_i$, $p = \sum_{i=1}^{M} p_i\cdot\psi_i$, alors on obtient un système :

$$\begin{array}{c} \\ N \\ N \\ M \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \quad N \quad & \quad N \quad & \quad M \quad \end{array} \\ \begin{pmatrix} \nu\int_\Omega \nabla\varphi_i\nabla\varphi_j & 0 & -\int q_j \frac{\partial}{\partial x}\varphi_i \\ 0 & \nu\int_\Omega \nabla\varphi_i\nabla\varphi_j & -\int q_j\frac{\partial}{\partial y}\varphi_i \\ -\int_\Omega q_i\frac{\partial}{\partial x}\varphi_j & -\int_\Omega q_i\frac{\partial}{\partial y}\varphi_j & 0 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ \vdots \\ u_N^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ \vdots \\ u_N^{(2)} \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ \hline F_y \\ \hline 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A & D^T \\ D & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

### ii) Avoir $\exists!$ sol. de (1) $\Rightarrow \ker(D^t) = 0$

si $\ker D^t \neq \{0\}$ et si $(u,p)$ est solution, alors $(u, p+p^*)$ est aussi solution, avec $p^* \in \ker D^t$, donc pour avoir l'unicité il faut que $\ker D^t = \{0\}$

### iii) Avoir $\ker D^t = \{0\} \Leftrightarrow M \leq 2N$

si $\ker D^t \neq \{0\}$, alors $\exists\, x \neq 0$ t.q. $D^t x = 0$, donc si $(u,p)$ solution, alors $(u, p+x)$ est aussi sol., donc $\ker D^t = 0$ est une cond. nécessaire mais non suffisante.

$$D^t : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^{2N}$$
$$D : \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}^M$$

$$M = \dim \ker D^t + \dim \operatorname{Im} D^t$$
$$2N = \dim \ker D + \dim \operatorname{Im} D$$

$$\Longrightarrow \quad 2N - M = \underbrace{\dim \ker D}_{\geq 0} \underbrace{- \dim \ker D^t}_{= 0 \text{ si } \ker D^t = 0} \underbrace{+ \dim \operatorname{Im} D - \dim \operatorname{Im} D^t}_{= 0}$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{2N - M \geq 0} \qquad (2)$$

## II) Instabilités $P_1 / P_0$

$$\left.\begin{aligned} 2N &= 2 \cdot \big( n^2 - \underbrace{2n - 2(n-2)}_{\text{bord}} \big) \\ M &= 2 \cdot (n-1)^2 - 1 \end{aligned}\right\} \quad 2N - M < 0 \qquad \Longrightarrow \text{instable}$$

## II) Instabilités $Q_1 / P_0$

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &: \text{degré } 1 : & 2N &= 2(n-1)^2 \\ P_0 &: \text{degré } 0 : & M &= n^2 - \underset{\uparrow \text{moyenne nulle}}{1} \end{aligned}\right\} \quad 2N - M = n^2 - 4n + 3 > 0 \qquad \forall n \geq 3$$

$\Longrightarrow$ cond. nécessaire mais non suffisante

## 4) Reformulation :

$$\int_{k_{ij}} q \frac{\partial}{\partial x} u \, dx\, dy = q_{\substack{i+1/2 \\ j+1/2}} \int_0^h dx \int_0^h dy \frac{\partial}{\partial x} u$$

$$= q_{\substack{i+1/2 \\ j+1/2}} \int_0^h dy \, [\underbrace{u(h,y) - u(0,y)}_{\text{affine} \to \text{indic.}}]$$

$$= q_{\substack{i+1/2 \\ j+1/2}} [u(h,h) - u(0,h) + u(h,0) - u(0,0)] \cdot \frac{h}{2}$$

$$= q_{\substack{i+1/2 \\ j+1/2}} \cdot \frac{h}{2} \left( u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j} \right) \qquad (3)$$

## 5) Eqn. sur la divergence

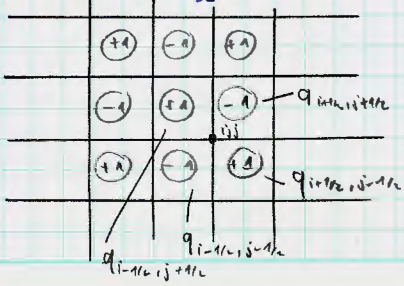
$$\int_\Omega q_h \cdot \operatorname{div}(u_h)\, dx\, dy = \sum_{ij=0}^N \int_{k_{ij}} q_h \operatorname{div} u_h \, dx\, dy$$

$$= \sum_{ij=0}^N \frac{h}{2} q_{\substack{i+1/2 \\ j+1/2}} \cdot \left( u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j} + v_{i+1,j+1} + v_{i+1,j} - v_{i,j+1} - v_{i,j} \right)$$

$$= \text{etc.} = \text{donnée}$$

## 6) Exist. press. parasite

$$\exists\, q^* \text{ t.q. } \int_\Omega q^* \operatorname{div} u = 0$$



# 7ème Série - Corrigé.

① * Si $\ker D^T \neq \{0\}$ et si $(U,P)$ est une solution alors $(U, P+\alpha P^*)$ (où $P^* \neq 0$, $P^* \in \ker D^T$) est aussi solution.
donc, nécessairement, $\ker D^T = \{0\}$ pour avoir l'unicité.

* $2N = \operatorname{rg} D + \dim \ker D$

$M = \operatorname{rg} D^T + \dim \ker D^T = \operatorname{rg} D^T = \operatorname{rg} D$

d'où $2N - M = \dim \ker D \geq 0$.

Une condition nécessaire pour avoir une unique solution est donc $\boxed{2N \geq M}$.

② * Nb de degrés de liberté pour la vitesse :

$2 \times$ (nb de noeuds du maillage − nb noeuds sur le bord)

↑ (nb de composantes en 2D)

* Nb de ddl pour la pression :

Nb d'éléments $- 1$ (car $\int_\Omega p = 0$)

Ainsi, si le maillage à $n \times n$ noeuds $(n \geq 3)$ on a :

$$2N = 2\left(n^2 \underbrace{-\,2n - 2(n-2)}_{\text{bord}}\right)$$

$$= 2n^2 - 8n + 8$$

et $M = 2(n-1)^2 - 1 = 2n^2 - 4n + 1$

ainsi la condition nécessaire de la question ① n'est pas remplie
la paire P1/P0 est donc instable.

③ a) Il y a $n^2$ noeuds intérieurs donc $2n^2$ ddl pour la vitesse.
Il y a $(n+1)^2$ éléments donc $n^2 + 2n$ ddl pour la pression.
Pour $n$ assez grand on a $2N \geq M$. La question ① ne permet donc pas de conclure.

b) $$\int_{K_{ij}} q\, \partial_x u\, dx\, dy = q_{i+1/2,\, j+1/2} \int_{x=0}^{h} \int_{y=0}^{h} \partial_x u \, dx\, dy$$

$$= q_{i+1/2,\, j+1/2} \int_{y=0}^{h} \underbrace{[u(h,y) - u(0,y)]}_{\to \text{ affine en } y} dy$$

$$= q_{i+1/2,\, j+1/2} \frac{h}{2} \left[ u(h,h) - u(0,h) + u(h,0) - u(0,0) \right]$$

$$= q_{i+1/2,\, j+1/2} \frac{h}{2} \left( u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j} \right).$$

et de même pour $\int_{K_{ij}} q\, \partial_y v \, dx\, dy$ ...

c) $$\int_\Omega q_h \operatorname{div} \vec{u}_h \, dx\, dy = \sum_{i,j=0}^{n} \int_{K_{ij}} q_h \operatorname{div} \vec{u}_h \, dx\, dy$$

$$= \sum_{i,j=0}^{n} \frac{h}{2} q_{i+1/2,\, j+1/2} \left( u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j} + v_{i+1,j+1} + v_{i,j+1} - v_{i+1,j} - v_{i,j} \right)$$

$$d'où \int_\Omega q_h \, \mathrm{div}\, \vec{u}_h = \frac{h}{2} \sum_{i,j=1}^{m+1} q_{i-1/2,j-1/2} (u_{i,j} + v_{i,j})$$

$$+ \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=0}^{m} q_{i-1/2,j+1/2} ( u_{i,j} - v_{i,j} )$$

$$+ \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{m+1} q_{i+1/2,j-1/2} ( -u_{i,j} + v_{i,j} )$$

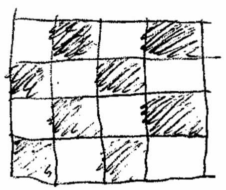
$$+ \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} q_{i+1/2,j+1/2} ( -u_{i,j} - v_{i,j} )$$

$$= \frac{h}{2} \sum_{i,j=1}^{m} u_{i,j} \big( q_{i-1/2,j-1/2} + q_{i-1/2,j+1/2} - q_{i+1/2,j-1/2} - q_{i+1/2,j+1/2} \big)$$

$$+ v_{i,j} \big( q_{i-1/2,j-1/2} - q_{i-1/2,j+1/2} + q_{i+1/2,j-1/2} - q_{i+1/2,j+1/2} \big)$$

Remarquer que cette "manipulation d'indices" revient à une "intégration par parties discrète" ( le dernier terme correspondant à "$\int_\Omega u_h \cdot \nabla_h q_h$")

d) avec l'expression de la question c), il est clair que la pression $p^*$ définie par $+1$ sur les cases noires et $-1$ sur les cases blanches est une pression parasite.



La paire Q1/P0 est donc instable.