RELATIVITE ET COSMOLOGIE

1ère partie : **Introduction**

2ème partie : **Relativité Restreinte**

COURS DU PROFESSEUR CH. GRUBER

Automne 1997

RELATIVITE ET COSMOLOGIE

1ère partie : **Introduction**

2ème partie : **Relativité Restreinte**

COURS DU PROFESSEUR CH. GRUBER

Automne 1997

TABLE DES MATIERES

PREMIERE PARTIE

INTRODUCTION

CHAPITRE I : DE GALILÉE A EINSTEIN

DEUXIEME PARTIE

RELATIVITE RESTREINTE

(La physique sans gravitation)

CHAPITRE II : CINÉMATIQUE : TRANSFORMATIONS DE LORENTZ

CHAPITRE III : TENSEURS EN RELATIVITÉ RESTREINTE

CHAPITRE IV : LES DEUX PRINCIPES DE LA THERMODYNAMIQUE

CHAPITRE V : SYSTEMES DE PARTICULES

CHAPITRE VI : ELECTRODYNAMIQUE

CHAPITRE VII : HYDRODYNAMIQUE

PREMIERE PARTIE

INTRODUCTION

- Principe de la Relativité Restreinte : De Galilée à Einstein
- Prince d'Equivalence et Théorie de la gravitation : De Newton à Einstein
- Relativité Générale : De Mach à Einstein

(Références : Cours de 1er cycle
A. Einstein (1963) : La Relativité, Petite Bibliothèque, Payot
R. D'Inverno (1992) : Introducing Einstein's Relativity, Clarendon Press).

CHAPITRE I : DE GALILÉE A EINSTEIN

1.1. Mécanique newtonienne

La mécanique est l'étude du mouvement des corps (constitués d'un ensemble de points matériels). Cette étude s'effectue de la manière suivante:

i) Il faut commencer par choisir un "**référentiel**", ensemble de points immobiles les uns par rapport aux autres par rapport auxquels on décrira le mouvement. On admet que l'observateur est immobile par rapport au référentiel (ce qui permet d'identifier observateur et référentiel) et qu'il dispose d'une "règle" et d'une "horloge".

ii) A tout instant t, on définit le "**point coïncidant** P_t", point fixé dans le référentiel qui coïncide avec le point P du système étudié à l'instant t. Ayant ainsi défini les points P_t , Q_t , R_t , ... fixés dans le référentiel, on pourra alors mesurer les distances entre ces points, puis étudier leur évolution en fonction du temps.

iii) Finalement, pour décrire le mouvement et en trouver les causes, on introduit un "**système de coordonnées**", c'est-à-dire une paramétrisation des points du référentiel par trois nombres réels. Ainsi, à l'instant t, le point P du système étudié est paramétrisé par (t, x_P^1, x_P^2, x_P^3).

En conclusion, l'étude de la mécanique est l'étude d'**événements**, phénomènes élémentaires localisés dans l'espace et dans le temps (par exemple la position du point P à un instant donné). Avec l'introduction d'un système de coordonnées ces événements sont paramétrisés par 4 nombres réels, c'est-à-dire qu'il est possible de définir une application de l'ensemble des événements dans R^4 :

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Evénements}\} & \to & R^4 \\ E & \mapsto & (t_E, x_E^1, x_E^2, x_E^3) \end{array}$$

L'étude du mouvement conduisit Newton à énoncer les "lois générales" du mouvement d'un point matériel, puis à élaborer la théorie de la gravitation.

Lex I (ou principe d'inertie) : $\vec{F} = 0 \rightarrow \vec{v} = \text{cte.}$

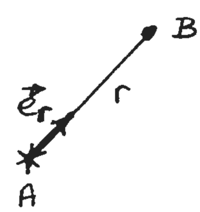
Selon le point de vue newtonien cela signifie qu'il existe des référentiels particuliers (munis de règles et d'horloges), appelés "**référentiels d'inertie**", tels qu'un corps suffisamment éloigné de tout autre corps (= système isolé) ait un mouvement rectiligne-uniforme. En d'autres mots, par rapport à un référentiel d'inertie, l'espace (vide de matière ou de rayonnement) est homogène-isotrope, et le temps homogène.

Lex II
$$\begin{cases} m \dfrac{d\vec{x}}{dt} = \vec{p} \\[2ex] \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \end{cases}$$

(Selon le point de vue newtonien, cette loi, et les conséquences qui découlent des trois lois, ne sont valables que par rapport à un référentiel d'inertie).

Lex III
$$\vec{F}^{\,A\rightarrow B} = - \vec{F}^{\,B\rightarrow A}$$

Théorie de la gravitation newtonienne



$$\vec{F}^{\,A\rightarrow B} = -G \frac{m_A^* \, m_B^*}{r^2} \vec{e}_r$$

Pour un ensemble de points matériels, on introduit **le champ de gravitation** $\vec{g}\,(t, \vec{x})$, tel que la force gravifique agissant sur le point matériel de masse gravifique m^*, situé au point $\vec{x}$ à l'instant t soit donnée par :

$$\vec{F}^{\,gr}(t, \vec{x}) = m^* \vec{g}\,(t, \vec{x})$$

Le champ gravifique est relié à la distribution de masse par les relations

$$\begin{cases} \vec{g}\,(t, \vec{x}) = - \vec{\nabla} \phi \\[2ex] \Delta\phi = 4\pi G \rho^*(t, \vec{x}) \end{cases}$$

"**Equation de Newton** (ou de Poisson)" où $\rho^* (t, \vec{x})$ est la densité de masse gravifique.

Principe d'équivalence (de Galilée, Newton)
La masse d'inertie m et la masse gravifique m^* sont des concepts équivalents :

$$\boxed{m = m^*}$$

1.2. Relativité de Galilée

Le principe de la relativité de Galilée est une illustration du principe d'objectivité qui affirme que les lois de l'Univers ne doivent pas dépendre des choix que l'on a dû faire pour les établir.

i) Considérons les changements de référentiels $R \rightarrow R'$

Par rapport au référentiel R : $E \rightarrow (t, x^1, x^2, x^3)$
par rapport au référentiel R' : $E \rightarrow (t', x'^1, x'^2, x'^3)$

ii) Pour relier les observations effectuées dans R et R', la mécanique newtonienne introduit les "axiomes non relativistes"

1) Le concept de **simultanéité** est un concept absolu.

Cet axiome signifie que l'ensemble des événements simultanés est un ensemble qui ne dépend pas du choix du référentiel. Ceci implique que l'**intervalle de temps** entre deux événements est un concept absolu, et par conséquent

Axiome (I) $$t = t' + s^0 \qquad (s^0 = \text{constante qui dépend de R et R'}).$$

On dit plus simplement que "**le temps est un concept absolu**".

2) **L'intervalle de longueur** entre deux événements simultanés est un concept absolu :

$$|P_t \, Q_t|_R = |P'_{t'} \, Q'_{t'}|_{R'} \qquad \text{si } t = t' + s^0$$

De ces axiomes on conclut ensuite que R' est un solide par rapport à R et que $0' \vec{e}_1{}' \vec{e}_2{}' \vec{e}_3{}'$ est un repère orthonormé par rapport à R (si cela est le cas par rapport à R').

On établit ensuite les lois de transformation :

$$\vec{x} = \vec{x}\,' + \vec{s}$$
$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_e$$
$$\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

où $\vec{v}_e$ est la vitesse d'entraînement, $\vec{a}_e$ et $\vec{a}_c$, les accélérations d'entraînement et complémentaire.

En conclusion, les axiomes non relativistes postulent qu'il y a deux invariants par rapport aux changements de référentiel, l'intervalle de temps et l'intervalle de longueur, et permettent d'établir les lois de transformation.

iii) Transformation de Galilée

Par définition, les transformations de Galilée sont les transformations associées aux changements de référentiels en **translation uniforme** les uns par rapport aux autres.

Soit $\vec{u} = \vec{v}_{R')R}$ la vitesse (constante) de R' par rapport à R. La transformation de Galilée est définie par

$$\begin{cases} t' = t - s^o \\ \vec{x}\,' = \vec{x} - \vec{u}\, t - \vec{s} \end{cases}$$

En introduisant des coordonnées cartésiennes dans R et R', nous avons ainsi:

$$\begin{cases} t' = t - s^o \\ x'^i = R^i{}_j\,[x^j - u^j\, t - s^j] \end{cases}$$

où $R^i{}_j$ est une matrice orthogonale [$R\,R^t = 1$], associée à la rotation amenant les axes $0\,x^1\ x^2\ x^3$ sur les axes $0'\ x'^1\ x'^2\ x'^3$.

L'ensemble des transformations de Galilée est ainsi un groupe à 10 paramètres (4 paramètres pour l'origine du temps et de l'espace, 3 paramètres associés à la vitesse de R' par rapport à R, et 3 paramètres associés à l'orientation du système d'axes orthogonaux).

On se restreint le plus souvent aux **transformations de Galilée homogènes,** définies en identifiant l'origine du temps et de l'espace dans R et R', soit :

$$\begin{cases} t' = t \\ \vec{x}' = \vec{x} - \vec{u}\,t \end{cases}$$

C'est un groupe à 6 paramètres.

iv) Principe de la Relativité de Galilée (1632)

Dans un texte célèbre (voir Mécanique Générale, p. 400), Galilée énonce le principe de la relativité, que nous exprimerons de la manière suivante :

1) Il existe des référentiels particuliers, appelés référentiels d'inertie, par rapport auquel l'espace vide (de matière et de champ) est homogène-isotrope et le temps homogène. (En particulier un point matériel isolé a un mouvement rectiligne-uniforme).

2) Tout référentiel en translation uniforme par rapport à un référentiel d'inertie est également un référentiel d'inertie.

3) Les lois de la mécanique sont les mêmes relativement à tout référentiel d'inertie : elles sont invariantes par rapport aux changements de référentiel en translation uniforme les uns par rapport aux autres.

1.3. Electrodynamique

Les observations sur le mouvement de la lumière conduisirent aux conclusions suivantes :

Dans le vide (en particulier en l'absence de champ de gravitation), la lumière se propage en ligne droite, avec une vitesse c qui est une constante universelle finie indépendante de la fréquence, de la direction de propagation, du mouvement de la source, et du référentiel d'inertie.

- En effet, la vitesse de propagation ne doit pas dépendre de la fréquence, sinon le minimum d'émission d'une étoile fixe ne s'observerait pas simultanément pour les différentes couleurs lors d'une éclipse.

- Par ailleurs, par l'observation des étoiles doubles, de Sitter a montré que la vitesse de propagation ne dépend pas de la vitesse de la source.

Nous sommes ainsi conduits à introduire le postulat suivant sur la vitesse de la lumière :

Axiome (II) $\begin{cases} \text{La vitesse de la lumière dans le vide est une constante,} \\ \text{qui est la même relativement à tout référentiel d'inertie.} \end{cases}$

De plus, on aimerait généraliser le principe de la relativité de Galilée et introduire le **principe de la relativité restreinte** suivant :

Axiome (III) $\begin{cases} \text{Les lois de la physique sont les mêmes} \\ \text{relativement à tout référentiel d'inertie} \end{cases}$

(l'adjectif "restreint" signifie que l'on ne considère que des référentiels d'inertie et des coordonnées cartésiennes).

1.4. Incompatibilité des trois Principes Fondamentaux.

Des axiomes non relativistes (I), nous avons :

$$\vec{v}\,)_R = \vec{v}\,)_{R'} + \vec{v}_{R')R}$$

Par conséquent, l'axiome (I) est incompatible avec l'axiome (II) sur la vitesse de la lumière ; de plus, comme la vitesse de la lumière apparaît dans les équations de Maxwell, (I) est incompatible avec le principe de la relativité (restreinte) (III). De même l'axiome (II), associé aux transformations de Galilée, est incompatible avec l'axiome (III).

En conclusion, les trois principes fondamentaux sont incompatibles et nous sommes obligés d'abandonner au moins l'un d'entre eux. Pour cela, voyons alors quelles sont les bases qui permettent de justifier ces principes :

- Axiomes Non Relativistes (I) : La justification de cet axiome est basée sur notre intuition, sur notre perception de l'espace et du temps, sur nos expériences journalières.

- Loi sur la vitesse de la lumière (II) : On a cherché à remplacer la loi de propagation de la lumière dans le vide par une autre loi, plus compliquée, qui soit compatible avec le principe de la relativité. Les travaux théoriques de M. A. Lorentz sur l'électrodynamique dans les corps en mouvement montrèrent que les expériences dans ce domaine conduisent nécessairement à une théorie de l'électromagnétisme qui a comme conséquence la constance de la vitesse de la lumière dans le vide.

- Principe de la Relativité (III) : La justification de ce principe est basée d'une part sur le fait qu'il est vérifié en mécanique et, d'autre part, sur le fait qu'il est l'expression du principe d'objectivité. De plus, si ce principe n'était pas valable, il devrait y avoir un référentiel privilégié par rapport auquel il faut énoncer les lois de la nature et, en particulier, par rapport auquel la loi (II) est vérifiée. Ce référentiel privilégié a été introduit comme le référentiel défini par "l'Ether". Cependant, les expériences de Michelson et Morley ont montré qu'il n'était pas possible de mettre en évidence un mouvement de la Terre par rapport à l'Ether.

  Remarquons également que si (III) n'était pas vérifié, la direction du mouvement de la Terre devrait intervenir à tout instant dans l'énoncé des lois de la nature.

La discussion des sections suivantes va nous montrer qu'il n'y a aucune justification, même intuitive, pour maintenir les axiomes non relativistes et, en même temps, ayant abandonné (I), qu'il n'y a aucune contradiction entre la loi (II) et le postulat de la relativité (III).

1.5. Relativité du temps et de l'espace

Nous allons commencer par nous poser la question suivante : Comment définir la simultanéité de deux événements E_1 et E_2 ? (par exemple l'enclenchement des feux à l'arrière E_1 et à l'avant E_2 d'un train).

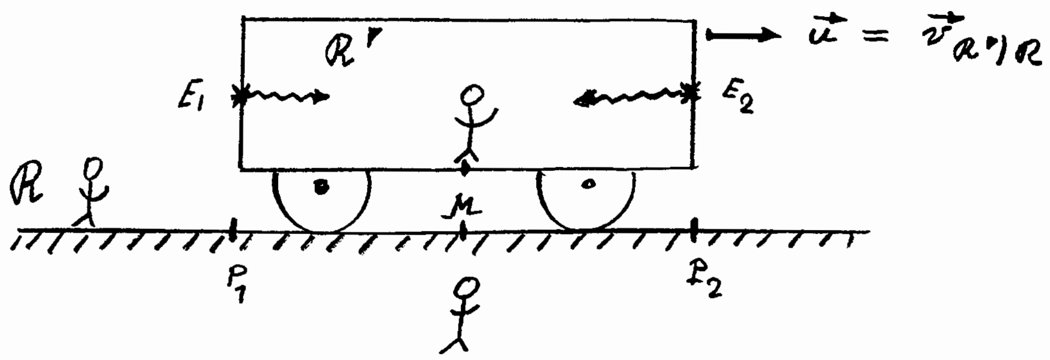


Fig. 1.1

Par **convention**, nous dirons que les événements E_1 et E_2 sont simultanés si l'observateur au point milieu M des points coïncidants P_1 et P_2 voit simultanément les deux événements.

On introduit ensuite l'**hypothèse** : "Si E_1 et E_2 sont simultanés et si E_2 et E_3 sont simultanés, alors E_1 et E_3 sont simultanés".

On remarquera que la définition de la simultanéité est une pure convention. Au contraire, l'hypothèse ci-dessus est une hypothèse physique, concernant la vitesse de la lumière, qui devra être vérifiée par l'expérience.

On remarquera également que le concept de simultanéité ainsi défini, est un concept relatif qui dépend du référentiel choisi. En effet, si E_1 et E_2 sont simultanés relativement à R, alors, par rapport à R' (le train), l'observateur dans R' qui se trouve au milieu M' des points coïncidants P_1' et P_2' recevra la lumière émise de E_2 avant la lumière émise de E_1 : par rapport à R' l'événement E_2 est antérieur à E_1. Nous pouvons illustrer cette affirmation sur le diagramme ci-dessous (espace-temps de l'observateur O)

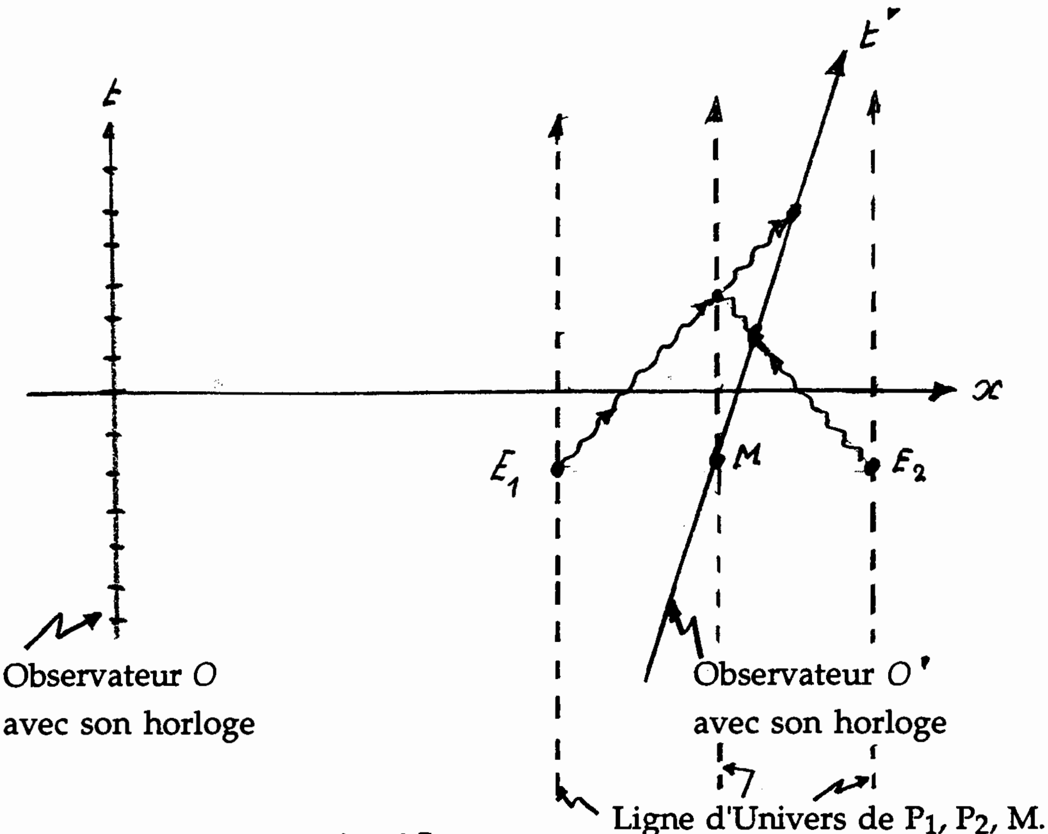


Fig. 1.2

En conclusion, la notion de temps est une notion relative qui dépend du référentiel choisi.

Il suit de cette conclusion que la notion de longueur, ou d'espace, est également une notion relative qui dépend du référentiel. En effet, pour mesurer la longueur d'un solide en mouvement (le train), il faut repérer les positions des deux extrémités **au même instant**, soit P_t et Q_t, puis mesurer la distance entre ces points coïncidants.

Cependant, les événements simultanés par rapport à R ne le sont pas par rapport à R'. L'observateur *O'* dira que *O* a repéré la position de Q avant de repérer la position de P et, par conséquent, la longueur mesurée par *O* (= longueur du corps en mouvement) sera nécessairement plus petite que la longueur du corps au repos (mesurée par *O'*) : il apparaît une contraction des solides en mouvement dans la direction du mouvement.

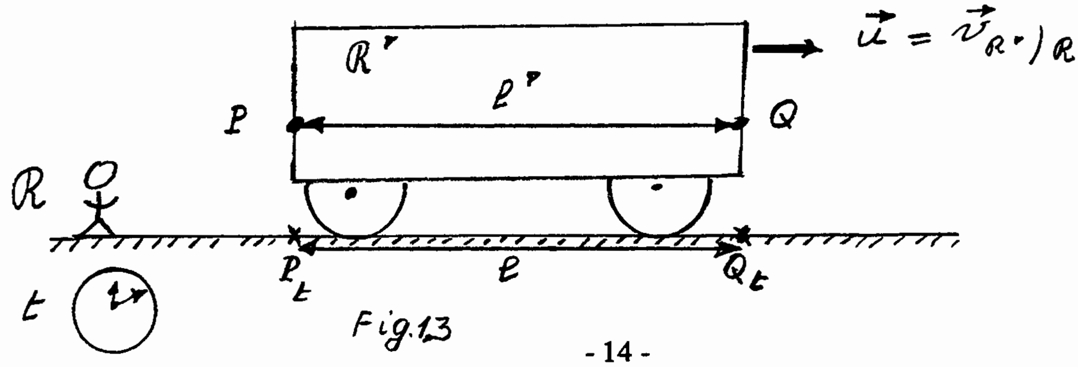


Fig.1.3

1.6. Paramétrisation des événements par l'observateur *O* dans le référentiel d'inertie R

La discussion de la section précédente a montré qu'il est nécessaire de préciser la méthode utilisée pour la description du mouvement. Nous voulons choisir un système de coordonnées (cartésiennes):

$$\{\text{Evénements}\} \to \qquad \mathbb{R}^4$$

$$E \qquad \mapsto x_E = (x_E^0, x_E^1, x_E^2, x_E^3) = (x_E^\mu)$$

$$x_E^0 = ct_E \,;\, \vec{x}_E = (x_E^1, x_E^2, x_E^3) = (x_E^i)$$

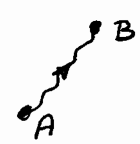
tel que la condition suivante soit satisfaite.

<u>Condition 1</u> "Vitesse de la lumière"

> Dans le vide, la lumière se déplace en ligne droite, avec une vitesse c, indépendante de la direction, du mouvement de la source, et du référentiel d'**inertie** choisi. (Par la suite, on posera c = 1).

Il suit de cette condition que si les événements A et B sont reliés par un rayon lumineux, alors on doit avoir :

$$|\vec{x}_B - \vec{x}_A| = c\ |t_B - t_A|$$



soit

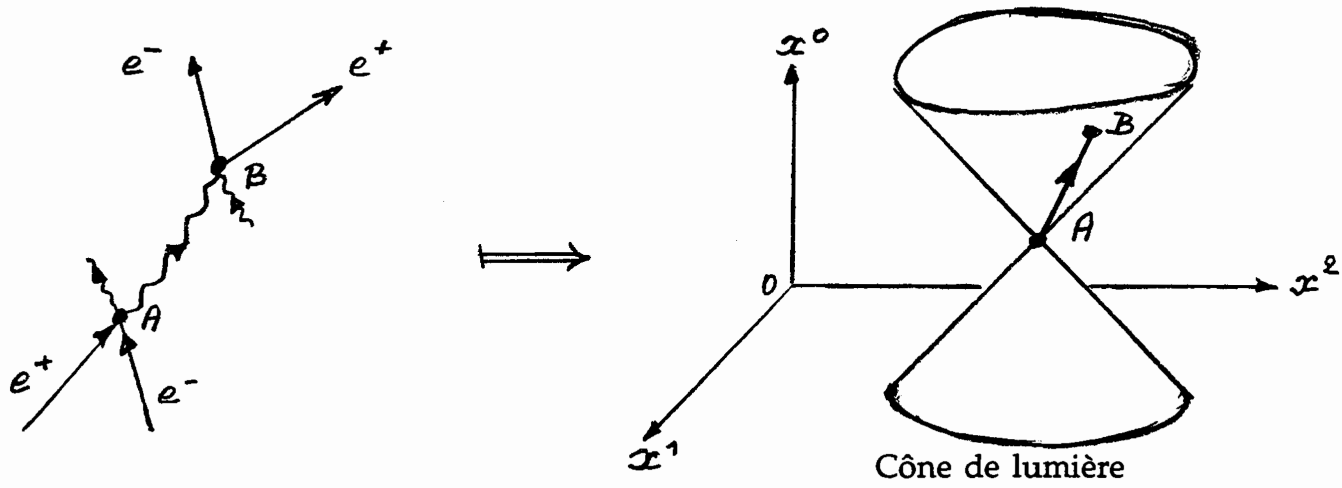
$$|\vec{x}_B - \vec{x}_A| = \quad |x_B^0 - x_A^0|$$

c'est-à-dire $$\boxed{-\ c^2\ \Delta t^2 + \sum_{i=1}^{3}\left(\Delta x^i\right)^2 = 0} \qquad (1.1)$$

où $$\Delta x^\mu = x_B^\mu - x_A^\mu \quad , \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

et $$\Delta \vec{x}^{\,2} = \sum_{i=1}^{3}\left(\Delta x^i\right)^2.$$

En conclusion, sur la carte représentant les événements (pour l'observateur O), l'événement B est situé sur le cône de sommet A et d'angle au sommet égal à 45°.



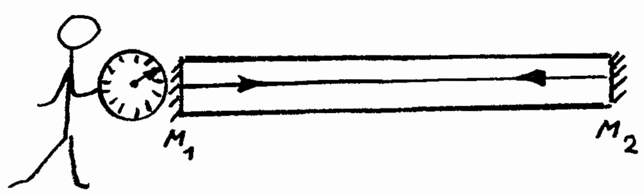
Evénements

Carte pour l'observateur O

Fig.1.4

Nous pouvons alors choisir une paramétrisation des événements en utilisant uniquement la lumière et la condition 1. Pour simplifier l'exposé de cette introduction, on se limitera au cas d'un espace-temps à 2 dimensions (1 dimension d'espace et 1 dimension du temps).

On commence par définir la variable "temps" au moyen d'un tube de lumière : les "secondes" sont définies par les réflexions successives de la lumière sur le miroir qui coïncide avec l'observateur



Longueur du tube $= \frac{1}{2}$ [L]

Fig.1.5

L'observateur*O* paramétrise alors les événements E_n, "tics successifs de l'horloge" (c.à.d. le temps) par quatre nombres $\left(x^o_n = ct_n = n, 0, 0, 0\right)$, et les représente sur une carte de la manière suivante :

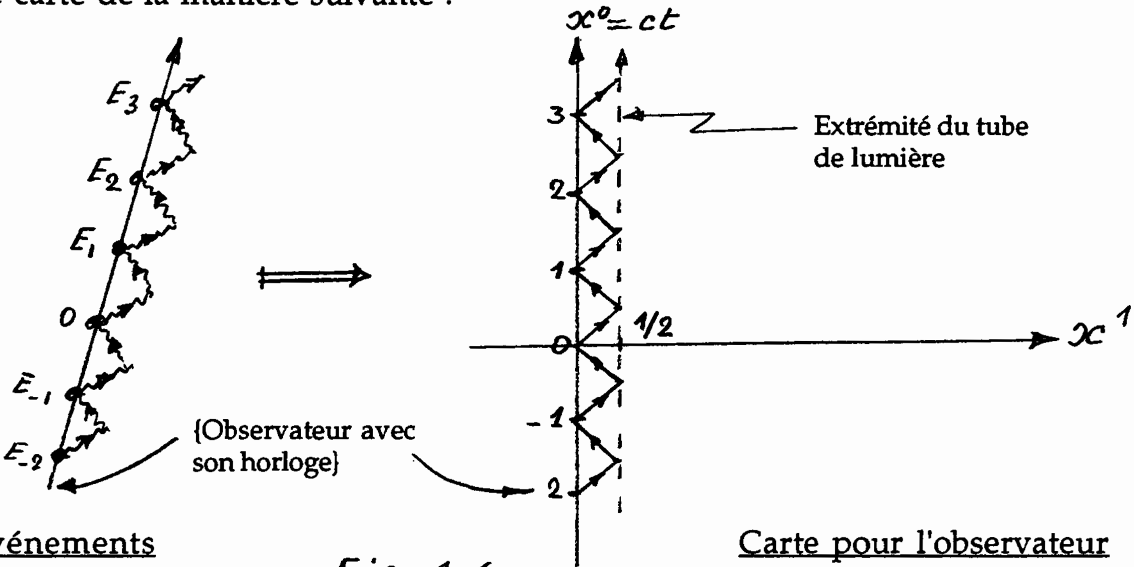


Fig. 1.6

Par conséquent, sur la carte de l'observateur *O*, **l'axe x^o représente l'observateur avec son horloge**; l'événement E_n, le $n^{ième}$ <<tic>> de l'horloge, est représenté par le point (n, 0, 0, 0) sur cet axe. Ayant introduit une paramétrisation des événements, l'observateur pourra alors les représenter par des points sur sa carte.

A ce stade, il nous faut introduire quelques définitions.

- Un point P est **immobile par rapport à l'observateur** *O* si les intervalles de temps entre l'émission d'un rayon par *O* et sa réception par *O*, suite à une réflexion sur P, sont constants. En particulier, le miroir M_2, à l'extrémité du tube de lumière, est immobile par rapport à *O*. En outre, il suit de cette définition qu'un point P est immobile par rapport à *O* si et seulement si il est représenté par une droite parallèle à x^o.

Les droites parallèles à l'axe x^o représentent les lignes d'Univers de points immobiles par rapport à *O*.

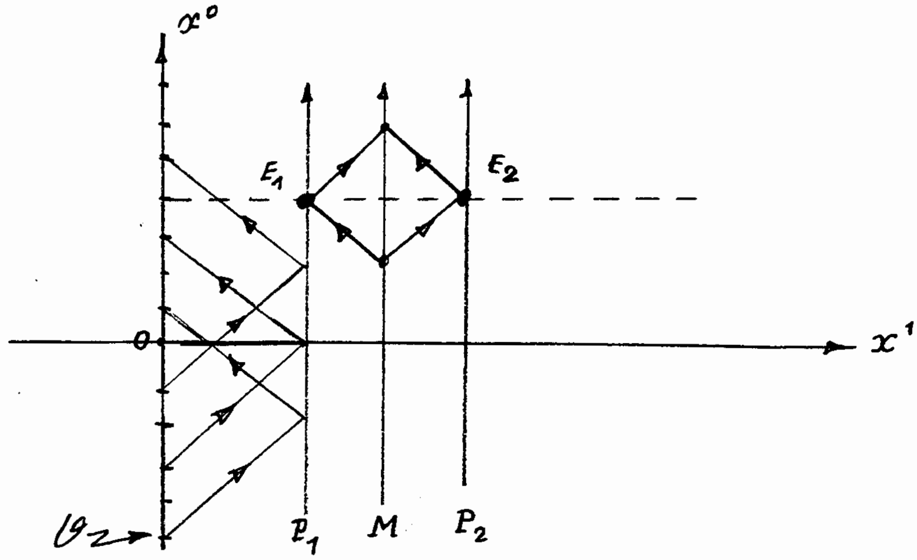


Fig. 1.7. Les points P_1, P_2, M, sont immobiles par rapport à G
. Le point M est à mi-distance de P_1 et P_2.
. Les événements E_1 et E_2 sont simultanés par rapport à *O*.

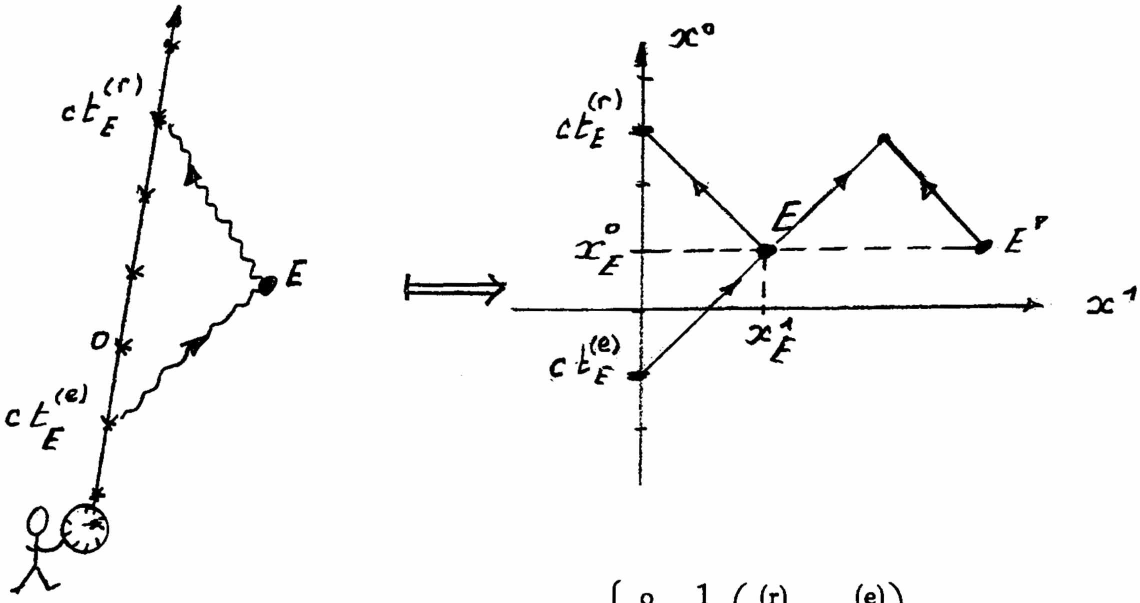
- Le point M immobile est à **mi-distance des points immobiles** P_1 et P_2, si les rayons lumineux émis de M, et réfléchis ensuite par P_1 et P_2, sont reçus simultanément au point M.

  Par conséquent, la ligne d'univers de M est au milieu des lignes d'univers P_1 et P_2.

- Deux événements E_1 et E_2 sont **simultanés par rapport à l'observateur** *O*, si les rayons lumineux émis par ces événements sont reçus simultanément au point M situé à mi-distance des points P_1 et P_2 coïncidant avec les événements E_1 et E_2.

Par conséquent, des événements sont simultanés par rapport à *O* si et seulement si ils sont sur une même droite (ou un 3-plan) perpendiculaire à x^o, c'est-à-dire $x^o = \bar{x}^o$ = cte. En particulier, l'axe (ou le 3-plan) $x^o = 0$ représente l'ensemble des événements simultanés à l'instant t = 0 sur l'horloge de l'observateur *O*.

Pour paramétriser l'événement E, il suffit à l'observateur d'envoyer des rayons lumineux et de mesurer les temps d'émissions $t_E^{(e)}$ et de réception $t_E^{(r)}$ du rayon réfléchi par E :



$$\text{E} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_E^o = \frac{1}{2}c\left(t_E^{(r)} + t_E^{(e)}\right) = ct_E \\ x_E^1 = \pm\frac{1}{2}\, c\left(t_E^{(r)} - t_E^{(e)}\right) \end{cases} \tag{1.2}$$

Fig.1,8

Avec cette définition, on vérifie facilement que deux événements E et E' sont simultanés par rapport à O si et seulement si $t_E = t_{E'}$.

Finalement, nous pouvons représenter l'évolution d'un point matériel par la **ligne d'univers** (sur la carte de l'observateur O) : c'est l'ensemble des événements définis par les réflexions des rayons sur le point matériel. En particulier, il suit de cette définition que le point P est immobile si sa ligne d'univers est une droite parallèle à x^o.

En conclusion, la paramétrisation (1.2) des événements est cohérente avec les définitions que nous avons introduites.

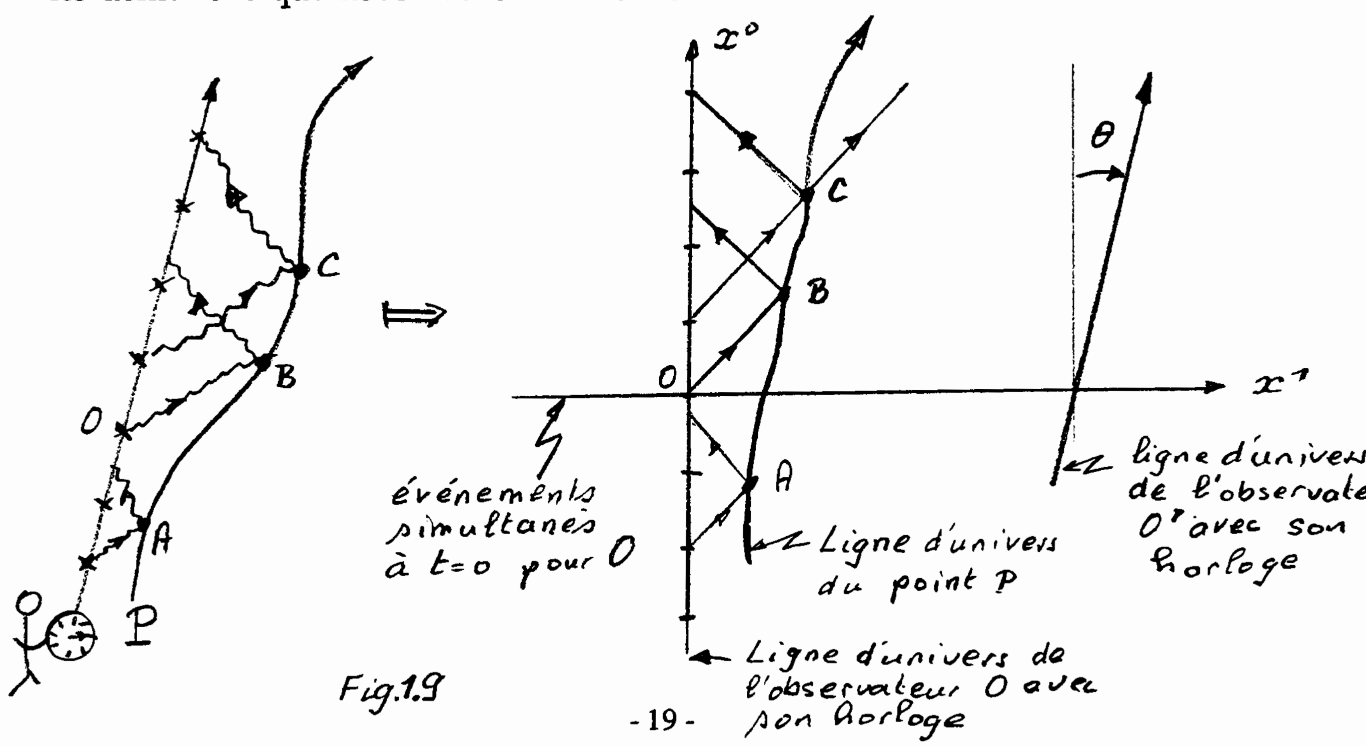


Fig.1.9

1.7. Transformations de Lorentz

Par définition, l'observateur O' est en translation uniforme de vitesse u par rapport à O (= référentiel d'inertie) si sa ligne d'Univers est la droite (sur la carte de O) :

$$\Delta x^1 = u\,\Delta t = \frac{u}{c}\ \Delta x^o$$

c.à.d. que la ligne d'Univers est une droite faisant un angle θ avec l'axe x^o où

$$\boxed{\operatorname{tg}\theta = \frac{u}{c}} \qquad (1.3)$$

Nous admettons ensuite que la condition suivante est toujours vérifiée.

<u>Condition 2</u> "Homogénéité du temps"

> Si R' est en translation uniforme par rapport au référentiel d'inertie R, les secondes de R' définissent des intervalles de temps égaux par rapport à R.

Admettons pour simplifier que l'origine de l'espace-temps dans R' coïncide avec l'origine de l'espace-temps dans R : $(x^o = 0,\ x^1 = 0) \leftrightarrow (x'^o = 0,\ x'^1 = 0)$

Dans ce cas, les "tocs" de l'horloge en mouvement (= temps mesurés dans R') sont représentés dans R' par : $E'_n = (x'^o_n = ct'_n, \vec{0})$

et dans R par : $E'_n = (x^o_n = \gamma\ ct'_n, x^1_n = \gamma\, ut'_n)$ (1.4)

où γ est une constante (qui dépend de R et R') à déterminer.

De la condition 2, on dérive facilement la propriété suivante.

<u>Propriétés</u>

1. La ligne d'Univers d'un point immobile par rapport à O' est représentée sur la carte de O par une droite faisant un angle θ avec l'axe x^o, où $\operatorname{tg}\theta = \frac{u}{c}$: tous les points immobiles dans R' ont même vitesse par rapport à R.

2. Les événements simultanés par rapport à O' sont représentés sur la carte de O par une droite faisant un angle θ avec l'axe x^1.

> En conclusion, le concept de simultanéité est un concept relatif qui dépend des observateurs.

3. Sur la carte de O', la ligne d'univers de l'observateur O est une droite faisant un angle $\theta' = -\theta$ avec l'axe x'^0 :

$$\boxed{\vec{v}_{O')O} = -\vec{v}_{O)O'}} \tag{1.5}$$

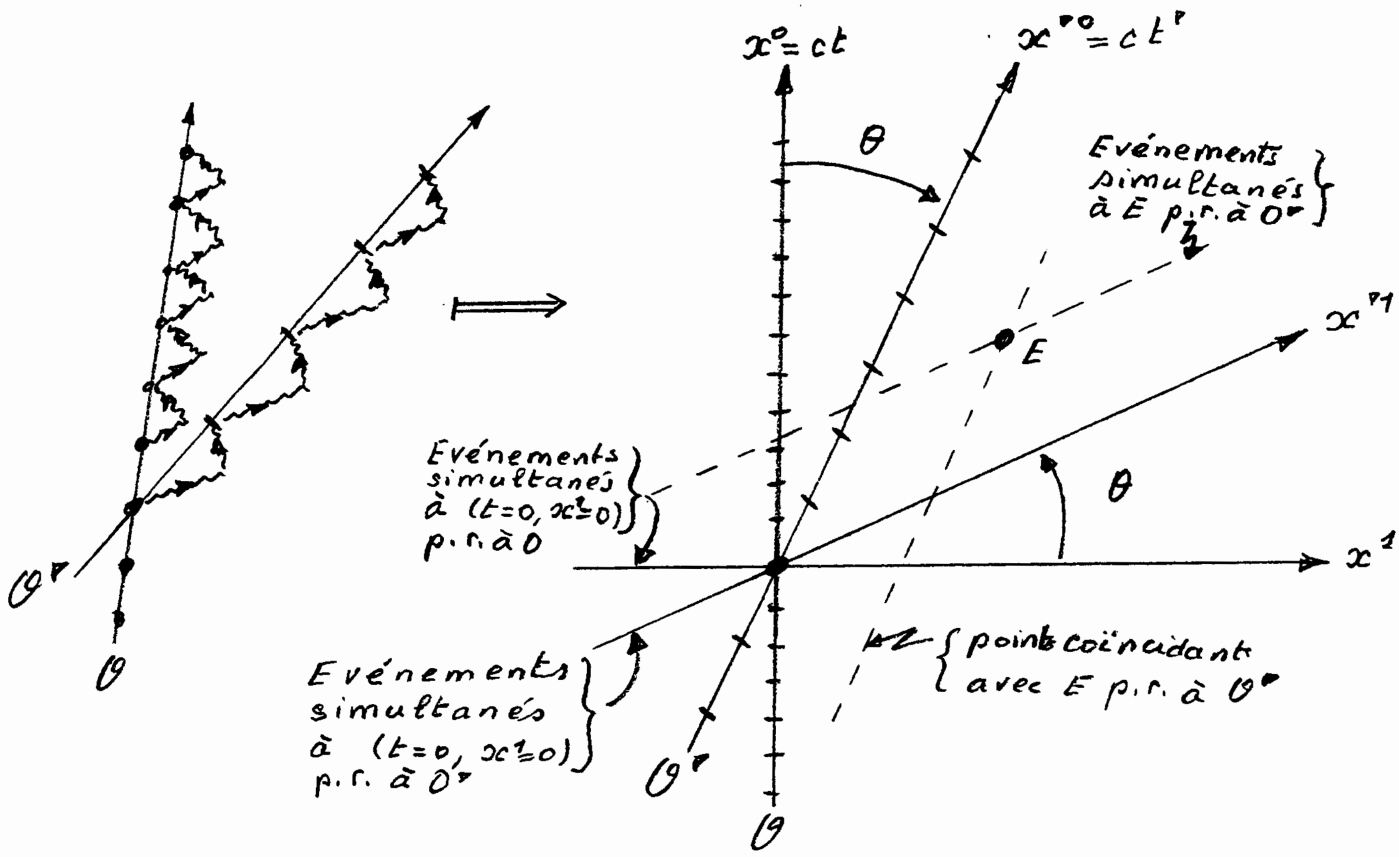


Fig. 1.10

Avant de pouvoir déterminer le facteur γ, il nous faut synchroniser les horloges de R et R' (ajustement de la longueur des tubes à lumière). Pour ce faire, on introduit la condition suivante :

<u>Condition 3</u> "Ajustement des tubes à lumière"

> La durée de la seconde de l'horloge de R' mesurée par R est égale à la durée de la seconde de l'horloge de R mesurée par R'.

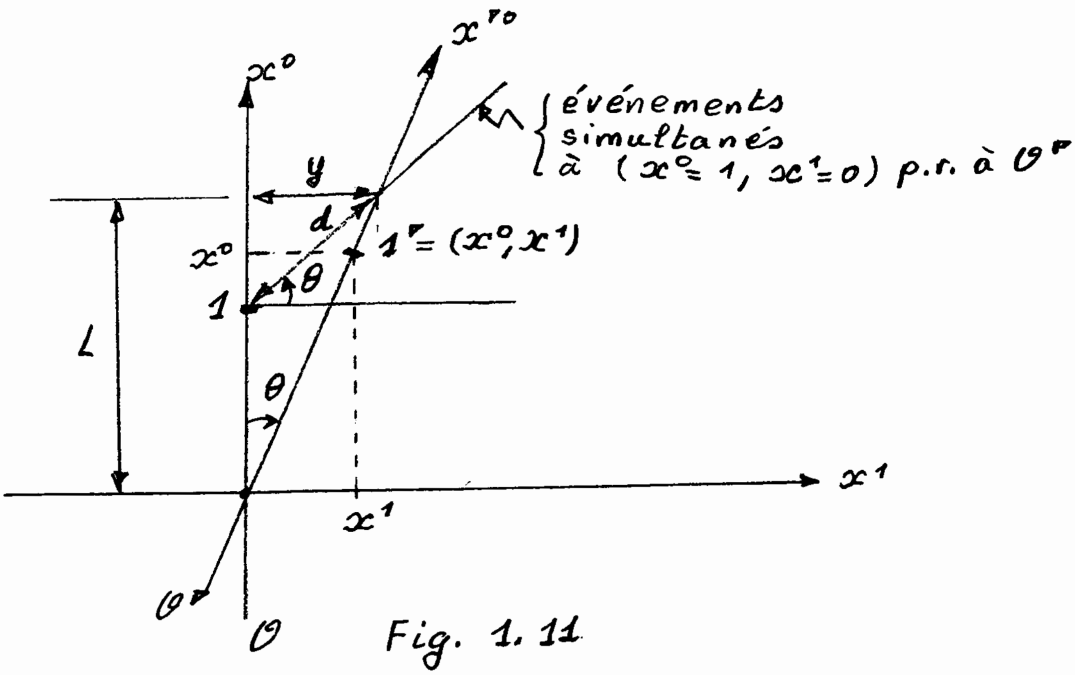


Fig. 1.11

C'est-à-dire $\frac{1}{x^o} = \frac{x^o}{L}$ soit $(x^o)^2 = L$

mais $L = 1 + d \sin\theta$

$y = d \cos\theta = L \,\mathrm{tg}\theta$

d'où $d = L \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$ et $L = 1 + L\,\mathrm{tg}^2\theta$

c.à.d. $$L = \frac{1}{1-\mathrm{tg}^2\theta} = (x^o)^2 \quad \text{avec} \quad \mathrm{tg}\,\theta = \frac{u}{c} \tag{1.6}$$

En conclusion, l'événement ($x'^o = 1$, $x'^1 = 0$), c'est-à-dire la **seconde de R'**, est paramétrisé dans R par

$$\begin{cases} x^o = \dfrac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ \\ x^1 = \dfrac{u/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \end{cases} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \tag{1.7}$$

Par conséquent, (sur la carte de R) la seconde de R' est un point de l'hyperbole

$$(x^o)^2 - (x^1)^2 = 1 \tag{1.8}$$

Plus généralement, on obtient de (1.4) et (1.7) la paramétrisation de l'axe x'^{o} par l'observateur *O* :

$$\begin{pmatrix} x'^{o} & \\ x'^{1} & = 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x^{o} & = & \gamma\, x'^{o} \\ x^{1} & = & \gamma \frac{u}{c}\, x'^{o} \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

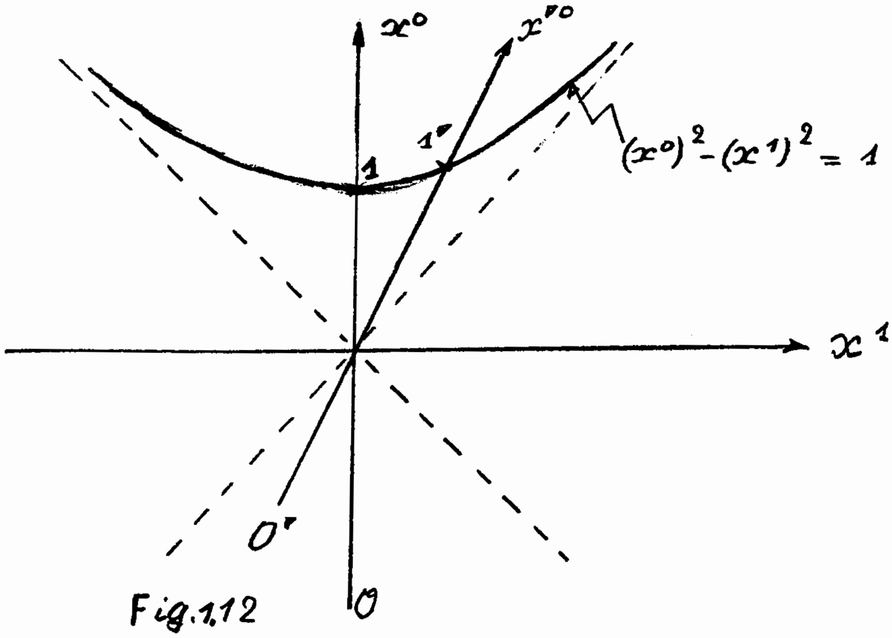


Fig.1.12

Nous avons alors toutes les informations nécessaires pour relier les paramétrisations d'un événement E relativement à R et R' :

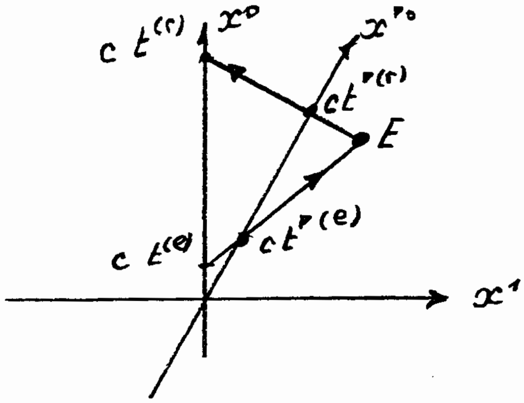


Fig.1.13

$$\Downarrow \begin{matrix} (ct'^{(e)},\ 0) \\ (\gamma\ ct'^{(e)},\ \gamma\ ut'^{(e)}) \end{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{p.r. à R'} \\ \text{p.r. à R} \end{matrix}$$

L'instant $t^{(e)}$ est trouvé àpartir de

$$\frac{\gamma\, ct'^{(e)} - ct^{(e)}}{\gamma\, ut'^{(e)}} = 1$$

$$\text{d'où} \quad t^{(e)} = \gamma\ (1 - \frac{u}{c})\ t'^{(e)} \tag{1.10}$$

De même : $$\Downarrow \begin{matrix} (ct'^{(r)},\ 0) \\ (\gamma\ ct'^{(r)},\ \gamma\ ut'^{(r)}) \end{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{p.r. à R'} \\ \text{p.r. à R} \end{matrix}$$

et $\quad t^{(r)}$ est donné par (car la lumière se propage dans la direction $-x^o$)

$$\frac{ct^{(r)} - \gamma\, ct'^{(r)}}{-\gamma\, ut'^{(r)}} = -1$$

d'où $\quad t^{(r)} = \gamma\ (1 + \frac{u}{c})\ t'^{(r)} \qquad (1.11)$

De (1.2), (1.10) et (1.11), on obtient finalement :

$$\begin{cases} x^o = \frac{c}{2}(t^{(r)} + t^{(e)}) = \frac{c}{2}\,\gamma\left[(1 + \frac{u}{c})\ t'^{(r)} + (1 - \frac{u}{c})t'^{(e)}\right] \\ \qquad\qquad\qquad\quad = \gamma\left(x'^o + \frac{u}{c}\ x'^1\right) \\ x^1 = \frac{c}{2}(t^{(r)} - t^{(e)}) = \gamma\left(\frac{u}{c}\ x'^o + x'^1\right) \end{cases}$$

En conclusion, nous avons obtenu la **transformation de Lorentz dans la direction 1** :

$$\begin{pmatrix} x'^o \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x^o = \gamma\,(x'^o + \frac{u}{c}\, x'^1) \\ x^1 = \gamma\,(x'^1 + \frac{u}{c}\, x'^o) \\ x^2 = x'^2 \\ x^3 = x'^3 \end{pmatrix} \qquad \boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}}$$

$$\begin{pmatrix} x^o \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x'^o = \gamma\,(x^o - \frac{u}{c}\, x^1) \\ x'^1 = \gamma\,(x^1 - \frac{u}{c}\, x^o) \\ x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^3 \end{pmatrix} \qquad (1.12)$$

ce que l'on écrit sous forme matricielle :

$x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta\ x^\beta \qquad$ soit $\quad \boxed{x' = \Lambda\,(u)\ x} \qquad (1.13)$

$x^\alpha = (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\beta\, x'^\beta \qquad$ soit $\quad \boxed{x = \Lambda^{-1}\,(u)\ x'} \qquad (1.14)$

avec : $\quad \boxed{\Lambda^{-1}\,(u) = \Lambda\,(-u)} \qquad (1.15)$

En introduisant le paramètre **rapidité** défini par

$$\boxed{\text{th}\,\eta = \frac{u}{c} = \text{tg}\,\theta} \tag{1.16}$$

on a : $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \text{th}^2\eta}} = \text{ch}\,\eta$, $\gamma\,\dfrac{u}{c} = \text{sh}\,\eta$, et

$$\Lambda(u) = \begin{pmatrix} \text{ch}\eta & -\text{sh}\eta & 0 & 0 \\ -\text{sh}\eta & \text{ch}\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

Des propriétés des fonctions ch η et sh η on obtient immédiatement la propriété suivante :

Propriété "Loi de composition"

1. L'ensemble des transformations de Lorentz **dans la direction 1** est un groupe avec la loi de composition

$$\Lambda(\eta_2) \cdot \Lambda(\eta_1) = \Lambda(\eta_2 + \eta_1) \tag{1.18}$$

2. Le produit de deux transformations de Lorentz **dans la direction 1** de vitesse u et v est une transformation de Lorentz dans la direction 1 de vitesse w, où

$$\boxed{w = \frac{u + v}{1 + \dfrac{u\,v}{c^2}}} \tag{1.19}$$

La deuxième partie de cette propriété est conséquence de l'identité

$$\text{th}\left(\eta_1 + \eta_2\right) = \frac{\text{th}\ \eta_1 + \text{th}\ \eta_2}{1 + \text{th}\ \eta_1 \cdot \text{th}\ \eta_2}.$$

Remarque :

L'extrémité de la règle de R' à l'instant t'= 0, soit ($x'^0 = 0$, $x'^1 = 1$) est paramétrisée dans R par

$$\begin{cases} x^{\circ} = \dfrac{u}{c} \\ x^{1} = \gamma \dfrac{u}{c} \end{cases}$$

Cet évènement est donc représenté par un point sur l'hyperbole

$$-(x^{o})^{2} + (x^{1})^{2} = 1$$

Résumé

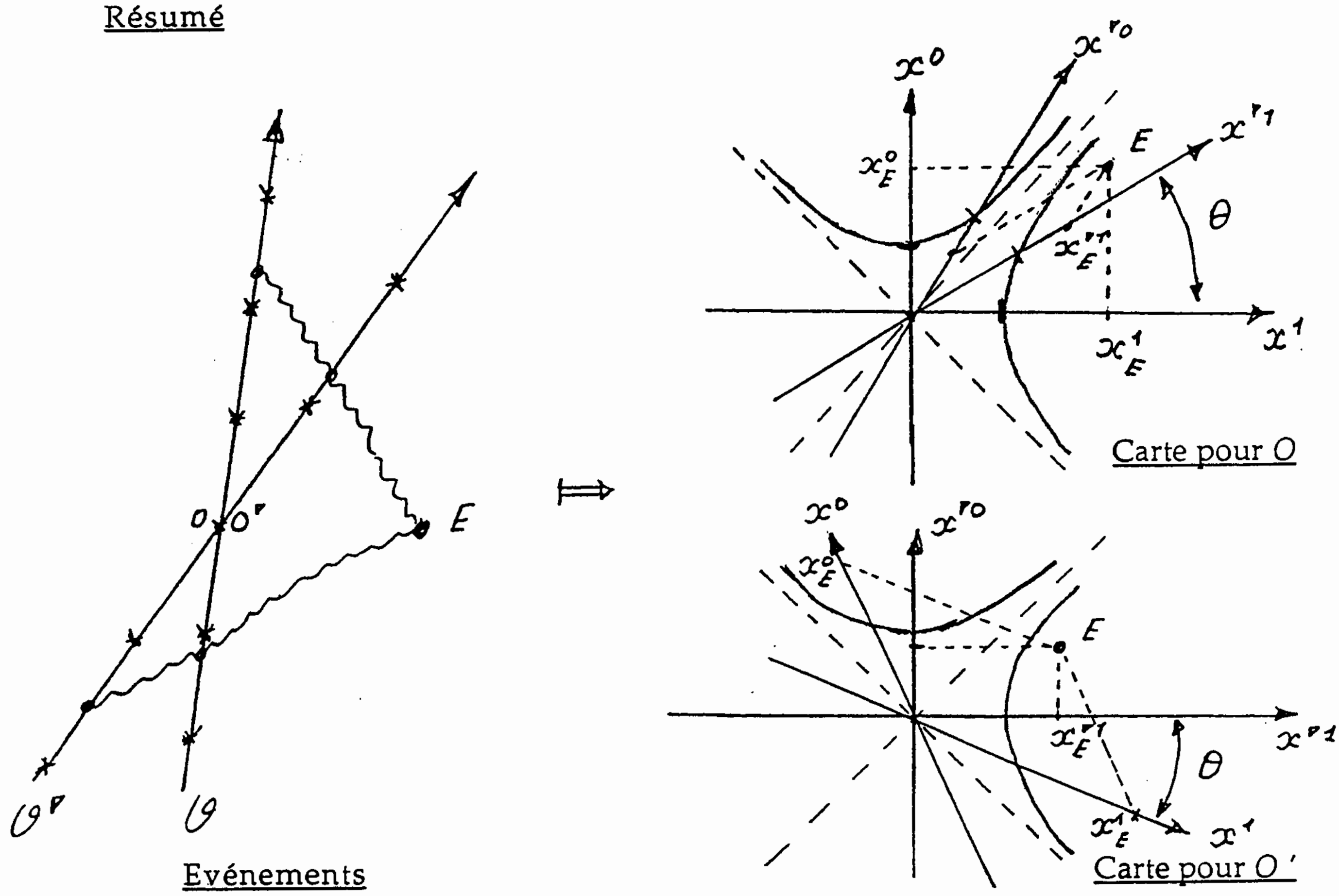


Fig.1.14

1.8. Conséquences de la transformation de Lorentz

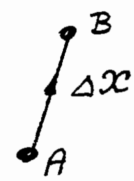
1) Dans la limite où u << c, on retrouve la transformation de Galilée.

2) Invariance de la loi d'évolution de la lumière : par rapport à n'importe quel référentiel d'inertie, l'équation du mouvement de la lumière est :

$$|\overrightarrow{\Delta x}| = c\ \Delta t \qquad \text{soit} \qquad (\overrightarrow{\Delta x})^{2} - (\Delta x^{o})^{2} = 0.$$

3) <u>Invariance</u> de $\boxed{\Delta s^2 := -(\Delta x^o)^2 + |\overrightarrow{\Delta x}|^2 := -c^2\,\Delta\tau^2}$ (1.20)

Soit A et B deux événements;



par rapport à O : $\Delta x^\mu = x^\mu_B - x^\mu_A$

par rapport à O' : $\Delta x'^\mu = x'^\mu_B - x'^\mu_A$

$$-(\Delta x^o)^2 + (\overrightarrow{\Delta x})^2 = -\gamma^2\,[\Delta x'^o + \frac{u}{c}\,\Delta x'^1]^2 + \gamma^2\,[\frac{u}{c}\,\Delta x'^o + \Delta x'^1]^2$$

$$+ (\Delta x'^2)^2 + (\Delta x'^3)^2 \equiv -(\Delta x'^o)^2 + \sum_{i=1}^{3}(\Delta x'^i)^2$$

En conséquence, nous retrouvons deux invariants : la vitesse de la lumière, et l'intervalle Δs^2.

- Si $c^2\Delta\tau^2 = c^2\,\Delta t^2 - |\overrightarrow{\Delta x}|^2 > 0$ <u>$\Delta\tau$ est l'intervalle de temps propre entre A et B.</u>

Dans ce cas : si $\Delta t > 0$, B est dans le **futur** de A,
si $\Delta t < 0$, B est dans le **passé** de A.

On remarquera que :

$\Delta\tau = \Delta t$ si A et B sont au même lieux par rapport à O $(\Delta x^i = 0)$
$\Delta\tau = \Delta t'$ si A et B sont au même lieux par rapport à O' $(\Delta x'^i = 0)$

c.à.d. le temps propre τ correspond au temps indiqué par l'horloge dans le référentiel où elle est immobile.

- Si $-\Delta s^2 = c^2\,\Delta t^2 - |\overrightarrow{\Delta x}|^2 < 0$ Δs est l'intervalle de longueur propre entre A et B.

Dans ce cas : B est dans l'**ailleurs** de A.

- Si $c^2\,\Delta t^2 - |\overrightarrow{\Delta x}|^2 = 0$ B est sur le cône de lumière de A.

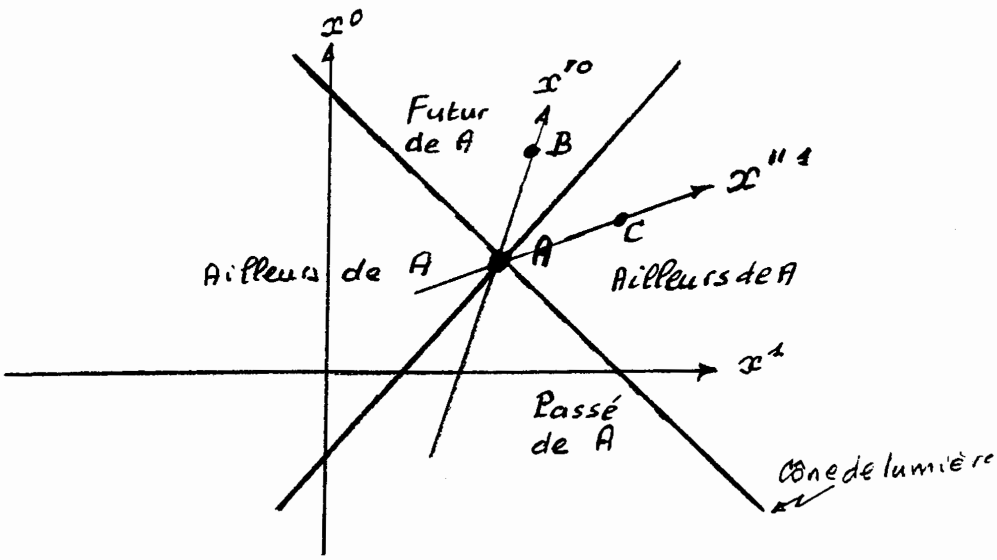


Fig.1.15

Pour tout B dans le futur de A, il existe R' tel que A et B soient au même lieu. Pour tout C dans l'ailleurs de A, il existe R" tel que A et C soient simultanés.

- Pour que l'interprétation de notre construction soit cohérente, la vitesse $|\vec{u}|$ de *O'* p.r. à *O* est nécessairement inférieure à c :

$$|\vec{u}| < c.$$

Sinon il existerait un observateur *O"* pour lequel *O'* serait partout à l'instant t''_0 et nulle part pour $t'' \neq t''_0$.

- De même, la vitesse de la lumière est une limite supérieure pour la vitesse $|\vec{v}|$ d'un point matériel

$$\boxed{|\vec{v}| < c}$$

En effet, soit $\vec{x}$ (t) l'évolution du point matériel dans la direction 1; si

$$\left|\frac{dx^1}{dt}\right| > c$$

il existerait un observateur *O"* qui verrait simultanément le point en deux endroits différents.

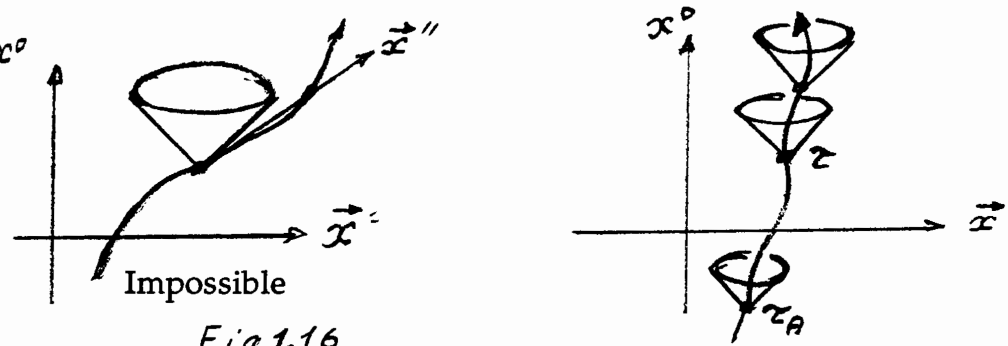


Fig.1.16

- De $|\vec{v}| < c$ il suit que pour toute évolution $\vec{x}(t)$ d'un point matériel, nous aurons

$$c^2\, dt^2 - |\vec{dx}|^2 = c^2\, d\tau^2 = c^2 (1 - \vec{v}^{\,2}/c^2)\, dt^2 > 0$$

ce qui permet d'introduire **le temps propre du point matériel** grandeur invariante définie par

$$\boxed{\tau = \tau_A + \int_{t_A}^{t} dt \sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} \tag{1.21}$$

Cette grandeur représente le temps indiqué par l'horloge fixée au point matériel (en vertu de la remarque ci-dessus).

4) <u>Contraction apparente des longueurs</u> :

Considérons une règle au repos dans R', parallèle à $\vec{v}_{R')R} = \vec{u} = u\, \vec{e}_1$, d'extrémités A et B :

$$\text{par rapport à R'} : \begin{cases} A : \; x'_A = 0 \\ B : \; x'_B = \ell' \end{cases} \quad \forall\ t'$$

En utilisant l'équation (1.12), nous avons :

$$\begin{cases} A: \quad 0 = \gamma(-\ ut + x_A(t)) \\ B: \quad \ell' = \gamma(-\ ut + x_B(t)) \end{cases} \qquad \forall\ t$$

d'où $\qquad x_B(t) - x_A(t) = \dfrac{1}{\gamma}\ \ell'$

La longueur de la règle mesurée par R est constante, et

$$\boxed{\ell_{/\!/} = \sqrt{1-u^2/c^2}\ \ell'_{/\!/} < \ell'_{/\!/}} \tag{1.22}$$

c'est-à-dire que par rapport à R, la règle en mouvement apparaît plus courte que par rapport au référentiel où elle est au repos : c'est la contraction apparente des longueurs. (Au contraire, dans la direction perpendiculaire au mouvement de R' par rapport à R : $\ell_{\perp} = \ell'_{\perp}$)

Des segments de droite dans R' sont des segments de droite dans R, mais des segments perpendiculaires p.r. à R' ne sont pas (forcément) perpendiculaires p.r. à R. Par conséquent, il est possible d'introduire le concept de référentiel d'inertie muni d'axes cartésiens, mais **R' n'est pas un solide p.r. à R.**

5) <u>Dilatation apparente du temps</u>

Soit une horloge immobile dans R' ; considérons deux instants :

A : $x'_A = 0\,,\ t'_A$

B : $x'_B = 0\,,\ t'_B = t'_A + \Delta t'$

En utilisant l'équation (1.12) :

$$A: \qquad \begin{cases} ct'_A = \gamma\left(ct_A - \dfrac{u}{c}\,x_A\right) \\ 0 = \gamma\,(-\ ut_A + x_A) \end{cases}$$

d'où $\qquad x_A = ut_A \qquad$ et $\qquad t'_A = \sqrt{1-u^2/c^2}\ t_A.$

De même,

$$B : \qquad x_B = ut_B \text{ et } t'_B = t'_A + \Delta t' = \sqrt{1-u^2/c^2}\; t_B$$

d'où
$$\Delta t' = \sqrt{1-u^2/c^2}\;(t_B - t_A)$$

$$\boxed{\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\,\Delta t' \quad > \Delta t'} \tag{1.23}$$

En conclusion, l'horloge en mouvement par rapport à R semble retarder par rapport à l'horloge immobile dans R : c'est la dilatation apparente du temps.

6) Théorème d'addition des vitesses

Si par rapport à R', la particule P est animée d'un mouvement rectiligne uniforme d'équation,

$$\begin{cases} x' = v'^1\, t' \\ y' = v'^2\, t' \\ z' = v'^3\, t' \end{cases}$$

alors par rapport à R, où $\vec{v}_{R')R} = u\,\vec{e}_1$, on a

$$\begin{cases} \gamma(x-ut) \quad x = v'^1\,\gamma\left(t-\dfrac{u}{c^2}\,x\right) \\ y = v'^2\,\gamma\left(t-\dfrac{u}{c^2}\,x\right) \\ z = v'^3\,\gamma\left(t-\dfrac{u}{c^2}\,x\right) \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \left(1+\dfrac{u\,v'^1}{c^2}\right) x = t\left(v'^1 + u\right) \\ y = v'^2\,\gamma\, t\left(1-\dfrac{u^2}{c^2}\right) \\ z = v'^3\,\gamma\, t\left(1-\dfrac{u^2}{c^2}\right) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} v^1 = \dfrac{v'^1 + u}{1 + \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}'}{c^2}} \\ v^2 = \sqrt{1 - \vec{u}^2/c^2} \quad v'^2 \\ v^3 = \sqrt{1 - \vec{u}^2/c^2} \quad v'^3 \end{cases}$$

En conclusion, soit $\vec{v}'$ la vitesse (relative) d'un point par rapport à R', référentiel de vitesse $\vec{u}$ par rapport à R, alors la vitesse (absolue) de ce point par rapport à R s'exprime par

$$\vec{v} = \vec{v}_{//} + \vec{v}_{\perp} \qquad \text{où} \qquad \boxed{\vec{v}_{//} = \frac{\vec{v}'_{//} + \vec{u}}{1 + \frac{\vec{u}}{c^2} \cdot \vec{v}'}} \tag{1.24}$$

$$\vec{v}' = \vec{v}'_{//} + \vec{v}'_{\perp} \qquad \boxed{\vec{v}_{\perp} = \sqrt{1 - \vec{u}^2/c^2} \quad \vec{v}'_{\perp}} \tag{1.25}$$

avec $\vec{v}'_{//}$, $\vec{v}'_{\perp}$ les composantes de $\vec{v}'$ parallèle et perpendiculaire à $\vec{u}$.

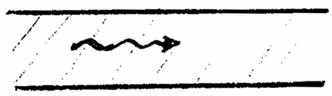
Dans la limite où $|\vec{u}| \ll c$, nous retrouvons la relation non relativiste, $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$.

De plus, nous voyons que

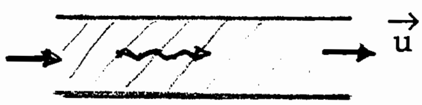
$$\vec{v}' = 0 \rightleftarrows \vec{v} = \vec{u} \tag{1.26}$$

Le résultat Eq. (1.24) fut confirmé expérimentalement pour la première fois par Fizeau, puis par Zeeman avec une précision de 1%.

Expérience de Fizeau



: w = vitesse de la lumière dans le fluide au repos.



: W = vitesse de la lumière dans le fluide en mouvement de vitesse $\vec{u}$

Fig. 1.17

L'observation montre que : $W = \dfrac{w+u}{1+\dfrac{wu}{c^2}}$ ce qui confirme la loi de composition des vitesses.

1.9. Principe de la Relativité Restreinte d'Einstein (1905)

1. Il existe des référentiels particuliers, appelés "**référentiels d'inertie**", par rapport auxquels l'espace vide est homogène-isotrope et le temps homogène.
   En particulier :

   - un point matériel isolé a un mouvement rectiligne-uniforme

   - la lumière se déplace en ligne droite avec une vitesse c qui est indépendante de la direction de propagation, et du mouvement de la source.

2. Tout référentiel en translation uniforme par rapport à un référentiel d'inertie est aussi un référentiel d'inertie.

3. Les lois de la physique sont les mêmes relativement à n'importe quel référentiel d'inertie, c.à.d. les lois de la physique sont invariantes par rapport aux transformations de Lorentz.

   En particulier la vitesse de la lumière est la même relativement à n'importe quel référentiel d'inertie.

1.10. Principe d'équivalence faible (Newton)

Pourquoi un corps tombe-t-il sur la Terre ? Nous admettons que la Terre crée un champ de gravitation $\vec{g}\,(t, \vec{x})$ et que celui-ci exerce une force sur le corps :

$$\vec{F}_{gr}(t, \vec{x}) = m^* \vec{g}\,(t, \vec{x})$$

où m* est la masse gravifique du corps.

D'autre part, en vertu de la Lex II,

$$\vec{F} = m\,\vec{a} \qquad (m = \text{masse d'inertie}).$$

Par conséquent, pour un corps en chute libre $\vec{a} = \frac{m^*}{m}\vec{g}$.

Les observations de Galilée (chute des corps) et de Newton (pendule), montrent que m et m* sont des concepts équivalents. Par un choix adéquat du système d'unités, on peut alors poser

$$\boxed{m = m^*} \qquad (1.27)$$

Les expériences de Eötvös (1889) [utilisent l'effet du mouvement de rotation de la Terre sur un pendule de torsion], puis celle de Dicke (1961) [effet journalier dû à la rotation du Soleil autour de la Terre sur le pendule de torsion], et de Braginski et Parov (1972) confirmèrent les conclusions de Galilée et Newton, avec une précision relative allant jusqu'à 10^{-13}. Une expérience est actuellement proposée à l'ESA pour vérifier cette équivalence avec une précision encore plus élevée (proposition acceptée en 1994).

1.11. Principe de Mach (1904)

Il n'existe pas un "principe de Mach" à proprement parler, mais Einstein a donné ce nom à un ensemble d'idées avancées par Mach que rappelons brièvement.

Mach, au début de ce siècle, se pose trois questions :

i) l'accélération absolue a-t-elle un sens objectif ?
ii) quelle est l'origine de l'inertie ?
iii) pourquoi m = m* ?

Ses réflexions l'amènent aux conclusions ci-dessous :

- Seul le mouvement relatif des corps (par rapport aux étoiles fixes) a un sens objectif.

- La Lex I ne définit pas les référentiels d'inertie, mais uniquement le zéro de la force : si par rapport à R le mouvement d'un corps est rectiligne-uniforme, alors relativement à ce référentiel $\vec{F}_{)R} = 0$; si par rapport à R', le mouvement du corps apparaît accéléré, alors relativement à ce référentiel $\vec{F}_{)R'} \neq 0$.

  De plus, ayant choisi un référentiel, toutes les forces observées relativement à ce référentiel sont des forces réelles : il n'y a pas de forces "fictives".

- L'origine de la masse d'inertie est liée à l'action gravifique de l'ensemble de l'Univers sur le corps en mouvement. Cette affirmation a deux conséquences :

  1) m = m*

  2) il n'est jamais possible de considérer un corps isolé.

- Si R' est en translation non uniforme relativement à R, alors dans R' on aura (avec m = m*)

$$m\,\vec{a}\,' = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\,\text{non grav.}} + m\,\vec{g} - m\,\vec{a}_e \tag{1.28}$$

c.à.d.

$$m\,\vec{a}\,' = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\,\text{non grav.}} + m\,\vec{g}\,' \tag{1.29}$$

En conséquence :

i) Les forces d'inertie, tout comme les forces gravifiques, sont liées à l'action de corps matériels en mouvement sur le point matériel. Elles contribuent également à la définition du champ de gravitation.

ii) Il n'est pas possible de distinguer entre l'interprétation (1.28) [champ de gravitation + force d'inertie] et l'interprétation (1.29) [champ de gravitation seulement].

iii) Les lois de la mécanique sont valables relativement à n'importe quel référentiel : il n'y a pas de référentiel privilégié.

iv) Le **principe d'équivalence faible** peut s'exprimer sous l'une ou l'autre des formes suivantes :

1) m et m* sont des concepts équivalents et l'on peut poser $m = m^*$.

2) Pour une région de l'espace suffisamment petite et un intervalle de temps suffisamment petit, on peut toujours trouver un référentiel (non inertiel) tel que le mouvement d'un **corps en chute libre** $\left(\sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{non grav.}} = 0\right)$ soit rectiligne et uniforme (= principe d'inertie).

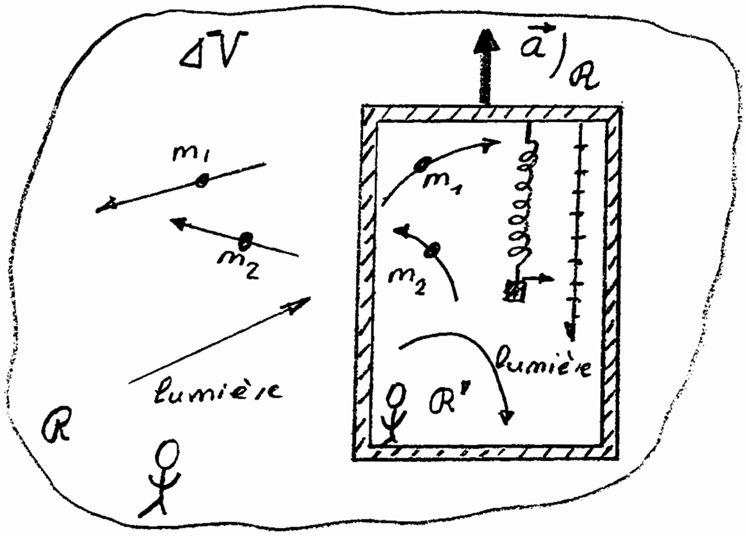
1.12. De la Relativité Restreinte à la Relativité Générale

Suivant les idées de Mach, on aimerait généraliser le principe de la relativité restreinte en affirmant :

"Tous les référentiels sont équivalents pour la description des lois de la nature".

Il nous faut tout d'abord remarquer qu'il semblerait à première vue qu'un tel principe ne puisse pas être correct : par exemple, le mouvement des objets dans un train qui accélère ou qui freine brusquement, n'est pas le même que celui observé dans un référentiel d'inertie.

Considérons une portion ΔV de l'espace loin de toute matière et soit R un référentiel d'inertie pour ΔV (c.à.d. que par rapport à R, la Lex I est vérifiée dans ΔV).



(pas de matière)

Fig. 1 18

L'observateur O' dans le référentiel R' uniformément accéléré (ascenseur) remarque les faits suivants :

1) tous les objets matériels ont un mouvement uniformément accéléré, de même accélération $\vec{a}\,'$.

2) le corps suspendu à un dynamomètre exerce une force sur le ressort qui s'allonge. Cette force est égale à m $\vec{a}\,'$.

3) l'observateur a un "poids".

L'observateur O' qui ne voit rien à l'extérieur arrive ainsi aux conclusions suivantes :

Soit i) Il existe dans le laboratoire un champ de gravitation $\vec{g}\,' = \vec{a}\,'$, dû à des masses proches mais extérieures au laboratoire.

Soit ii) Le laboratoire est loin de toute matière, mais il est accéléré, d'accélération $\vec{a}_{R')R} = -\vec{a}\,'$ par rapport aux référentiels d'inertie.

Soit iii) N'importe quelle explication intermédiaire est également possible.

En fait, aucune expérience effectuée dans le laboratoire R' ne permet de distinguer l'une de ces explications. Le principe de la relativité générale introduit par Einstein postule que toutes ces interprétations sont indiscernables. Par conséquent:

- les résultats des observations effectuées dans R' accéléré sont identiques à ceux que l'on obtiendrait dans un référentiel d'inertie en présence d'un champ de gravitation créé par la matière.

- ayant observé l'existence d'un champ de gravitation, il est toujours possible de trouver un autre référentiel tel que localement et momentanément le champ de gravitation disparait : relativement à ce référentiel, les lois de la physique sont les mêmes qu'en absence de champ de gravitation.

C'est l'expression du **principe d'équivalence fort** sur lequel nous reviendrons dans la troisième partie de ce cours.

Conclusions

1) La théorie de la relativité générale qui s'intéresse à l'ensemble de tous les changements de "référentiel" est en fait une théorie des phénomènes physiques en présence de gravitation.

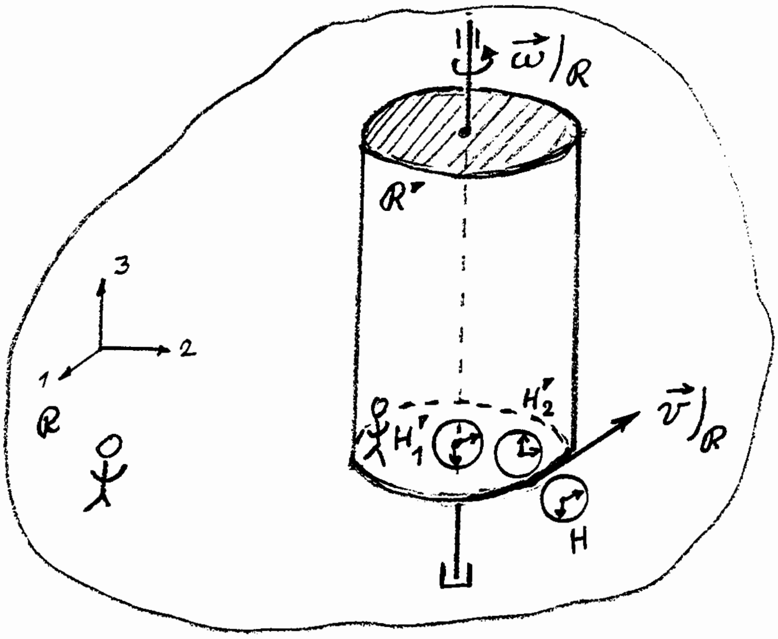
2) Tout phénomène observé dans un référentiel accéléré (relativement au vide) sera également observé dans un référentiel d'inertie en présence d'un champ de gravitation.

   En particulier, par rapport à l'ascenseur accéléré R' (dans le vide), la trajectoire d'un rayon lumineux est parabolique. Ainsi, il suit du principe de la relativité générale que, dans un champ de gravitation, **la trajectoire des rayons lumineux est curviligne.**

Cette conséquence fut confirmée en 1919 par Eddington lors d'une eclipse du Soleil : la déviation calculée était de 1,75", observée 2". En 1975, la différence n'était que de 1% entre les observations de Fomalont et Sramck, sur la déviation des ondes radio émises par des quasars, et les prédictions théoriques.

Comportement des horloges et des règles en présence d'un champ gravifique

Considérons un référentiel R' tournant à vitesse constante autour d'un axe fixé (relativement à un référentiel d'inertie). En vertu du principe de la relativité générale, l'observateur O' dans R' peut admettre qu'il se trouve dans un référentiel d'inertie en présence d'un champ de gravitation créé par des masses externes.



pas de matière
ni de champs

Fig. 1.19

R' possède deux horloges H'_1 et H'_2 , l'une au centre, l'autre à la périphérie.

H'_1 est immobile p.r. à R, H'_2 a une vitesse $\vec{v}$ p.r. à R.

L'observateur O dans R constate alors que H'_2 marche plus lentement que H'_1 et, par conséquent, l'observateur O' doit observer le même phénomène. En vertu du principe de la relativité générale, on conclut que le phénomène observé par O' sera également observé relativement à un référentiel d'inertie en présence d'un champ gravifique créé par des masses :

le champ de gravitation agit sur la marche des horloges

En conséquence, comme le champ de gravitation agit sur le mouvement de la lumière et sur la marche des horloges, il n'est pas possible de donner une définition intuitive du temps et du lieu.

De même la longueur de la règle apparaît plus courte dans la direction tangentielle que suivant le rayon et, par conséquent, la longueur de la circonférence est plus grande que $2 \pi R$:

en présence d'un champ de gravitation, les postulats de la géométrie euclidienne ne sont plus valables.

Conclusions

- La Relativité Générale est une théorie de la gravitation
- En présence d'un champ de gravitation, la notion de référentiel devient floue et il n'est pas possible de paramétriser les événements par un "temps" et les "coordonnées cartésiennes du vecteur-lieu" comme nous l'avons fait en relativité restreinte.
- L'espace-temps ne peut pas être considéré comme un continu euclidien.
- Le principe de la Relativité Générale doit s'énoncer sous la forme

"Tous les systèmes de coordonnées sont équivalents pour la description des lois de la nature".

Pour terminer cette discussion, nous pouvons effectuer une comparaison entre les idées de la Relativité Générale et celles de la géométrie non-euclidienne.

Relativité Générale Einstein (1909)	Géométrie Non-Euclidienne Gauss ($\approx$ 1800)
La notion fondamentale, invariante, est celle d'intervalle Δs^2 entre deux événements P et Q. Localement, il existe un système de coordonnées p.r. auquel l'espace-temps est pseudo-euclidien : c.à.d. tel que :	étudie les propriétés intrinsèques des surfaces et réalise que la notion fondamentale est celle de distances d(P, Q) entre deux points P et Q de la surface. Fait l'hypothèse qu'il est toujours possible de trouver localement un système de coordonnées tel que :
$P : (x^o, x^1, x^2, x^3)$	$P : (\xi^1, \xi^2)$
$Q : (x^o + \Delta x^o, \ldots , x^3 + \Delta x^3)$	$Q : (\xi^1 + \Delta\xi^1, \xi^2 + \Delta\xi^2)$
et $\Delta s^2 = -(\Delta x^o)^2 + \sum_{i=1}^{3} (\Delta x^i)^2$	et $d(P, Q) = (\Delta\xi^1)^2 + (\Delta\xi^2)^2$
Nécessité d'une géométrie non euclidienne	Géométrie non euclidienne

Pour aborder l'étude de la relativité générale, on pourra adopter la démarche suivante :

1) Considérer un domaine ΔV loin de toute matière et un référentiel d'inertie R. Dans ce cas, il n'y a pas de champ de gravitation et la relativité restreinte est valable.

2) Considérer ensuite un référentiel R' accéléré p. r. à R. Relativement à R', il apparaît un champ de gravitation $\vec{g}\,'$ et l'on peut étudier l'action de ce champ "apparent"

   i) sur la marche des horloges, la longueur des règles, la géométrie

   ii) sur les propriétés et l'évolution des phénomènes.

3) Généraliser les considérations précédentes à des champs de gravitation qui ne peuvent pas être engendrés de cette manière.

1.13. Références

- Berry, M. (1976) : Principle of Cosmology and Gravitation, Cambridge Univ. Press.
- d'Inverno, R. (1992) : Introducing Einstein's Relativity, Clarendon Press
- Einstein, A. (1963) : La Relativité, Petite Bibliothèque, Payot
- Elbaz, E. (1986) : Relativité Générale et Gravitation, Ellipse
- Hakim R. (1994) : Gravitation Relativiste, Savoirs Actuels, Interéditions, CNRS
- Misner, Throne, Wheeler (1973) : Gravitation, Freeman and Company, N.Y.
- Schultz, B. F. (1985) : A first course in General Relativity, Cambridge Univ. Press
- Stephani, M. (1982) : General Relativity : an Introduction to the Gravitational Field, Cambridge Univ. Press
- Strauman, N. (1984) : General Relativity andd Relativistic Astrophysics, Springer Verlag
- Wald, R. M. (1984) : General Relativity, Univ of Chicago Press
- Weinberg, S. (1972) : Gravitation and Cosmology, Wiley, N. Y.

DEUXIEME PARTIE

RELATIVITE RESTREINTE

(LA PHYSIQUE SANS GRAVITATION)

CHAPITRE II : CINÉMATIQUE : TRANSFORMATIONS DE LORENTZ

2.1. Définitions, notations

L'observation montre qu'il est toujours possible de paramétriser les événements au moyen de quatre nombres réels, c.à.d. que l'on peut définir une application :

{Evénements} $\rightarrow$	R^4	**"Systèmes de coordonnées"**
E $\mapsto$	$(x_E^0, x_E^1, x_E^2, x_E^3)$	**"Coordonnées de E"**

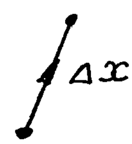
En **l'absence de gravitation** et de champ électromagnétique,c.à.d. loin de toute matière, les systèmes de coordonnées considérés sont définis à partir de **référentiels d'inertie**, R, R', R", ... munis d'horloges et de règles idéales [cf sect. 1.6], de manière telle que :

- $[x^\alpha] = [L]$, $\alpha = 0, 1, 2, 3$
- $x_E^0 = ct_E$ (= "temps") : caractérise **l'instant de E** par rapport à R
- x_E^i (= "composante cartésienne du vecteur-lieu $\vec{x}_E$ de E"), $i = 1, 2, 3$: caractérise le **lieu de E** par rapport à R.

Remarques :

Soit A, E, deux événements et $\Delta x^\mu = x_E^\mu - x_A^\mu$ l'intervalle entre ces deux événements.

1) $|\Delta\vec{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(\Delta x^i)^2}$ = distance entre les deux événements



2) $|\Delta x^0|$ est le "temps" mis par la lumière pour parcourir la distance $|\Delta x^0|$ (au facteur c près)

3) Les unités seront généralement choisies telles que c = 1 (= vitesse de la lumière)

4) Les nombres x_E^α, α = 0, 1, 2, 3, sont appelés "<u>coordonnées contravariantes</u>" de E par rapport à R.

Par définition, l'ensemble E_A des <u>événements simultanés à A p.r. à R</u> est

$$E_A = \left\{ E : x_E^o = x_A^o \right\}.$$

<u>Notation</u>

$\vec{x} = (x^1, x^2, x^3) = \{x^i\}$ $\qquad i = 1, 2, 3$

$x = (x^o, x^1, x^2, x^3) = \{x^\alpha\}$ $\qquad \alpha = 0, 1, 2, 3$

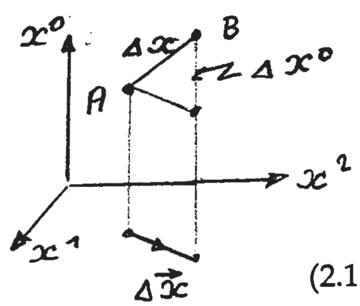
$x = (x^o, \vec{x})$

$\partial_\alpha = \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}$ $\qquad \partial^2_{\alpha\beta} = \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha} \dfrac{\partial}{\partial x^\beta}$

2.2. Décomposition de l'espace-temps

Soient A, E, E*, trois événements de coordonnées x_A^α, x^α, y^α. On définit les **intervalles** (d'espace-temps)

$$\Delta x^\alpha = x^\alpha - x_A^\alpha \qquad \Delta y^\alpha = y^\alpha - x_A^\alpha ,$$



le **produit scalaire**

$$\Delta x \cdot \Delta y = -\Delta x^o \Delta y^o + \sum_{i=1}^{3} \Delta x^i \Delta y^i =$$

$$= -\Delta x^o \Delta y^o + \vec{\Delta x} \cdot \vec{\Delta y} = \eta_{\alpha\beta} \, \Delta x^\alpha \Delta y^\beta \tag{2.1}$$

où $\quad \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{dét}\, \eta = -1 \qquad (2.2)$

et la **forme quadratique**

$$\boxed{\Delta x \,.\, \Delta x = -(\Delta x^o)^2 + \vec{\Delta x}^{\,2} = \eta_{\alpha\beta} \Delta x^\alpha \Delta x^\beta := -c^2 \Delta\tau^2 := \Delta s^2} \tag{2.3}$$

(où $\Delta\tau^2$ peut être positif, négatif, ou nul).

Par définition, la matrice $\eta_{\alpha\beta}$ est la "**métrique**" de la relativité restreinte.

1. Considérons l'ensemble des événements E tels que $\Delta x^\alpha = x^\alpha - x^\alpha_A$ satisfassent :

$$c^2\,\Delta\tau^2 = (\Delta x^o)^2 - \vec{\Delta x}^{\,2} = 0, \qquad \text{soit } |\Delta x^o| = |\vec{\Delta x}|$$

Alors : intervalle de temps entre A et E = $|\Delta x^o|$ =
= temps mis par la lumière pour parcourir $|\Delta x^o| \equiv$
$\equiv$ temps mis par la lumière pour parcourir $|\vec{\Delta x}|$.

Il est ainsi possible de relier A et E par un rayon lumineux. On appelle "**cône de lumière de A**", l'ensemble $\mathcal{C}_A$ des événements défini par

$$\mathcal{C}_A = \{E\,;\,\Delta\tau^2 = 0\}$$

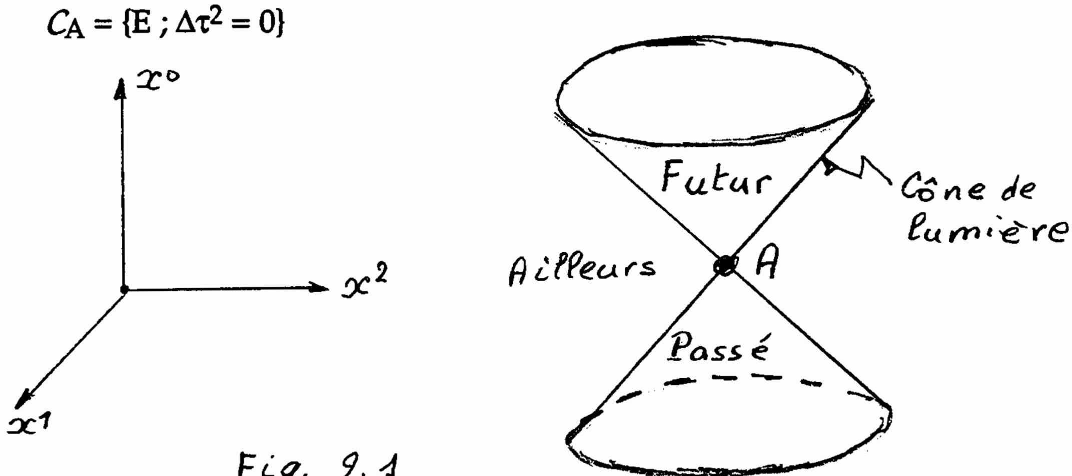


Fig. 9.1

2. Considérons ensuite l'ensemble des événements E tels que

$$c^2\,\Delta\tau^2 = (\Delta x^o)^2 - \vec{\Delta x}^{\,2} > 0$$

Dans ce cas, on dira que l'intervalle Δx est du genre "**temps**".

Comme $|\vec{\Delta x}| < c\,|\Delta t|$, il est possible de relier A et E par un point matériel ayant un mouvement rectiligne-uniforme de vitesse $\vec{v} = \dfrac{\vec{\Delta x}}{\Delta t}$. Ainsi il existe un référentiel d'inertie par rapport auquel les événements sont <u>au même lieu.</u>

$\Delta\tau = \pm \frac{1}{c} \sqrt{(\Delta x^o)^2 - \vec{\Delta x}^2}$ est l'intervalle de temps propre entre A et E : c'est l'intervalle de temps mesuré par l'observateur par rapport auquel A et B sont au même lieu (§ 1.8.3)*).

On appelle "futur de A", l'ensemble des événements

$$\mathcal{F}_A = \{E\,;\Delta\tau^2 > 0 \quad \text{et} \quad \Delta x^o > 0\}\,,$$

et "passé de A", l'ensemble des événements

$$\mathcal{P}_A = \{E\,;\Delta\tau^2 > 0 \quad \text{et} \quad \Delta x^o < 0\}\,.$$

3. Considérons finalement l'ensemble des événements E tels que

$$c^2\,\Delta\tau^2 = (\Delta x^o)^2 - \vec{\Delta x}^{\,2} = -\,\Delta s^2 < 0$$

Dans ce cas, on dira que l'intervalle Δx est du genre "**espace**".

Comme $|\vec{\Delta x}\,| > c\,|\Delta t\,|$, il n'est pas possible de relier A et E par un point matériel, ou un signal: il n'y a pas de relation causale entre A et E.

Dans ce cas

$$\Delta s = +\sqrt{\vec{\Delta x}^2 - (\Delta x^o)^2}$$

est l'intervalle de longueur propre entre les événements A et E.

On peut montrer (§ 1.8.3) qu'il existe un référentiel d'inertie par rapport auquel les événements A et E sont simultanés, et Δs est l'intervalle de longueur entre A et E mesuré par cet observateur.

On appelle "ailleurs de A" l'ensemble des événements

$$\mathcal{A}_A = \{E\,;\Delta\tau^2 < 0\}$$

---

* sign $\Delta\tau$ = sign Δx^o : référentiel "orthochrone"
sign $\Delta\tau$ = – sign Δx^o : référentiel "pseudochrone" (Sec. 5.1)

2.3. Temps propre d'un point matériel

Considérons un point matériel en mouvement par rapport au référentiel d'inertie (orthochrone*) R, d'évolution $\vec{x} = \vec{x}\,(t)$ et de vitesse $\vec{v}\,(t) = \frac{d\vec{x}}{dt}$.

Le temps propre τ du point matériel est défini par :

$$\boxed{\tau(t) - \tau(t_o) = \int_{t_o}^{t} dt \sqrt{1 - \vec{v}^2(t)/c^2}} \tag{2.4}$$

2.4. Hypothèse chronométrique de Synge

Les discussions de la 1ère partie nous conduisent à formuler l'hypothèse suivante:

> Il existe des horloges idéales telles que, quel que soit le mouvement de l'horloge, le temps indiqué corresponde au temps propre défini plus haut (relativement à n'importe quel référentiel d'inertie).

Ainsi, le temps propre d'un point matériel est le temps mesuré par l'horloge idéale se déplaçant avec le point.

2.5. Transformations de Lorentz

Guidé par l'hypothèse ci-dessus, cherchons tous les changements de systèmes de coordonnées (= référentiels d'inertie)

$$\begin{aligned} R^4 &\rightarrow R^4 \\ x &\mapsto x' = x'\,(x) \end{aligned} \tag{2.5}$$

qui satisfont les conditions suivantes :

* c.à.d. que la ligne d'Univers est orientée vers le futur. (cf sec 5.1)

1. <u>non singuliers</u>, c.à.d. que les fonctions $x'^{\alpha} = x'^{\alpha}(x^{o}, x^{1}, x^{2}, x^{3})$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ et que la matrice $\left\{\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\right\}$ possède un inverse $\left\{\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}}\right\}$

$$\boxed{\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \cdot \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\gamma}} = \delta^{\alpha}_{\gamma}} \tag{2.6}$$

2) <u>ils laissent la forme quadratique invariante, c.à.d.</u>

$$(dx^{o})^2 - d\vec{x}^{\,2} = (dx'^{o})^2 - (d\vec{x}\,')^2$$

soit

$$\boxed{-c^2\, d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha}\, dx^{\beta} = \eta_{\alpha\beta}\, dx'^{\alpha}\, dx'^{\beta}} \tag{2.7}$$

Nous avons alors :

$$\eta_{\alpha\beta}\, dx'^{\alpha}\, dx'^{\beta} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}}\, dx^{\gamma}\, dx^{\delta} = \eta_{\gamma\delta}\, dx^{\gamma}\, dx^{\delta} \qquad \forall\, \{dx^{\alpha}\}$$

d'où

$$\boxed{\eta_{\gamma\delta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}}\, \eta_{\alpha\beta}} \tag{2.8}$$

Calculons $\partial_{\varepsilon}\, \eta_{\gamma\delta}$; on obtient

$$0 = \left[\left(\partial^2_{\varepsilon\gamma}\, x'^{\alpha}\right)\left(\partial_{\delta}\, x'^{\beta}\right) + \left(\partial_{\gamma}\, x'^{\alpha}\right)\left(\partial^2_{\varepsilon\delta}\, x'^{\beta}\right)\right] \eta_{\alpha\beta}$$

Ajoutons alors l'équation similaire avec $\gamma \leftrightarrow \varepsilon$ et soustrayons l'équation avec $\delta \leftrightarrow \varepsilon$:

$$0 = \eta_{\alpha\beta} \{(\partial^2_{\varepsilon\gamma} \; x'^{\alpha})\, (\partial_\delta \, x'^{\beta}) \; + (\partial_\gamma \, x'^{\alpha}) \; (\partial^2_{\varepsilon\delta} \; x'^{\beta})$$

$$+ (\partial^2_{\gamma\varepsilon} \; x'^{\alpha})\, (\partial_\delta \, x'^{\beta}) \; + (\partial_\varepsilon \, x'^{\alpha}) \; (\partial^2_{\gamma\delta} \; x'^{\beta})$$

$$- (\partial^2_{\delta\gamma} \; x'^{\alpha})\, (\partial_\varepsilon \, x'^{\beta}) \; - (\partial_\gamma \, x'^{\alpha}) \; (\partial^2_{\delta\varepsilon} \; x'^{\beta})\}$$

$$\Rightarrow \qquad \eta_{\alpha\beta} \, \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}} \; \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\varepsilon} \, \partial x^{\gamma}} = 0$$

Mais $\eta_{\alpha\beta} \dfrac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}}$ étant non singulier (condition 2.6), nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\varepsilon} \, \partial x^{\gamma}} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial \, x^{\gamma}} = \Lambda^{\alpha}{}_{\gamma} = \text{cte}$$

et

$$\boxed{x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}{}_{\gamma} \, x^{\gamma} + a^{\alpha}} \tag{2.9}$$

$\{\Lambda^{\alpha}{}_{\gamma}\}$ et $\{a^{\alpha}\}$ sont des constantes qui doivent satisfaire les équations (2.8) :

$$\boxed{\eta_{\gamma\delta} = \Lambda^{\alpha}{}_{\gamma} \; \Lambda^{\beta}{}_{\delta} \; \eta_{\alpha\beta}} \tag{2.10}$$

Inversément pour n'importe quel changement de coordonnées satisfaisant (2.9) et (2.10), nous aurons :

$$c^2 \Delta\tau'^2 = \eta_{\alpha\beta} \; \Delta x'^{\alpha} \; \Delta x'^{\beta} =$$

$$= -\eta_{\alpha\beta} \, \Lambda^{\alpha}{}_{\gamma} \; \Lambda^{\beta}{}_{\delta} \, \Delta x^{\gamma} \, \Delta x^{\delta} \qquad \text{et (2.10)} \Rightarrow$$

$$c^2 \Delta\tau'^2 = -\eta_{\gamma\delta} \; \Delta x^{\gamma} \, \Delta x^{\delta} = c^2 \, \Delta\tau^2 \; \Rightarrow \; \Delta\tau'^2 = \Delta\tau^2$$

Par définition on appelle "transformation de Lorentz" tout changement de coordonnées de la forme (2.9), où les $\{\Lambda^{\alpha}{}_{\gamma}\}$ et $\{a^{\alpha}\}$ sont des constantes satisfaisant (2.10).

(On dira également que la transformation de Lorentz définit un changement de "référentiel d'inertie").

Remarques

1) La transformation linéaire $x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta}\, x^{\beta}$ est une transformation de Lorentz si et seulement si $\Delta x \cdot \Delta x = \Delta x' \cdot \Delta x'$. Par conséquent,

$$\Delta x \cdot \Delta y = \Delta x' \cdot \Delta y'$$

La transformation de Lorentz laisse le produit scalaire invariant.

2) $\Delta\tau^2 = 0$ si et seulement si $\Delta\tau'^2 = 0$, c.à.d. que les transformations de Lorentz laissent invariante la vitesse de la lumière. (Principe de la Relativité Restreinte). Cependant, si l'on avait considéré tous les changements de coordonnées qui laissent uniquement la vitesse de la lumière invariante, ($d\tau^2 = 0 \leftrightarrow d\tau'^2 = 0$) on aurait obtenu beaucoup plus de transformations, en particulier des transformations non linéaires. Dans ce cas, un MRU relativement à $\{x^{\mu}\}$ n'aurait pas été un MRU relativement à $\{x'^{\mu}\}$ et le principe de la relativité restreinte n'aurait pas été satisfait.

3) Il est commode d'écrire la transformation de Lorentz sous forme matricielle, soit :

$$\begin{aligned} (a, \Lambda) :\ & \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ & x \mapsto x' = \Lambda\, x + a \end{aligned} \qquad (2.\overline{9})$$

et la condition (2.10) s'écrit

$$\boxed{\eta = \Lambda^T\, \eta\, \Lambda} \qquad (2.\overline{10})$$

où Λ^T est la matrice transposée de Λ.

***Propriétés* :**

1) $$(\Lambda^o{}_o)^2 = 1 + \sum_{i=1}^{3} (\Lambda^i{}_o)^2 \geq 1 \qquad (2.11)$$

En effet : (2.10) entraîne (avec $\gamma = \delta = 0$)

$$-1 = -(\Lambda^o{}_o)^2 + \sum_i (\Lambda^i{}_o)^2$$

2) $$\det \Lambda = \pm 1 \qquad (2.12)$$

En effet : $(2.\overline{10})$ entraîne $\det \eta = (\det \Lambda)^2 \det \eta$.

3) L'ensemble des transformations de Lorentz constitue un groupe pour la loi de composition

$$(a_2, \Lambda_2) \circ (a_1, \Lambda_1) = (a_2 + \Lambda_2 a_1, \ \Lambda_2 \Lambda_1) \tag{2.13}$$

En effet : $x \xrightarrow{(1)} x' = \Lambda_1 x + a_1 \xrightarrow{(2)} x'' = \Lambda_2 x' + a_2$

$\Rightarrow \quad x \longrightarrow x'' = \Lambda_2 \Lambda_1 x + (\Lambda_2 a_1 + a_2)$

c.à.d. que le produit de deux transformations de Lorentz est la transformation de Lorentz définie par (2.13). L'élément neutre est la transformation (0,1); l'inverse de (a, Λ) est $(-\Lambda^{-1} a, \Lambda^{-1})$.

Ce groupe de transformations est appelé "<u>groupe de Lorentz inhomogène</u>", ou "<u>groupe de Poincaré</u>".

L'ensemble des transformations de Lorentz avec $a = 0$, soit

$$x' = \Lambda x \qquad \text{avec} \qquad \eta = \Lambda^T \eta \Lambda$$

est un sous-groupe du groupe de Poincaré, appelé "<u>groupe de Lorentz $\mathcal{L}$</u>" (ou groupe de Lorentz homogène).

Propriété :

Le groupe de Lorentz est formé de 4 composantes connexes

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_+^\uparrow \ \cup \ \mathcal{L}_-^\uparrow \ \cup \ \mathcal{L}_+^\downarrow \ \cup \ \mathcal{L}_-^\downarrow$$

définies à partir des signes de $\Lambda^0{}_0$ et dét Λ.

Sign $\Lambda^o{}_o$	det Λ	Composante connexe
+	+ 1	$\mathcal{L}_+^\uparrow \ni 1$ Sous-groupe des transformations orthochrones, propres
+	− 1	$\mathcal{L}_-^\uparrow \ni P$ Composante orthochrone impropre
−	+ 1	$\mathcal{L}_+^\downarrow \ni PT$ Composante pseudochrone propre
−	− 1	$\mathcal{L}_-^\downarrow \ni T$ Composante pseudochrone impropre

où $$P(x^o,\vec{x}) = (x^o,-\vec{x})$$
$$T(x^o,\vec{x}) = (-x^o,\vec{x})$$
$$PT(x^o,\vec{x}) = (-x^o,-\vec{x})$$

Nous avons ainsi :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_+^\uparrow \bullet \{1, P, T, PT\}$$

Les transformations avec $\Lambda^o{}_o \geq 1$ ne renversent pas le signe du temps, elles sont dites orthochrones : c'est un sous-groupe de $\mathcal{L}$.

Les transformations avec det $\Lambda = +1$ constitue le sous-groupe des transformations propres.

Le groupe $\mathcal{L}_+^\uparrow$ contient le **sous-groupe des rotations propres R_+** :

$$\Lambda \in R_+ \quad \text{si} \quad \begin{cases} \Lambda^o{}_o = 1 \quad \Lambda^o{}_i = \Lambda^i{}_o = 0 \\ \Lambda^i{}_j = R_{ij} \quad \text{avec} \quad RR^T = 1; \quad \det R = 1 \end{cases} \tag{2.14}$$

Par définition, on appelle "**transformation de Lorentz pure**" de vitesse $\vec{v} = v\,\vec{n} = c\,\mathrm{th}\,\eta\,\vec{n}$ (*) , ou aussi "**transformation de Lorentz sans rotation**", ou encore "**boost**", la transformation

---

(*) η est appelé "paramètre de rapidité"

$$\boxed{x' = \Lambda(\vec{v})\, x} \quad \text{avec} \quad \boxed{\begin{array}{l} \Lambda^0{}_0 = \text{ch}\,\eta; \qquad \Lambda^0{}_i = \Lambda^i{}_0 = -\,\text{sh}\,\eta\, n^i \\ \Lambda^i{}_j = \delta_{ij} + (\text{ch}\,\eta - 1)\, n_i\, n_j \end{array}}$$

On vérifiera que $\Lambda(\vec{v}) \in \mathcal{L}_+^\uparrow$.

On a ainsi :

$$\text{ch}\,\eta = \frac{1}{\sqrt{1-\text{th}^2\eta}} = \frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} \equiv \gamma, \qquad \text{sh}\,\eta = \gamma\left|\vec{v}\right|/c$$

soit :

$$\boxed{\begin{array}{l} \Lambda^0_0 = \gamma; \quad \Lambda^0_i = \Lambda^i_0 = -\gamma v^i/c \\ \Lambda^i_j = \delta_{ij} + (\gamma-1)\dfrac{v^i v^j}{v^2} \end{array}}$$

On peut alors écrire le boost $x' = \Lambda(\vec{v})\, x$ sous la forme

$$\begin{cases} t' = \gamma\left(t - \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{x}}{c^2}\right) \\ \vec{x}' = \vec{x} - \gamma\,\vec{v}\,t + (\gamma-1)\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{x}}{\vec{v}^2}\,\vec{v} \end{cases}$$

L'ensemble des transformations de Lorentz pures n'est pas un sous-groupe, mais un sous-ensemble de $\mathcal{L}_+^\uparrow$. En effet,

$$\Lambda(\vec{v}_2) \circ \Lambda(\vec{v}_1) = R(\theta\,\vec{n})\ \Lambda(\vec{v})$$

où (voir problème)

$$\vec{v} = \frac{1}{1+\dfrac{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2}{c^2}}\left\{\sqrt{1-\vec{v}_1^{\,2}/c^2}\ \vec{v}_2 + \left[1+\frac{(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2)}{\vec{v}_1^{\,2}}\left(1-\sqrt{1-\vec{v}_1^{\,2}/c^2}\right)\right]\vec{v}_1\right\}$$

$$\text{tg}\,\frac{\theta}{2} = \frac{\text{th}\,\dfrac{\eta_1}{2}\ \text{th}\,\dfrac{\eta_2}{2}}{1+(\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2)\ \text{th}\,\dfrac{\eta_1}{2}\ \text{th}\,\dfrac{\eta_2}{2}}\left|\vec{n}_2\wedge\vec{n}_1\right| \tag{2.17}$$

$$\vec{n} \,//\, \vec{n}_2\wedge\vec{n}_1$$

Si $\vec{v}_1$ est parallèle à $\vec{v}_2$, on obtient de (2.17)

$$\begin{cases} \vec{v} = \dfrac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{1 + \dfrac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}} \\ \theta = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des transformations de Lorentz pures de vitesses parallèles à une direction fixée est un sous-groupe de $\mathcal{L}_+^\uparrow$.

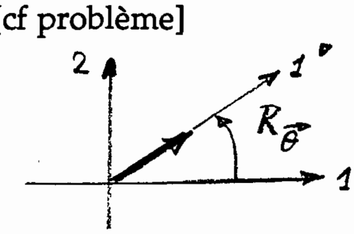
D'autre part, l'ensemble des transformations de Lorentz pures s'identifie avec l'ensemble des transformations de Lorentz telles que $\Lambda = \Lambda^T$, tandis que pour les rotations, on a $\Lambda \, . \, \Lambda^T = \mathit{1}$. [cf. problème].

Propriétés

1) $\left[\Lambda\left(\vec{v}\right)\right]^{-1} = \Lambda\left(-\vec{v}\right)$

2) Toute transformation de Lorentz $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ peut s'exprimer sous la forme $\Lambda = R \circ \Lambda(\vec{v})$ où R est une rotation propre et $\Lambda(\vec{v}\ )$ une transformation de Lorentz pure.

3) Soit $R_{\vec{\theta}}$ la rotation (des axes) d'un angle $\vec{\theta}$. On a l'identité [cf problème]



$$\boxed{\Lambda\left(R_{\vec{\theta}}\ \vec{v}\right) = R_{\vec{\theta}}^{-1}\ \Lambda\left(\vec{v}\right)\ R_{\vec{\theta}}}$$

où $R_{\vec{\theta}}\ \vec{v} = \left(v^{*1},\ v^{*2},\ v^{*3}\right)$ est la rotation active appliquée à $\vec{v} = \left(v^1,\ v^2,\ v^3\right)$:

$$v^{*i} = \left(R_{\vec{\theta}}^{-1}\right)^i_{\ j}\ v^j$$

4) <u>Interprétation du boost</u> $\Lambda\left(\vec{v}\right)$

Considérons une particule P de vitesse $\vec{v} = \vec{v}\,P)_R$ constante et soit R* le <u>référentiel de repos de la particule</u>, c'est-à-dire le référentiel en translation (par rapport à R) par rapport auquel la particule est immobile. Le changement de référentiel R → R* est alors défini par

$$x^* = \Lambda(\vec{v})\, x.$$

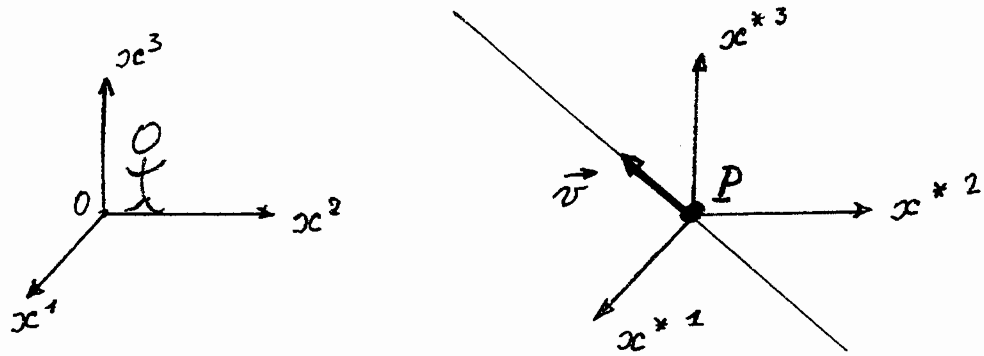


Fig. 2.2

En effet, par rapport à R, on a

$$\vec{x} = \vec{b} + \vec{v}\, t$$

et avec la transformation $x^* = \Lambda(\vec{v})\, x$, il vient

$$t^* = \gamma t - \gamma \frac{\vec{v}}{c^2}\left(\vec{b} + \vec{v}\, t\right)$$

$$\vec{x}^* = \vec{b} + \vec{v}\, t - \gamma\, \vec{v}\, t + (\gamma - 1)\, \frac{\vec{v}\cdot\left(\vec{b} + \vec{v}\, t\right)}{\vec{v}^2}\, \vec{v}$$

d'où $$\vec{x}^*(t^*) = \vec{b} + (\gamma - 1)\, \frac{\vec{v}\cdot\vec{b}}{\vec{v}^2}\, \vec{v} = \text{cte}.$$

Inversément, toute transformation de Lorentz pur correspondant à un changement de référentiel R → R* en translation de vitesse $\vec{v}$ par rapport à R.

Interprétation de $\Lambda(\vec{v}_2) \circ \Lambda(\vec{v}_1)$

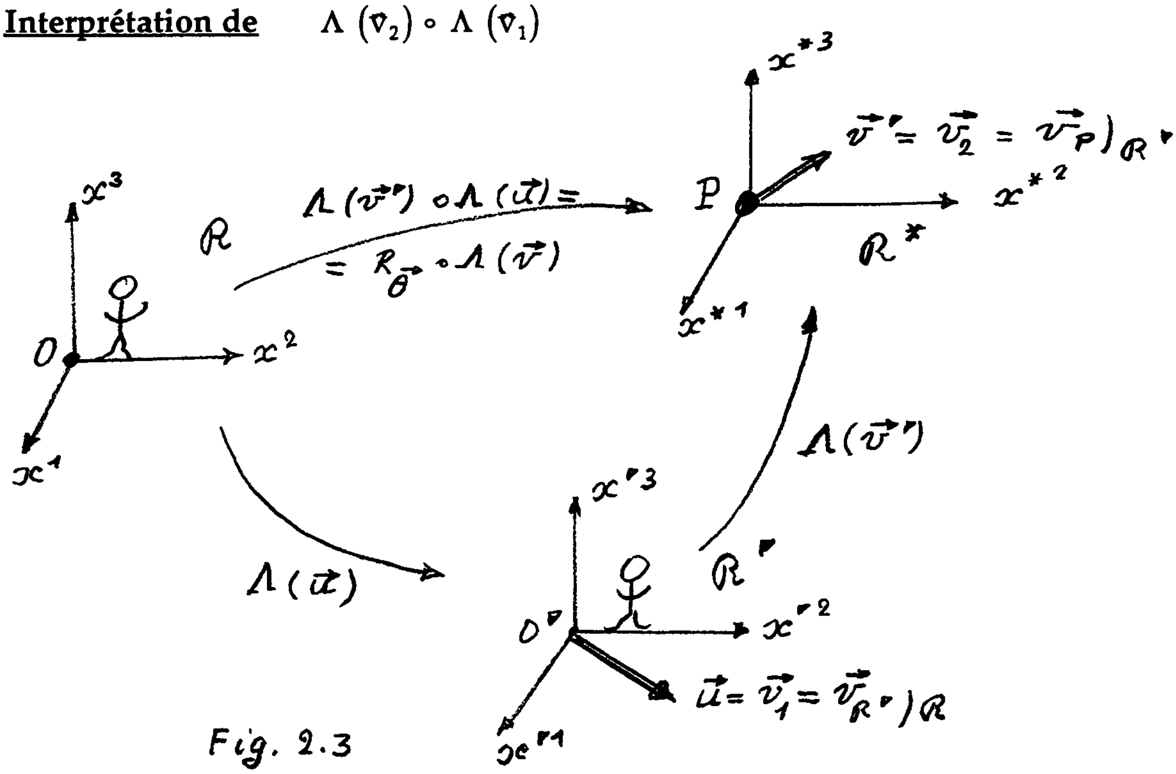


Fig. 2.3

Soit : R le référentiel "absolu"

R' un référentiel "relatif" : $\vec{v}_e = \vec{v}_{R'})_R = \vec{u}$

R* le référentiel de repos dans la particule

$\vec{v}\,' = \vec{v}_P)_{R'}$ = vitesse relative de P

$\vec{v} = \vec{v}_P)_R$ = vitesse absolue de P.

En remplaçant dans (2.17) $\vec{v}_1$ par $\vec{u}$ et $\vec{v}_2$ par $\vec{v}\,'$, puis en décomposant $\vec{v}\,'$ et $\vec{v}$ en une composante parallèle, et l'autre perpendiculaire, à la vitesse d'entraînement $\vec{v}_e = \vec{u}$, soit

$$\vec{v}\,' = \vec{v}\,'_{\parallel} + \vec{v}\,'_{\perp}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp} \qquad\qquad \vec{v}_{\parallel} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{u}^2}\,\vec{u}$$

on obtient la loi de composition des vitesses :

$$\vec{v}_{\parallel} = \frac{\vec{v}\,'_{\parallel} + \vec{u}}{1 + \dfrac{\vec{v}\,'\cdot\vec{u}}{c^2}} \qquad\qquad \vec{v}_{\perp} = \frac{\sqrt{1 - \vec{u}^{\,2}/c^2}}{1 + \dfrac{\vec{v}\,'\cdot\vec{u}}{c^2}}\,\vec{v}\,'_{\perp} \tag{2.18}$$

2.6. Transformations de Lorentz infinitésimales

- pour une rotation infinitésimale $\delta\vec{\theta}$ des axes on a

$$\begin{cases} \Lambda^o{}_o = 1 & \Lambda^o{}_i = \Lambda^i{}_o = 0 \\ \Lambda^i{}_j \approx \delta^i{}_j + \delta\,\theta^{ik}\,\eta_{kj} \end{cases}$$

où $\qquad \delta\,\theta^{ik} = \varepsilon^{ik\ell}\,\delta\,\theta_\ell$

- pour un boost infinitésimal de vitesse $\delta\vec{v}$ on a

$$\begin{cases} \Lambda^o{}_o \approx 1 & \Lambda^o{}_i = \Lambda^i{}_o \approx -\delta v^i/c \\ \Lambda^i{}_j \approx \delta^i{}_j \end{cases}$$

- la forme générale des transformations de Lorentz (homogènes) infinitésimales est donnée par :

$$\Lambda^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta + \delta\Omega^{\mu\nu}\,\delta^\alpha{}_\mu\,\eta_{\nu\beta} \tag{2.19}$$

où les nombres réels $\delta\Omega^{\mu\nu}$ sont infinitésimaux et satisfont (en vertu de (2.10))

$$\delta\Omega^{\mu\nu} = -\,\delta\Omega^{\nu\mu}$$

$\delta\Omega^{io} = \delta v^i/c$ correspond au boost infinitésimal $\delta\vec{v}$

$\delta\Omega^{ij} = \varepsilon^{ijk}\,\delta\theta_k$ correspond à la rotation infinitésimale $\delta\vec{\theta}$.

Il y a donc 6 paramètres et 6 générateurs, soit les 6 matrices

$$\sum_{[\mu\nu]}{}^{\alpha}{}_{\beta} = \frac{1}{2}\left(\delta^\alpha{}_\mu\,\eta_{\nu\beta} - \delta^\alpha{}_\nu\,\eta_{\mu\beta}\right) \tag{2.20}$$

qui engendrent le groupe de Lie à 6 paramètres $\mathcal{L}_+^\uparrow$.

CHAPITRE III : TENSEURS EN RELATIVITE RESTREINTE

Par définition un scalaire est une grandeur S, définie relativement à un système de coordonnées (= référentiel d'inertie), qui est invariante par rapport aux transformations de Lorentz; c'est-à-dire

$$x^\alpha \to x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta \; x^\beta + a^\alpha \tag{3.1}$$

entraîne $S \to S' = S.$

Par exemple, le temps propre associé à un intervalle Δx, ou à un point matériel, est un scalaire.

Un ensemble de 4 grandeurs V^α, de même nature, définies relativement à un système de coordonnées est un (quadri)vecteur contravariant si, pour toute transformation de Lorentz (3.1), il se transforme selon la règle

$$\boxed{V^\alpha \to V'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta \; V^\beta} \tag{3.2}$$

Par exemple, l'intervalle Δx est un vecteur contravariant.
(Attention ! x^α n'est pas un vecteur).

De même un ensemble de 4 grandeurs U_α, est un (quadri)-vecteur covariant, si il se transforme selon la règle :

$$\boxed{U_\alpha \to U'_\alpha = (\Lambda^{-1})^\beta{}_\alpha \; U_\beta} \tag{3.3}$$

où Λ^{-1} est la matrice inverse de Λ, soit $(\Lambda^{-1})^\alpha{}_\beta = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta}$

$$x'^\alpha \to x^\alpha = (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\beta \, x'^\beta - (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\beta \, a^\beta$$

Remarque

De $\quad \eta = \Lambda^T \eta \; \Lambda \quad (3.4)$

on tire $\quad \Lambda^{-1} = \eta \; \Lambda^T \; \eta \quad (3.5)$

soit $$\boxed{(\Lambda^{-1})^{\beta}{}_{\alpha} = \eta^{\beta\gamma}\,\eta_{\alpha\delta}\,\Lambda^{\delta}{}_{\gamma}} \tag{3.6}$$

où l'on a posé par définition

$$\eta^{\alpha\beta} \equiv \eta_{\alpha\beta} \equiv \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

ce qui donne

$$\eta^{\alpha\gamma}\;\eta_{\gamma\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta} \tag{3.8}$$

Propriétés (à démontrer)

1) $U_\alpha V^\alpha = U'_\alpha V'^\alpha$: c'est un scalaire

2) $\forall\, V^\alpha$ contravariant, alors $V_\alpha = \eta_{\alpha\beta}\, V^\beta$ est covariant

$\forall\, U_\alpha$ covariant, alors $U^\alpha = \eta^{\alpha\beta}\, U_\beta$ est contravariant

et $\eta^{\alpha\beta} V_\beta \equiv V^\alpha$, $\eta_{\alpha\beta}\, U^\beta \equiv U_\alpha$.

3) Soit U . V le produit scalaire de deux vecteurs contravariants défini par

$$\boxed{U\,.\,V = \eta_{\alpha\beta}\;U^\alpha\,V^\beta = U_\beta\,V^\beta} \tag{3.9}$$

Les transformations de Lorentz laissent le produit scalaire invariant.

Par définition, le vecteur contravariant V est dit :

"temporel"	si	$V\,.\,V < 0$
"spatial"	si	$V\,.\,V > 0$
"nul"	si	$V\,.\,V = 0$.

4) dx^α est un vecteur contravariant.

5) Gradient : $\dfrac{\partial}{\partial x^\alpha} \equiv \partial_\alpha$ est un vecteur covariant

En effet :
$$\frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\beta} \cdot \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} = (\Lambda^{-1})^\beta{}_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta} \tag{3.10}$$

c.à.d. : $\partial'_\alpha = (\Lambda^{-1})^\beta{}_\alpha \, \partial_\beta$.

Divergence : La divergence $\partial_\alpha \, V^\alpha$ d'un champ de vecteurs contravariants est un scalaire.

D'Alembertien : Le d'Alembertien $\Box$ est un scalaire.

$$\Box = \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \, \partial_\beta = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^2 \tag{3.11}$$

Définition

Un ensemble de $4^{(p+q)}$ grandeurs $T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}{}_{\beta_1 \dots \beta_q}$, définies relativement à un système de coordonnées, est un (pseudo)-tenseur contravariant d'ordre p et covariant d'ordre q, si pour toute transformation de Lorentz (3.1), il se transforme selon la règle

$$T'^{\alpha_1 \dots \alpha_p}{}_{\beta_1 \dots \beta_q} = C[\Lambda] \, \Lambda^{\alpha_1}{}_{\gamma_1} \dots \Lambda^{\alpha_p}{}_{\gamma_p} (\Lambda^{-1})^{\delta_1}{}_{\beta_1} \dots (\Lambda^{-1})^{\delta_q}{}_{\beta_q} \, T^{\gamma_1 \dots \gamma_p}{}_{\delta_1 \dots \delta_q}$$

où $C[\Lambda] = \pm 1$ et $C[\Lambda]=+1$ pour $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$.

1) Si $C[\Lambda] = 1$ pour tout Λ, T est un tenseur

2) Si $C[\Lambda] \neq 1$, T est un pseudo-tenseur

3) Si $C[\Lambda] = \text{sign}\, \Lambda^0{}_0$, T est un "tenseur pseudochrone" (parfois noté $\breve{T}$)

4) Si $C[\Lambda] = (\det \Lambda)^{-1}$, T est un "tenseur de type densité"

De même un <u>champ tensoriel</u> est défini par les formules similaires

$$\begin{cases} T'^{\cdots}{}_{\cdots}(x') = \ldots T^{\cdots}{}_{\cdots}(x) \\ x = \Lambda^{-1}x' - \Lambda^{-1}\, a \end{cases}$$

Propriétés

1) La combinaison linéaire de deux tenseurs de même nature tensorielle est un tenseur (de même nature tensorielle).

2) Le produit tensoriel de deux tenseurs est un tenseur :

$$R^{\alpha_1\cdots}{}_{\beta_1\ldots}\; S^{\gamma_1\cdots}{}_{\delta_1\ldots} = T^{\alpha_1\ldots\,\gamma_1\ldots}{}_{\beta_1\ldots\,\delta_1\ldots}$$

3) La contraction d'un tenseur est un tenseur :

$$T^{\alpha\beta\gamma}{}_{\beta\delta\varepsilon} \;=\; T^{\alpha\gamma}{}_{\delta\varepsilon}$$

4) Le gradient d'un champ tensoriel est un champ tensoriel

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\; T^{\beta\gamma}{}_{\delta} = \partial_{\alpha}\; T^{\beta\gamma}{}_{\delta} \equiv T^{\beta\gamma}{}_{\delta,\,\alpha}$$

Exemples

1) $\eta_{\alpha\beta}$ est un tenseur covariant d'ordre 2, invariant;

$\eta^{\alpha\beta}$ ($\equiv \eta_{\alpha\beta}$) est un tenseur contravariant d'ordre 2, invariant:

Ce sont les "<u>tenseurs métriques de la relativité restreinte</u>".

En effet, de (3.5) $\quad \Lambda^{-1} = \eta\, \Lambda^{T}\, \eta \;$ et $\quad \eta^{2} = 1$

entraîne : $\quad \Lambda\, \Lambda^{-1} = 1 = \Lambda\, \eta\, \Lambda^{T}\, \eta$

d'où
$$\eta = \Lambda\, \eta\, \Lambda^{T} \tag{3.12}$$

$$\Rightarrow \qquad \eta^{\alpha\beta} = \Lambda^{\alpha}{}_{\gamma}\, \Lambda^{\beta}{}_{\delta}\, \eta^{\gamma\delta}$$

D'autre part, de (3.4)

$$\eta = \Lambda^T \eta \, \Lambda$$

entraîne : $$\eta_{\alpha\beta} = \Lambda^\gamma{}_\alpha \, \eta_{\gamma\delta} \, \Lambda^\delta{}_\beta$$

soit : $$(\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu \, (\Lambda^{-1})^\beta{}_\nu \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}$$

2) Le <u>symbole de Kronecker</u> est un tenseur une fois covariant et une fois contravariant, invariant

En effet : $\delta^\alpha{}_\beta \equiv \eta^{\alpha\gamma} \, \eta_{\gamma\beta}$

implique que $\delta^\alpha{}_\beta$ est le produit contracté de deux tenseurs.

3) Le <u>tenseur de Levi-Civita</u> est un tenseur de type densité, invariant.

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1 \text{ si } \alpha\beta\gamma\delta \text{ permutation paire de } 0123 \\ -1 \text{ si } \alpha\beta\gamma\delta \text{ permutation impaire de } 0123 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

et l'on a l'identité :

$$(\det \Lambda)^{-1} \Lambda^\alpha{}_{\alpha'} \Lambda^\beta{}_{\beta'} \Lambda^\gamma{}_{\gamma'} \Lambda^\delta{}_{\delta'} \varepsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{3.13}$$

4) Le <u>tenseur zéro</u> : si tous les éléments sont zéro.

Propriétés

Le tenseur métrique permet de "monter" ou "descendre" n'importe quel indice d'un tenseur.

Par exemple : $\eta^{\alpha\beta_2} \, T_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_q} = T_{\beta_1}{}^{\alpha}{}_{\beta_3 \ldots \beta_q}$.

On remarquera en particulier l'identité

$$\eta^{\alpha\gamma} \, \eta^{\beta\delta} \, \eta_{\gamma\delta} = \eta^{\alpha\beta}$$

ce qui justifie la notation introduite.

Définition

On appelle "coordonnées covariantes" d'un événement, les 4 nombres définis par

$$x_\alpha = \eta_{\alpha\beta}\, x^\beta \tag{3.14}$$

et $$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \partial^\alpha \quad \text{est un vecteur contravariant.}$$

$$\square \equiv \partial^\alpha\, \partial_\alpha \quad \text{est un scalaire.} \tag{3.15}$$

Remarque : Tenseurs et formes multilinéaires

Ayant introduit un système de coordonnées $\{x^\alpha\}$, on définit la base de vecteurs contravariants e_α par

$$(e_\alpha)^\beta = \delta^\beta{}_\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{e_\alpha \cdot e_\beta = \eta_{\alpha\beta}} \tag{3.16}$$

Ce sont les vecteurs "unités" tangents aux lignes de coordonnées $\{x^\alpha\}$.

Nous avons ainsi la décomposition du vecteur v dans la base e_α

$$v = v^\alpha\, e_\alpha \qquad \text{et} \qquad v \cdot e_\beta = \eta_{\beta\alpha}\, v^\alpha = v_\beta \tag{3.17}$$

Lors du changement de coordonnées (3.1)

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta\, x^\beta + a^\alpha$$

les nouveaux vecteurs de base sont reliés aux anciens par la règle

$$\boxed{e'_\alpha = (\Lambda^{-1})^\beta{}_\alpha\, e_\beta} \tag{3.18}$$

En effet, par définition, relativement au système de coordonnées $\{x'^\alpha\}$

$$e'_\alpha = \left\{y'^\beta = \delta^\beta_\alpha\right\}$$

Par conséquent par rapport à $\{x^\beta\}$

$$y'^{\beta} \rightarrow y^{\beta} = \left(\Lambda^{-1}\right)^{\beta}{}_{\gamma} y'^{\gamma} = \left(\Lambda^{-1}\right)^{\beta}{}_{\alpha}$$

et de (3.17)

$$e'_{\alpha} = y^{\beta}\, e_{\beta} = \left(\Lambda^{-1}\right)^{\beta}_{\alpha}\, e_{\beta}$$

d'où $$v = v^{\alpha}\, e_{\alpha} = v'^{\alpha}\, e'_{\alpha}\,.$$

En conclusion, un vecteur contravariant $\{v^{\alpha}\}$ est une grandeur ayant une signification intrinsèque indépendante du système de coordonnées choisi R (= référentiel d'inertie). On posera alors

$$v = \{v^{\alpha}\} = \{v'^{\alpha}\}$$

et l'on dira que les v^{α} sont les "<u>composantes contravariantes du vecteur v relativement à R</u>".

De manière explicite, on a :

$$\begin{cases} e'_{o} = \gamma\, e_{o} + \gamma\, \dfrac{v^{j}}{c}\, e_{j} \\ e'_{i} = e_{i} + \gamma\, \dfrac{v^{i}}{c}\, e_{o} + (\gamma - 1)\, \dfrac{v^{i}\, v^{j}}{v^{2}}\, e_{j} \end{cases} \tag{3.19}$$

Dans le cas particulier d'un "boost" infinitésimal, on aura :

$$\begin{cases} e'_{0} = e_{0} + \dfrac{\delta v^{j}}{c}\, e_{j} \\ e'_{i} = e_{i} + \dfrac{\delta v^{i}}{c}\, e_{0} \end{cases} \tag{3.20}$$

Nous pouvons ensuite donner une définition intrinsèque, c.à.d. indépendante du choix de système de coordonnées, des tenseurs.

Soit V l'espace vectoriel des vecteurs contravariants
V* l'espace dual de V (c.à.d. l'espace des formes linéaires sur V, muni des opérations addition et multiplication par un scalaire).

Par définition pour tout p dans V*,

$$\begin{array}{rrcl} p: & V & \rightarrow & R \\ & v & \mapsto & p(v) \\ v = v^\alpha e_\alpha & & \mapsto & p(v) = v^\alpha \, p\,(e_\alpha). \end{array}$$

Posons : $p_\alpha = p(e_\alpha)$ = "composante covariante de p relativement à R"

alors i) p_α définit un vecteur covariant

ii) $p\,(v) = p_\alpha \, v^\alpha$

Introduisons encore ε^α, la base duale de e_α, base de V* définie par les formes linéaires

$$\varepsilon^\alpha\,(e_\beta) = \delta^\alpha{}_\beta \tag{3.21}$$

On obtient :

$$p(v) = p_\alpha \, \delta^\alpha{}_\beta \, v^\beta = p_\alpha \, \varepsilon^\alpha\,(e_\beta)\, v^\beta = p_\alpha \, \varepsilon^\alpha(v) \tag{3.22}$$

soit : $p = p_\alpha \, \varepsilon^\alpha$ (décomposition de p dans la base ε^α).

On a ainsi : $\boxed{v \, . \, e_\alpha = v_\alpha}$ et $\boxed{\varepsilon^\alpha\,(v) = v^\alpha}$ (3.23)

Finalement un tenseur T de type $\binom{k}{l}$ est par définition une forme multilinéaire de $(V^*)^k \otimes (V)^l$ dans les réels :

$$(p^1, \dots, p^k, v_1, \dots v_l) \rightarrow T\,(p^1, \dots, p^k, v_1, \dots v_l) \tag{3.24}$$

Les composantes de T relativement au référentiel R, soit

$$T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}{}_{\beta_1 \dots \beta_l} = T\,(\varepsilon^{\alpha_1}, \dots, \varepsilon^{\alpha_k}, e_{\beta_1}, \dots, e_{\beta_l}) \tag{3.25}$$

définissent un tenseur au sens adopté précédemment.

Par exemple, le tenseur métrique $\eta_{\alpha\beta}$ définit le tenseur de type $\binom{0}{2}$

$$\eta\,(v_1, v_2) = v_1 \cdot v_2 = \eta_{\alpha\beta} \, v_1^\alpha \; v_2^\beta \tag{3.26}$$

de composantes : $\eta(e_\alpha, e_\beta) \equiv \eta_{\alpha\beta}$.

CHAPITRE IV : LES DEUX PRINCIPES DE LA THERMODYNAMIQUE

4.1. Grandeurs extensives

En physique non relativiste une grandeur extensive est une grandeur telle que la valeur à un instant donné soit égale à la somme des valeurs de chacune des parties du système à cet instant. En physique relativiste, il faut prendre quelques précautions puisque la notion de simultanéité n'est pas absolue.

Considérons une hypersurface tridimensionnelle, d'équation $\lambda(x) = 0$, caractérisant une "époque", c.à.d. que l'élément de surface $d\breve{\sigma}_\alpha$ (x) est un vecteur temporel, pseudochrone, orienté vers le futur (relativement au système de coordonnées choisi) :

$$d\breve{\sigma}_\alpha (x)\, d\breve{\sigma}^\alpha (x) < 0 \qquad \text{et} \qquad d\breve{\sigma}_0 (x) > 0.$$

En particulier il est toujours possible de trouver un système de coordonnées local tel que $d\sigma'_\alpha (x) = (d^3 x', 0, 0, 0)$.

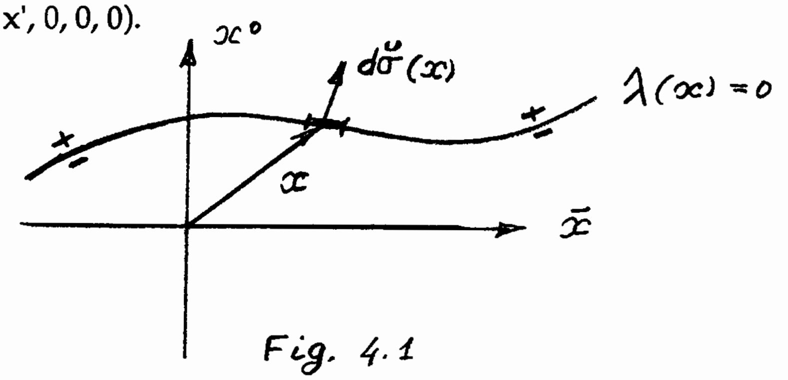


Fig. 4.1

Par définition une grandeur $\breve{F}$ est "extensive", si il existe un champ vectoriel $j^\alpha_F (x)$, appelé "courant de $\breve{F}$" tel que pour toute surface $\lambda (x) = 0$, caractérisant une époque :

$$\boxed{\breve{F}\,[\lambda(.)] = \frac{1}{c} \int_{\lambda(x) = 0} d\breve{\sigma}_\alpha (x)\, j^\alpha_F (x)} \qquad (4.1)$$

En particulier la valeur de F à l'instant t (relativement à R) est :

$$\boxed{\breve{F}(t) = \frac{1}{c} \int_{R^3} d^3 x \; j_F^0(t, \vec{x})} \tag{4.2}$$

$\rho_F = \frac{1}{c} \; j_F^0$ est la "densité" de la grandeur F

$\vec{j}_F$ est le "flux" de la grandeur F.

4.2. Grandeurs extensives conservées

Une grandeur extensive $\breve{F}$, est dite conservée si le courant associé satisfait l'équation de continuité

$$\boxed{\partial_\alpha j_F^\alpha(x) = 0} \qquad \text{c.à.d.} \qquad \partial_t \rho_F(x) + \text{div}\, \vec{j}_F(x) = 0 \tag{4.3}$$

Propriétés

Soit $\lambda'(x) = 0$ une hypersurface caractérisant une "époque"

et $\lambda''(x) = 0$ une hypersurface caractérisant une "époque postérieure à la première" (les deux hypersurfaces ne se coupent pas).

$$\boxed{\partial_\alpha j_F^\alpha(x) = 0 \quad \rightarrow \quad F[\lambda'(.)] = F[\lambda''(.)]} \tag{4.4}$$

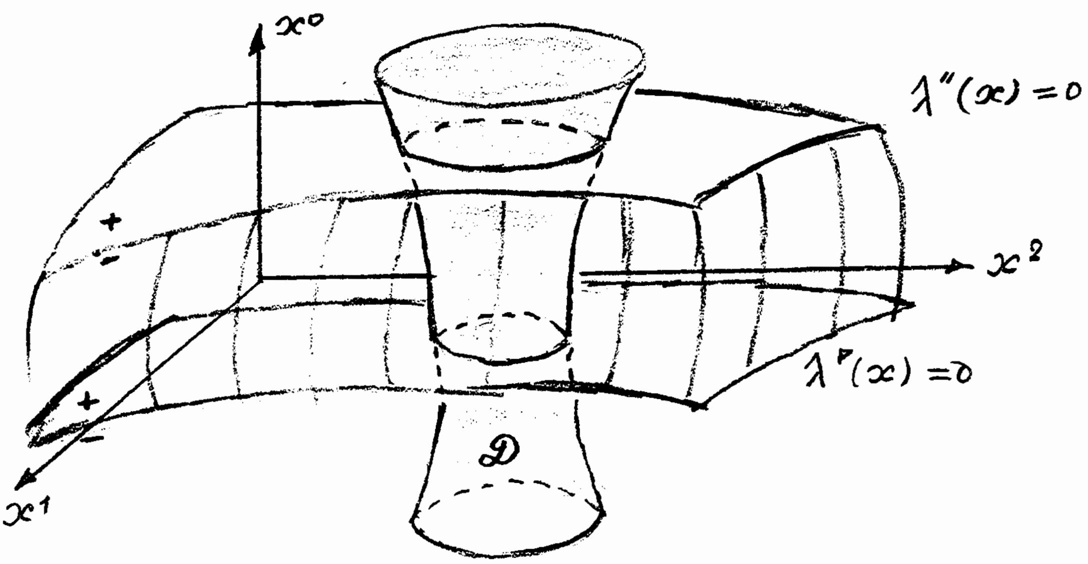


Fig. 4.2

En effet, supposons que $j_F^\alpha(x) = 0$ si $x \notin \mathcal{D}$ et fermons la surface à l'infini.

En vertu du théorème de Gauss et de (4.3)

$$\oint d\sigma_\alpha(x)\, j_F^\alpha(x) = \int_{\mathcal{D}} d^4x\, \partial_\alpha j_F^\alpha(x) = 0$$

$$= \int_{\lambda''(x)=0} d\sigma_\alpha(x)\, j_F^\alpha(x) - \int_{\lambda'(x)=0} d\sigma_\alpha(x)\, j_F^\alpha(x) = F[\lambda''(.)] - F[\lambda'(.)].$$

En particulier : $$\boxed{\breve{F}(t) = \frac{1}{c}\int d^3x\ j_F^0(t,\vec{x}) = \breve{F}(t')} \tag{4.5}$$

Considérons pour terminer un domaine Λ fixé dans R^3 et soit :

$$F_\Lambda(t) = \frac{1}{c}\int_\Lambda d^3x\ j_F^0(t,\vec{x})$$

En vertu de l'équation de continuité (4.2)

$$\frac{d}{dt} F_\Lambda(t) = \frac{1}{c}\int_\Lambda d^3x\ \partial_t j_F^0(t,\vec{x}) = -\int_\Lambda d^3x\, \partial_i\, j_F^i(t,\vec{x})$$

c'est-à-dire : $$\boxed{\frac{d}{dt} F_\Lambda(t) = -\int_{\partial\Lambda} d\vec{\sigma}\,.\,\vec{j}_F(t,\vec{x})} \tag{4.6}$$

4.3. Premier principe de la thermodynamique

4.3.1. Tenseur énergie-impulsion

Le premier principe postule que tout système physique est caractérisé par un quadrivecteur $\breve{\Pi}^\beta$, temporel, pseudochrone, dirigé vers le futur, appelé "**quadrivecteur quantité de mouvement**", et un "tenseur" antisymétrique $\breve{J}^{[\alpha,\beta]}$, le "**moment cinétique par rapport à l'origine**", qui sont des grandeurs extensives et conservées (si le système est isolé).

Ainsi, en relativité restreintes, nous avons :

$$1)\quad \begin{cases} \breve{\Pi}^{\beta}[\lambda(.)] = \dfrac{1}{c} \displaystyle\int_{\lambda(x)=0} d\sigma_{\alpha}(x)\, T^{\alpha\beta}(x) \\ \breve{\Pi} \,.\, \breve{\Pi} < 0 \qquad \breve{\Pi}^{o} := \dfrac{E}{c} > 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

$T^{\alpha\beta}(x) = j^{\alpha}_{\Pi\beta}(x)$ est appelé "<u>tenseur énergie-impulsion</u>".

Si le système est isolé $\boxed{\breve{\Pi}^{\beta}(t) = \breve{\Pi}^{\beta}(t')}$ ou, plus généralement, $\breve{\Pi}^{\beta}[\lambda(.)] = \breve{\Pi}^{\beta}[\lambda'(.)]$

soit, sous forme différentielle, $\boxed{\partial_{\alpha} T^{\alpha\beta}(x) = 0}$ (4.8)

Notation

$$\boxed{\breve{\Pi}^{\beta} = (\frac{E}{c}, \vec{\Pi})} \qquad \boxed{\breve{\Pi} \,.\, \breve{\Pi} = - \breve{M}^2 c^2 = - \frac{E^2}{c^2} + \vec{\Pi}^{\,2}} \tag{4.9}$$

et, par définition, $\breve{M}$ est un pseudo-scalaire avec $\breve{M} > 0$ dans un référentiel orthochrone.

<u>Unités</u> : $[\Pi^{\alpha}] = [M]\,[L]\,[T]^{-1}$

$[T^{\alpha\beta}] = [E]\,[L]^{-3} = [M]\,[L]^{-1}\,[T]^{-2}$

$$2)\qquad \breve{J}^{\alpha\beta}[\lambda(.)] = \frac{1}{c}\int d\sigma_{\gamma}(x)\,[x^{\alpha} T^{\gamma\beta}(x) - x^{\beta} T^{\gamma\alpha}(x)] \tag{4.10}$$

Si le système est isolé

$$\breve{J}^{\alpha\beta}(t) = \frac{1}{c}\int d^3x\,[x^{\alpha} T^{o\beta}(x) - x^{\beta} T^{o\alpha}(x)] = \breve{J}^{\alpha\beta}(t')$$

ou plus généralement $\breve{J}^{\alpha\beta}[\lambda(.)] = \breve{J}^{\alpha\beta}[\lambda'(.)]$.

Sous forme différentielle, nous avons :

$$\partial_\gamma [x^\alpha T^{\gamma\beta} - x^\beta T^{\gamma\alpha}] = 0 \tag{4.11}$$

ce qui implique :

$$0 = \delta^\alpha_\gamma T^{\gamma\beta} + x^\alpha \partial_\gamma T^{\gamma\beta} - \delta^\beta_\gamma T^{\gamma\alpha} - x^\beta \partial_\gamma T^{\gamma\alpha} = T^{\alpha\beta} - T^{\beta\alpha} .$$

En conclusion, du premier principe, il suit que tout système physique est caractérisé par un tenseur symétrique, le tenseur énergie-impulsion,

$$\boxed{T^{\alpha\beta}(x) = T^{\beta\alpha}(x)} \tag{4.12}$$

tel que $$\boxed{\partial_\alpha T^{\alpha\beta}(x) = 0}. \tag{4.13}$$

On voit immédiatement que $\breve{J}^{\alpha\beta}$ se transforme comme un tenseur pour toute transformation de Lorentz homogène. Mais pour la translation

$$x^\alpha \to x'^\alpha = x^\alpha + a^\alpha$$

on a $$\breve{J}^{\alpha\beta} \to \breve{J}'^{\alpha\beta} = \frac{1}{c} \int_{\lambda(x)=0} d\breve{\sigma}_\gamma(x) \, [(x^\alpha + a^\alpha) T^{\gamma\beta} - (x^\beta + a^\beta) T^{\gamma\alpha}]$$

$$= \breve{J}^{\alpha\beta} + a^\alpha \breve{\Pi}^\beta - a^\beta \breve{\Pi}^\alpha$$

soit $$\breve{J}'^{\alpha\beta}_{0'} = \breve{J}^{\alpha\beta}_0 + (a^\alpha \breve{\Pi}^\beta - a^\beta \breve{\Pi}^\alpha) \qquad \text{où} \qquad a^\alpha = (0'\,0)^\alpha .$$

(Ce qui correspond au théorème du transfert de la mécanique newtonnienne).

Pour avoir un concept indépendant de l'origine choisie dans R, on définit le quadrivecteur "<u>moment cinétique intrinsèque</u>", ou "<u>spin</u>"

$$\boxed{\breve{S}_\alpha = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \breve{J}^{\beta\gamma} \frac{\omega^\delta}{c}} \tag{4.14}$$

où le quadrivecteur ω^δ est défini par

$$\boxed{\breve{\Pi}^\delta = \breve{M} \omega^\delta} \tag{4.15}$$

Propriétés

- S_α est indépendant de l'origine choisie dans R
- $S_\alpha \omega^\alpha = 0$ (car $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \Pi^\gamma \Pi^\delta = 0$) (4.16)
- S_α est un quadrivecteur constant : $S_\alpha (t) = S_\alpha (t')$ si le système est isolé.

4.3.2. Définition et interprétation de : $\breve{\Pi}^\beta = (\frac{E}{c}, \vec{\Pi})$

$E(t) = \int d^3x\, T^{oo}(t, \vec{x})$ **"Energie"**

$T^{oo}(t, \vec{x}) = \rho_E(t, \vec{x})$ "densité d'énergie

$c\, T^{io}(t, \vec{x}) = j_E^i(t, \vec{x})$ "courant d'énergie"

$$\partial_\alpha T^{\alpha o} = 0 \Rightarrow \quad \boxed{\partial_t \rho_E + \operatorname{div} \vec{j}_E = 0} \tag{4.17}$$

"Equation de continuité de l'énergie"

$\Pi^i(t) = \frac{1}{c}\int d^3x\, T^{oi}(t, \vec{x})$ **"Quantité de mouvement"**

$\frac{1}{c} T^{oi}(t, \vec{x}) = \pi^i(t, \vec{x})$ "densité de quantité de mouvement"

$T^{ij}(t, \vec{x}) = j_{\Pi^j}^i(t, \vec{x})$ "courant de quantité de mouvement"

$$\partial_\alpha T^{\alpha i} = 0 \Rightarrow \quad \boxed{\partial_t \pi^i + \partial_k T^{ki} = 0}$$

"Equation de continuité de la quantité de mouvement"

De plus :

$$T^{oi} = T^{io} \Rightarrow \quad \boxed{\vec{j}_E(t, \vec{x}) \equiv c^2 \vec{\pi}(t, \vec{x})} \tag{4.18}$$

De même :

$$J^{ij}(t) = \int d^3x\,[x^i \pi^j(t,\vec{x}) - x^j \pi^i(t,\vec{x})] \tag{4.19}$$

$\Rightarrow \quad J^{ij}(t) = \varepsilon^{ijk} J_k(t)$ avec $\vec{J}(t)$ = moment cinétique

4.3.3. Signification de $J^{io}(t)$ et centre d'énergie

$$J^{io}(t) = \frac{1}{c}\int d^3x\; x^i \rho_E(t,\vec{x}) - t\int d^3x\, T^{oi}(t,\vec{x})$$

$$= \frac{1}{c}\int d^3x\, x^i \rho_E(t,\vec{x}) - ct\,\Pi^i(t) \tag{4.20}$$

Définissons alors le "centre d'énergie $\vec{z}_E$"

$$\boxed{\vec{z}_E(t) = \frac{1}{E}\int d^3x\,\rho_E(t,\vec{x})\;\vec{x}} \qquad E(t) = \int d^3x\,\rho_E(t,\vec{x}) \tag{4.21}$$

(concept correspondant à celui de "centre de masse" en mécanique newtonienne).

De (4.20) nous obtenons

$$J^{io} = E\; z_E^i(t) - ct\,\Pi^i$$

où les grandeurs J^{io}, E, Π^i sont constantes.

Ainsi

$$z_E^i(t) = \frac{cJ^{io}}{E} + t\,\frac{\Pi^i}{E}\,c^2 \tag{4.22}$$

et le **centre d'énergie a un mouvement rectiligne uniforme** (dans R^3) de vitesse $\vec{v}_E$, où

$$\boxed{\vec{v}_E = \frac{\vec{\Pi}}{E}\,c^2} \tag{4.23}$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{z}_E(t) = \vec{z}_E(o) + \vec{v}_E t, \qquad z_E^i(o) = \frac{cJ^{io}}{E} \tag{4.24}$$

Exprimons ce résultat en adoptant la forme 4-dimensionnelle : soit $z_E^\alpha(\tau) = (t(\tau), \vec{z}(\tau))$ l'évolution du centre d'énergie paramétrisée par son temps propre

$$d\tau^2 = dt^2 (1 - \vec{v}^{\,2}/c^2)$$

et $$\omega_E^\alpha(\tau) = \frac{dz_E^\alpha}{d\tau} \quad \text{le 4-vecteur vitesse (du centre d'énergie),} \tag{4.25}$$

$$d\tau = \operatorname{sign}\omega_E^o \, dt \sqrt{1 - \vec{v}_E^{\,2}/c^2} \tag{4.26}$$

$$\begin{cases} \omega_E^o = \pm \dfrac{c}{\sqrt{1 - \vec{v}_E^{\,2}/c^2}} = \pm \dfrac{E\,c}{\sqrt{E^2 - \vec{\Pi}^2 c^2}} = \dfrac{E}{\breve{M}c} \\ \vec{\omega}_E = \dfrac{\omega^o}{c} \vec{v}_E = \dfrac{\vec{\Pi}}{\breve{M}} \end{cases} \tag{4.27}$$

En conclusion

$$\boxed{\breve{\Pi}^\alpha = \breve{M}\,\omega_E^\alpha} \quad , \quad \boxed{\omega_E \cdot \omega_E = -c^2} \tag{4.28}$$

$$\breve{M} c^2 = \left(\operatorname{sign} \omega_E^\alpha\right) \sqrt{\vec{E}^2 - \vec{\Pi}^2} \tag{4.29}$$

et le 4-vecteur ω^α introduit dans la définition du "spin" (4.15) s'identifie avec la vitesse du centre d'énergie ω_E^α.

4.3.4. Référentiel du centre d'énergie R^*

Par définition, c'est le référentiel en translation de vitesse $\vec{v}_E$ par rapport auquel le centre d'énergie est fixé à l'origine : $\vec{z}^{\,*}_E(t^*) = 0$ pour tout t^*, $\left(\omega_E^{*o} = +1, \; \omega_E^{*i} = 0\right)$

$$(4.24) \Rightarrow \begin{cases} \Pi^* := (Mc, \vec{0})\,; & J^{*0\alpha} = -J^{*\alpha 0} := 0 \\ J^{*ij} = \varepsilon^{ijk} S^*_k\,; \quad S^*_0 = 0\,; & \vec{v}_{R^*)R} = \vec{v}_E \end{cases} \qquad (4.30)$$

Cherchons pour terminer l'évolution par rapport à R, <u>mais</u> en prenant l'origine dans R telle que O $\equiv$ O* à l'instant t = 0.

$$\Rightarrow \qquad x^\alpha = \Lambda(-\vec{v})^\alpha{}_\beta\, x^{*\beta}$$

$$(E, c\Pi^i) = \text{sign}\,\Lambda^0{}_0\,(\Lambda^0{}_0 E^*, \Lambda^i{}_0 E^*) \qquad \text{où } E^* = Mc^2$$

$$\text{c. .d.} \quad \begin{cases} E = \gamma\, E^* = \gamma\, Mc^2 \\ \vec{\Pi} = \gamma\, E^* \dfrac{\vec{v}}{c^2} = \gamma\, M\, \vec{v} \end{cases} \qquad \gamma = \left(1 - \frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2}\right)^{-1/2} = \Lambda^0{}_0 \qquad (4.31)$$

(Equations analogues au théorème de König non relativiste $E = E^* + \frac{1}{2}\, M\, \vec{v}_G^{\,2}\ ;\ \vec{p} = M\vec{v}_G$).

De même :

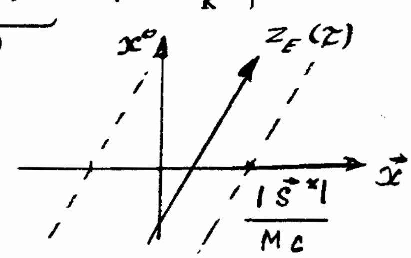
$$J^{i0} \overset{(4.30)}{=} (\text{sign}\,\Lambda^0{}_0)\, \Lambda^i{}_\alpha\, \Lambda^0{}_\beta\, J^{*\alpha\beta}$$

$$= (\text{sign}\,\Lambda^0{}_0)\, \Lambda^0{}_j\, \Lambda^i{}_k\, J^{*kj}$$

$$= (\text{sign}\,\Lambda^0{}_0)\, \Lambda^0{}_j\, [J^{*ij} + (\gamma - 1)\, \frac{v^i v_k}{\vec{v}^2/c^2}\, J^{*kj}]$$

$$= \gamma \frac{v_j}{c}\, J^{*ij} + (\gamma - 1)\, \gamma\, \frac{1}{\vec{v}^{\,2}/c^2}\, v^i\, \underbrace{v_k\, v_j\, J^{*kj}}_{=0} = \gamma\, \varepsilon^{ijk} S^*_k\, v_j/c$$

d'où $\boxed{\vec{z}_E(t) = \dfrac{\vec{v} \wedge \vec{S}^*}{Mc^2} + t\, \vec{v}_E}$



(4.32)

$\vec{S}^*$ est le "spin" dans le référentiel du centre d'énergie $\left(S^*_0 = 0\right)$
$\vec{v}_E$ = vitesse du centre d'énergie par rapport à R.

4..4. Deuxième principe de la thermodynamique

Il existe une grandeur scalaire, extensive, l'entropie $\breve{S}$, (positive dans un référentiel orthochrone) qui, pour un système isolé, augmente au cours du temps relativement à tout observateur :

$$\boxed{\breve{S}\ [\lambda(.)] = \frac{1}{c} \int_{\lambda(x)=0} d\breve{\sigma}_\alpha\ j_S^\alpha(x)} \tag{4.33}$$

Si le système est isolé

$\breve{S}\ [\lambda''(.)] \geq \breve{S}\ [\lambda'(.)]$ pour toute hypersurface $\lambda''(x) = 0$ postérieure à $\lambda'(x) = 0$

en particulier
$$\boxed{\breve{S}(t) = \frac{1}{c} \int d^3x\ j_S^0(t, \vec{x}) \geq \breve{S}(t_0) \quad \forall\ t \geq t_0} \tag{4.34}$$

Sous forme différentielle

$$\boxed{\partial_\alpha j_S^\alpha(x) = i(x) \geq 0} \tag{4.35}$$

$j_S^\alpha(x)$ est le "courant d'entropie"

$i(x)$ est la "densité de production d'entropie"

Pour tout domaine Λ fixé dans R^3,

$$\breve{S}_\Lambda(t) := \frac{1}{c} \int_\Lambda d^3x\ j_S^0(t, x) \tag{4.36}$$

et
$$\frac{d}{dt} S_\Lambda(t) = - \int_{\partial\Lambda} d\sigma_k\ j_S^k(t, \vec{x}) + \underbrace{\int_\Lambda d^3x\ i(t, \vec{x})}_{\geq 0} \tag{4.37}$$

CHAPITRE V : SYSTEMES DE PARTICULES

5.1. Cinématique du point matériel

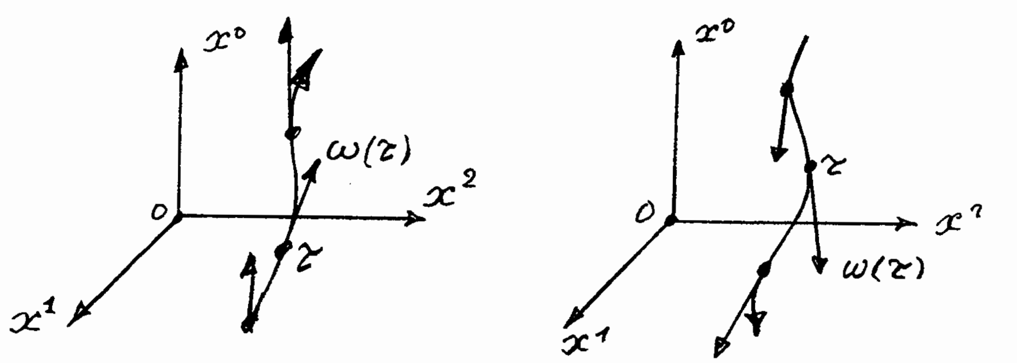
Soit $\vec{x} = \vec{x}\,(t)$ la ligne d'Univers du point P par rapport au référentiel d'inertie R et $x = x\,(\tau)$ l'équation paramétrique de cette ligne, paramétrisée par le temps propre τ du point P :

$$d\tau^2 = dt^2\,(1 - \vec{v}^2/c^2) \quad ; \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}\ . \tag{5.1}$$

Par définition, le référentiel R (= système de coordonnées) est

"<u>orthochrone</u>" si $\dfrac{dt}{d\tau} = +\,(1 - \vec{v}^2/c^2)^{-1/2} > 0$

"<u>pseudochrone</u>" si $\dfrac{dt}{d\tau} = -\,(1 - \vec{v}^2/c^2)^{-1/2} < 0$



Référentiel : orthochrone pseudochrone

Fig. 5.1

Introduisons les 4-vecteurs <u>vitesse ω</u> et <u>accélération a</u> du point P :

$$\boxed{\omega^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}} \qquad \text{soit} \qquad \left\{ \begin{aligned} \omega^0 &= c\,\frac{dt}{d\tau} = \pm \frac{c}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} \\ \vec{\omega} &= \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \omega^0\,\vec{v}/c \end{aligned} \right. \tag{5.2}$$

$$\boxed{a^\alpha = \frac{d\omega^\alpha}{d\tau} \equiv \dot{\omega}^{\,\alpha}}$$

Nous avons ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{l}\omega\cdot\omega=-c^2\\ \omega\cdot a\ =\ 0\end{array}} \tag{5.3}$$

En effet : $\omega\cdot\omega=-\omega^{o2}+\vec{\omega}^2=-\omega^{o2}\,(1-\vec{v}^2/c^2)\overset{(5.2)}{=}-c^2$

d'où $\quad \omega\cdot\dot{\omega}=0$.

A tout instant τ on introduit le "**référentiel de repos** $R^*(\tau)$" de la particule : c'est le référentiel d'<u>inertie</u> défini par le repère $e^*_\alpha\ (\tau)$ en **translation avec la particule**, c.à.d. $\quad R^*(\tau)\to R^*(\tau+\delta\tau)\quad$ est un boost

$$\text{et}\qquad \omega(\tau)\overset{*}{=}(c,\vec{0})\qquad\text{soit}\qquad e^*_o(\tau)\ =\ \omega\,(\tau)/c \tag{5.4}$$

(où $\overset{*}{=}$ signifie "composante de ω par rapport à R^*").

Les équations (5.3) et (5.4) impliquent :

$$a\ \overset{*}{=}\ (0,\vec{a}^*)\qquad\text{où}\quad \vec{a}^*=\frac{d\vec{v}^*}{dt^*} \tag{5.5}$$

En effet $\qquad \vec{a}^*=\dfrac{d\vec{\omega}^*}{dt^*}\cdot\dfrac{dt^*}{d\tau}\ =\ \dfrac{\omega^{*o}}{c}\ \dfrac{d}{dt^*}\left(\dfrac{\omega^{*o}}{c}\ \vec{v}^*\right)$

$$\Rightarrow\qquad \vec{a}^*=\frac{d\vec{v}^*}{dt^*}\qquad [\text{car } \vec{v}^*=0] \tag{5.6}$$

Remarques :

1) Par rapport à $R^*(\tau)$, $\dfrac{\omega^{*o}}{c}=\dfrac{dt^*}{d\tau}\ =1$ à l'instant τ : le temps propre est le temps mesuré par rapport au référentiel de repos de la particule.

2) Le changement de référentiel $\ R^*(\tau)\to\ R^*(\tau+\delta\tau)=R'\ $ est défini par :

$$x'\ =\Lambda\,(\delta\vec{v}^{\,*})\,x^*\qquad\text{si}\qquad \omega^o(0)>0$$

$$\delta\vec{v}^{\,*}\ =\ \vec{v}_{R')R^*}$$

et l'on a pour les vecteurs de base

$$e^*_\alpha(\tau+\delta\tau) = e'_\alpha \;=\; \left(\Lambda^{-1}\right)^\beta{}_\alpha \; e^*_\beta$$

$$\begin{cases} e'_0 \;=\; e^*_o \;+\; \dfrac{1}{c}\,\delta v^{*j}\; e^*_j \\[2ex] e'_i \;=\; e^*_i \;+\; \dfrac{1}{c}\,\delta v^{*i}\; e^*_o \end{cases} \tag{5.7}$$

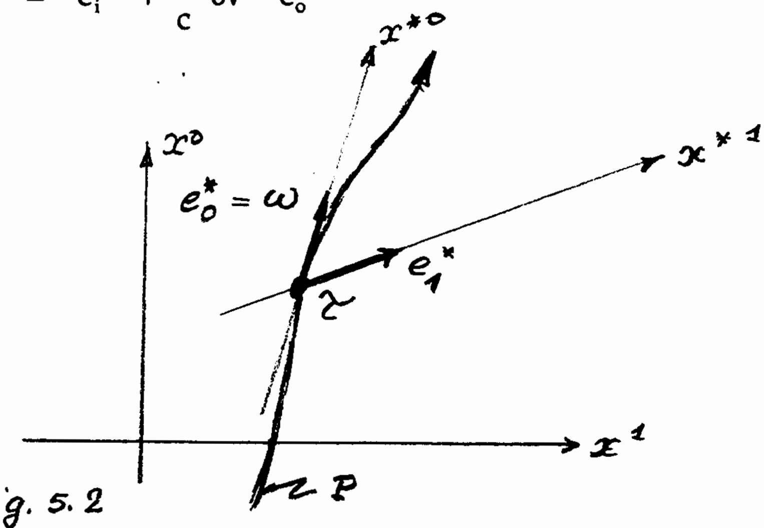


Fig. 5.2

Le "<u>spin</u>" de la particule est un 4-vecteur S_α qui caractérise une propriété intrinsèque de la particule, associée au moment cinétique. C'est un vecteur pseudochrone, constant en norme, qui est purement spatial relativement au référentiel de repos :

$$\begin{aligned} &1)\quad S_\alpha \cdot S^\alpha = \text{cte} && \left(\geq 0 \;\; ; \;\; \text{p.e.} \;\; \frac{\hbar^2}{4}\; s\,(s+1)\right) \\ &2)\quad S_\alpha \cdot \omega^\alpha = 0 && [\text{car} \quad S_\alpha \cdot \omega^\alpha \overset{*}{=} 0] \end{aligned} \tag{5.8}$$

5.2. Particule libre

Une particule ponctuelle est caractérisée par deux grandeurs physiques, sa masse m et son spin s. Si la particule n'est soumise à aucune force, son évolution par rapport au référentiel d'inertie R est donnée par le principe d'inertie ("principe de la relativité")

$$\boxed{\frac{d\omega^\alpha}{d\tau} = 0} \qquad\qquad \boxed{\frac{dS_\alpha}{d\tau} = 0} \tag{5.9}$$

Les grandeurs conservées introduites dans le premier principe sont alors :

. le 4-vecteur quantité de mouvement

$$\boxed{\breve{p}^\alpha = \breve{m}\ \omega^\alpha} \qquad \breve{m} = (\text{sign}\ \omega^o)\ m \quad , \quad m \geq 0\ , \tag{5.10}$$

où m est la masse de la particule (≡ masse de repos).

. le moment cinétique

$$J^{\alpha\beta} = x^\alpha p^\beta - x^\beta p^\alpha + \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} S_\gamma \tag{5.11}$$

On a ainsi de (5.3)

$$\boxed{p_\alpha p^\alpha = -m^2c^2} \tag{5.12}$$

et l'on introduit la notation

$$\breve{p}^\alpha = (\breve{m}\ \omega^o,\ \breve{m}\ \omega^o \frac{\vec{v}}{c}) \equiv \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \qquad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} \tag{5.13}$$

(rappel : $\vec{v}/c = \vec{\omega}/\omega^o$)

La masse $\breve{m}$ est un scalaire pseudochrone, et par conséquent $E = \omega^0 \breve{m} c = \gamma m c^2$ est positif. On notera également que relativement à R^* :

$$p \stackrel{*}{=} \left(\frac{E^*}{c}, \vec{0}\right) \qquad \text{avec} \qquad E^* = m\,c^2 \tag{5.14}$$

5.3. Dynamique de la particule sans spin

Nous voulons établir l'équation de mouvement d'une particule soumise à une force extérieure. [p.r. à un référentiel orthochrone]. Dans toute cette 2ème partie du cours (Relativité Restreinte) les forces en question ne sont pas d'origine gravifique. L'étude des forces gravifiques sera abordé en Relativité Générale (3ème partie).

1ère méthode : [Approche tridimensionnelle : "Mécanique Générale, p. 535].

Par rapport à $R^*(\tau)$

$$\vec{v}^*(t^*) = 0 \text{ et } |\vec{v}(t^* + \delta t^*)| \ll c \qquad \text{si } |\delta t^*| \ll 1.$$

On peut ainsi admettre que dans $R^*(\tau)$ la mécanique newtonienne est valable pendant un petit intervalle de temps :

$$\text{soit} \qquad m \frac{d^2\vec{x}^*}{dt^{*2}} = \vec{F}^*(\vec{x}^*, t^*)$$

En utilisant alors les formules de la transformation de Lorentz, on obtient :

$$\boxed{\frac{d}{dt}[\gamma m \vec{v}(t)] = \vec{F}(\vec{x}, t)}$$

où $\gamma = (1 - \vec{v}^2/c^2)^{-1/2}$

et $$\vec{F} = \gamma^{-1}\vec{F}^* + (1-\gamma^{-1}) \frac{\vec{F}^* \cdot \vec{v}}{\vec{v}^2} \vec{v}$$

Cette approche hybride entre la mécanique newtonienne et la mécanique relativiste est à éviter.

2ème méthode : [Approche quadridimensionnelle]

L'évolution de la particule est définie par l'équation du mouvement :

$$\boxed{m \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = f^\alpha} \qquad \text{c.à.d} \qquad \begin{cases} \boxed{\dfrac{d}{d\tau} x^\alpha = \dfrac{p^\alpha}{m}} \\ \\ \boxed{\dfrac{d}{d\tau} p^\alpha = f^\alpha} \end{cases} \qquad (5.15)$$

où f^α est le 4-vecteur force et m la masse de la particule.

Pour déterminer f^α, considérons le référentiel de repos $R^*(\tau)$:

$$a(\tau) \overset{*}{=} (0, \vec{a}^*(\tau)) \Rightarrow f \overset{*}{=} (0, \vec{F}^*)$$

et (5.15) devient :

$$m \frac{d\vec{v}^*}{dt^*} = \vec{F}^*$$

Par rapport à R, nous obtenons :

$$f^\alpha = \Lambda(-\vec{v})^\alpha{}_\beta \; F^{*\beta}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} f^0 &= \gamma \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{F}^* \\ \vec{f} &= \vec{F}^* + (\gamma - 1) \frac{\vec{v} \cdot \vec{F}^*}{\vec{v}^2} \vec{v} \end{aligned}} \qquad (5.16)$$

En conclusion, connaissant $\vec{F}^*$, la force mesurée dans le référentiel de repos, on trouvera f^α puis l'évolution de la particule en intégrant l'équation du mouvement avec les conditions initiales $\{x^\alpha(\tau_0), \omega^\alpha(\tau_0)\}$.

Remarques :

1) $f \cdot \omega = 0$ $\qquad$ [car $f \cdot \omega \overset{*}{=} 0$] $\qquad$ (5.17)

2) En imposant la condition $\omega \cdot \omega = -c^2$ à l'instant initial τ_0, alors cette condition sera satisfaite pour tout τ. En effet, (5.15) et (5.17) impliquent :

$$m\,\dot{\omega} \cdot \omega = f \cdot \omega = 0 \Rightarrow \omega \cdot \omega = \text{cte.}$$

3) De (5.16) : $\dfrac{d}{d\tau} p^0 = \gamma \dfrac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{F}^*$

d'où $\boxed{\dfrac{dE}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F}^*}$ $\qquad$ et $\qquad$ $E \overset{*}{=} mc^2$ $\qquad$ (5.18)

Mais $\dfrac{dE^{cin}}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F}^{\,*}$ et $E^{cin} \overset{*}{=} 0$

d'où $\boxed{E = mc^2 + E^{cin}}$ (5.19)

4) Relativement à un référentiel d'inertie quelconque :

$$\frac{d\breve{p}^{\alpha}}{d\tau} = (\text{sign } \omega^{o})\ f^{\alpha}$$

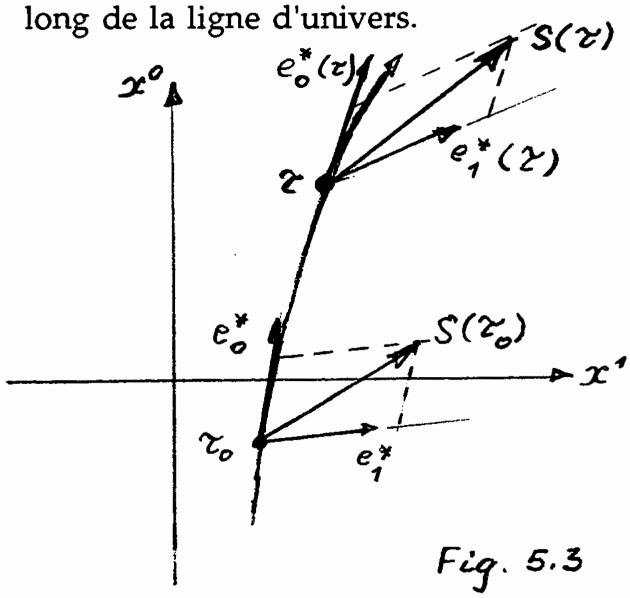
soit : $\boxed{m\,\dfrac{d\omega^{\alpha}}{d\tau} = f^{\alpha}}$ (5.20)

5) Les équations (5.15) et (5.16) impliquent (5.14). En effet, $\dfrac{d}{d\tau}\left(m\,\dfrac{d\vec{x}}{d\tau}\right) = \vec{f}$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\,(m\,\gamma\,\vec{v}) = \gamma^{1}\,\vec{f} \qquad \text{soit} \qquad \frac{d}{dt}\,(m\,\gamma\,\vec{v}) = \vec{F}\,.$$

5.4. Transport de Fermi-Walker et évolution du spin

Considérons l'évolution d'une particule avec spin (ou d'un gyroscope) soumise à des forces uniquement. Comme il n'y a aucun couple agissant sur le spin, celui-ci restera immobile relativement au référentiel de repos $R^*(\tau)$, en "translation" le long de la ligne d'univers.



$$e_o^*(\tau) \equiv \omega(\tau)/c$$
$$e_\alpha^*(\tau) \cdot e_\beta^*(\tau) = \eta_{\alpha\beta}$$

Fig. 5.3

De (5.7), les vecteurs de base $e^*_\alpha(\tau)$ de $R^*(\tau)$ sont solutions des équations différentielles

$$\begin{cases} \dfrac{de^*_0}{d\tau} = \dot{\omega}/c \\ \dfrac{de^*_i}{d\tau} = (\dot{\omega}\cdot e^*_i)\,\omega/c^2 \end{cases} \tag{5.21}$$

car $e^*_o(\tau) \equiv \omega\,(\tau)/c$ et de l'équation (5.7)

$$\frac{de^*_i}{d\tau} = \frac{1}{c}\,\frac{\delta v^{*i}}{\delta\tau}\,e^*_o = \frac{1}{c}\,\frac{\delta\omega^{*i}}{\delta\tau}\,e^*_o = (\frac{1}{c}\,\frac{\delta\omega^*}{\delta\tau}\,.\,e^*_i)\,e^*_o = \frac{1}{c}\,(\dot{\omega}\,.\,e^*_i)\,e^*_o$$

Ainsi, pour tout vecteur S immobile relativement à R^*, nous avons :

$$S = S^{*o}\,e^*_o + S^{*i}\,e^*_i \qquad\qquad S^{*\alpha} = cte$$

et
$$\frac{dS}{d\tau} = S^{*o}\,\dot{\omega}/c + S^{*i}\,(\dot{\omega}\cdot e^*_i)\,\omega/c^2$$
$$= [-(S\cdot\omega)\,\dot{\omega} + (\dot{\omega}\cdot S)\,\omega]\,/\,c^2$$

[car : $\dot{\omega}\cdot\omega/c = \dot{\omega}\cdot e^*_o = 0$ et $S^{*o} = -S\cdot e^*_o = -S\cdot\omega/c$].

En conclusion, l'équation différentielle

$$\boxed{\frac{dS}{d\tau} = [(\dot{\omega}\cdot S)\,\omega - (\omega\cdot S)\,\dot{\omega}]\,/c^2} \tag{5.22}$$

soit
$$\begin{cases} \dfrac{dS^\alpha}{d\tau} = [(\omega^\alpha\,\dot{\omega}^\beta - \omega^\beta\,\dot{\omega}^\alpha)\,S_\beta]\,/c^2 \\ S^\alpha(\tau_o) = S^\alpha \end{cases}$$

définit l'évolution d'un vecteur constant par rapport au référentiel de repos : c'est ce que l'on appelle "transport de Fermi-Walker" du vecteur S le long de la ligne d'univers $x(\tau)$.

Dans le cas du spin, nous avons de plus $S \cdot \omega = 0$ et (5.15), (5.22) donnent ainsi les équations du mouvement de la particule avec spin [ou du gyroscope] en absence de couple.

$$\boxed{\frac{d\omega^\alpha}{d\tau} = \frac{f^\alpha}{m}} \qquad\qquad \omega^\alpha \omega_\alpha = -c^2; \quad \omega \cdot \dot{\omega} = 0$$

$$\omega^\alpha S_\alpha = 0$$

$$\boxed{\frac{dS^\alpha}{d\tau} = \frac{1}{m}(f \cdot S)\ \omega^\alpha/c^2} \qquad\qquad S_\alpha S^\alpha = \text{cte}\,; \quad S \cdot \dot{S} = 0 \tag{5.23}$$

$$S_\alpha S^\alpha \geq 0$$

On remarquera que ces équations conduisent à une précession du spin en l'absence de couple extérieure, appelée "précession de Thomas"*). [cf. problème].

5.5. Relation énergie-vitesse-quantité de mouvement

Rappel : $$\boxed{c\,p^o = \gamma\, m\, c^2 \equiv E = E^{cin} + m\ c^2} \tag{5.24}$$

Relations

1) $$\boxed{E(\vec{v}\,) = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}}} \qquad\qquad \boxed{\vec{p}\,(\vec{v}) = \frac{E}{c^2}\,\vec{v}} \tag{5.25}$$

Pour $|\vec{v}| << c$ $$\begin{cases} E(\vec{v}) = m\,c^2 + \frac{1}{2}\,m\,\vec{v}^2 + 0\left(\frac{v^4}{c^4}\right) \\ \\ \vec{p}\,(\vec{v}) = m\,\vec{v} + 0\left(\frac{v^3}{c^3}\right) \end{cases}$$

2) $$p \cdot p = -m^2 c^2 \Rightarrow \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} = m^2 c^2$$

soit : $$\boxed{E\,(\vec{p}\,) = \sqrt{\vec{p}^{\,2}\, c^2 + m^2\, c^4}} \tag{5.26}$$

---

* L.H. Thomas, Philosophical Magazine (7), 3, 1 (1927)
Taylor/Wheeler, Space Time Physics, 1966, (p. 169)

3) De (5.26), il suit que

$$m = 0 \leftrightarrow E(\vec{p}) = |\vec{p}|\, c \overset{(5.25)}{\leftrightarrow} \quad |\vec{v}| = c$$

d'où $$\boxed{m = 0 \leftrightarrow |\vec{v}| = c} \tag{5.27}$$

La vitesse d'une particule est égale à la vitesse de la lumière si et seulement si sa masse est nulle.

5.6. Systèmes de points matériels (sans spins)

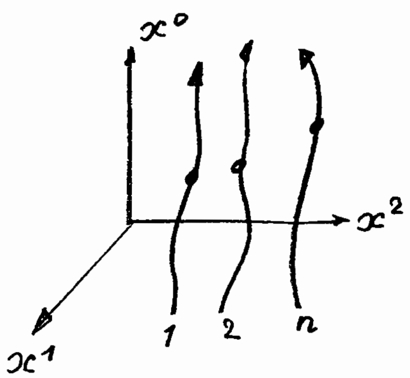


Fig. 5.4

Considérons un ensemble de points matériels d'évolution : $x_n^\alpha = x_n^\alpha(t)$, $x_n^0(t) = ct$, $n = 1, 2, ...$

$$\omega_n^\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{v}_n^{\,2}(t)/c^2}}\, v_n^\alpha(t)\,; \quad v_n^0(t) = c$$

relativement à un référentiel orthochrone.

$$p_n^\alpha(t) = m_n\, \omega_n^\alpha(t)$$

Quantité de mouvement $$\boxed{\Pi_{mat}^{\ \alpha}(t) := \sum_n p_n^\alpha(t)} \tag{5.28}$$

Le **tenseur énergie-impulsion** du système est défini par :

$$\boxed{T_{mat}^{\alpha\beta}(t, \vec{x}) := \sum_n p_n^\alpha(t)\, v_n^\beta(t)\, \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t))} \tag{5.29}$$

ce que l'on peut également écrire sous la forme

$$T_{mat}^{\alpha\beta}(t, \vec{x}) = \sum_n m_n\, \omega_n^\alpha(t)\, \omega_n^\beta(t)\, \frac{c}{\omega_n^0(t)}\, \delta^3\!\left(\vec{x} - \vec{x}_n(t)\right). \tag{5.30}$$

C'est un <u>tenseur symétrique</u>, comme on le voit en écrivant (5.29) sous la forme :

$$\boxed{T^{\alpha\beta}_{mat}(t,\vec{x}) = \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} c\, d\tau \;\; m_n\, \omega^{\alpha}_n(\tau)\;\; \omega^{\beta}_n(\tau)\;\; \delta^4(x - x_n(\tau))} \tag{5.31}$$

En effet

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, \delta^4(x - x_n(\tau))\, f(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, \delta(x^o - x^o_n(\tau))\;\; \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(\tau))\;\; f(\tau)$$

$$= \frac{1}{\left|\frac{dx^o_n}{d\tau}(t)\right|}\;\; f(t)\;\; \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) = \frac{1}{|\omega^o_n(t)|}\;\; f(t)\;\; \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \tag{5.32}$$

(On remarquera également que $\delta^4(x - x_n(\tau))$ est pseudo-scalaire, de type densité).

De plus :

$$\left\{\begin{array}{l} \Pi^o_{mat}(t) = \sum\limits_n m_n \omega^o_n(t) \;\equiv\; \frac{1}{c}\int d^3x\;\, T^{oo}_{mat}(t,\vec{x}) \;\equiv\; \frac{1}{c}\, E_{mat}(t) \;\equiv\; \dfrac{Mc}{\sqrt{1-\vec{v}_E^{\,2}/c^2}} \\[2ex] \Pi^i_{mat}(t) = \sum\limits_n m_n \omega^i_n(t) \;\equiv\; \frac{1}{c}\int d^3x\;\, T^{oi}_{mat}(t,\vec{x}) \;\equiv\; \dfrac{Mv^i_{CE}}{\sqrt{1-\vec{v}_E^{\,2}/c^2}} \end{array}\right. \tag{5.33}$$

où $\vec{v}_E$ est la vitesse du centre d'énergie (4.23) .

Rappel: $\Pi_{mat} \cdot \Pi_{mat} = -M^2c^2$

$\vec{v}_E / c = \vec{\Pi}_{mat} / \Pi^0_{mat}$

Equation de conservation

$$\partial_i\, T^{\beta i}_{mat} = \sum_n\; p^{\beta}_n(t)\, \frac{dx^i_n(t)}{dt}\; \frac{\partial}{\partial x^i}\;\; [\delta(\vec{x} - \vec{x}_n(t))] = \sum_n\; p^{\beta}_n(t)\, \frac{dx^i_n(t)}{dt}\;\; [-\frac{\partial}{\partial x^i_n}\;\; \delta(\vec{x} - \vec{x}_n(t))]$$

$$= - \sum_n p_n^\beta(t) \frac{d}{dt} [\delta(\vec{x} - \vec{x}_n(t))]$$

$$= - \frac{\partial}{\partial t} [\sum_n p_n^\beta(t) \; \delta(\vec{x} - \vec{x}_n(t))] + \sum_n [\frac{d}{dt} p_n^\beta(t)] \, \delta(\vec{x} - \vec{x}_n(t))$$

$$= - \partial_o [\sum_n p_n^\beta(t) \; c \, \delta(\vec{x} - \vec{x}_n(t))] + \sum_n \frac{c}{\omega_n^o(t)} f_n^\beta(t) \; \delta(\vec{x} - \vec{x}_n(t))$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\partial_\alpha T_{mat}^{\alpha\beta}(x) = G^\beta(x)} \tag{5.34}$$

où $\quad G^\beta(x) = \sum_n \frac{f_n^\beta(t)}{\omega_n^o(t)/c} \quad \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t))$

$$= \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} c \, d\tau \; f_n^\beta(\tau) \; \delta^4(x_n - x_n(\tau)) = \text{"\underline{densité de force}"}$$

Dans le cas de particules libres, ou effectuant des collisions ponctuelles, on a :

$$\sum_k \frac{d}{dt} p_k^\beta(t) = 0$$

où la somme s'effectue sur les particules qui font la collision, et par conséquent :

$$G^\beta(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\partial_\alpha T_{mat}^{\alpha\beta} = 0} \tag{5.35}$$

Remarque

En tout point x où il n'y a pas de collision, c'est à dire qu'il y a 0 ou 1 particule, on peut définir :

$$m(x) = \sum_n m_n \frac{1}{\omega_n^o(t)} \quad \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) = \sum_n m_n \int_{-\infty}^{+\infty} c \, d\tau \quad \delta^4(x_n - x_n(\tau))$$

et $\quad T_{mat}^{\alpha\beta}(x) = m(x) \; \omega^\alpha(x) \; \omega^\beta(x) \qquad (5.36)$

où $\quad \omega^\alpha(t, \vec{x}_n(t)) = \omega_n^\alpha(t).$

CHAPITRE VI : ELECTRODYNAMIQUE

6.1. Equations de Maxwell : Formulation quadridimensionnelle

Dans le système d'unités CGS-rationalisé, les équations de Maxwell s'écrivent :

Equations inhomogènes :

I) $\operatorname{div} \vec{D} = q$ $\qquad \vec{D} = (D^1, D^2, D^3)$

II) $\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c}\,\partial_t \vec{D} = \frac{1}{c}\,\vec{j}$ $\qquad \vec{H} = (H_1 = H^{23}, H_2 = H^{31}, H_3 = H^{12})$

$\vec{j} = (j^1, j^2, j^3)$

Equations homogènes :

III) $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ $\qquad \vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$

IV) $\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c}\,\partial_t \vec{B} = 0$ $\qquad \vec{B} = (B^1 = B_{23}, B^2 = B_{31}, B^3 = B_{12})$

Conservation de la charge

V) $\partial_t q + \operatorname{div} \vec{j} = 0$

Remarquons que (V) est une conséquence de (I) et (II).

Introduisons alors les concepts suivants :

- Quadrivecteur "densité de courant électrique"

$$\boxed{j^\alpha(x) := (c\,q(x), \vec{j}(x))} \tag{6.1}$$

L'équation (V) de conservation de la charge s'écrit ainsi :

$$\boxed{\partial_\alpha j^\alpha = 0}$$

c'est à dire que $j^\alpha(x)$ est le courant associé à la grandeur extensive, conservée (pseudochrone), "charge électrique"

$$\breve{Q}(t) = \frac{1}{c}\int d^3x\; j^0(t, \vec{x}) = \breve{Q}(t') \tag{6.2}$$

- Tenseur électromagnétique $H^{[\alpha\beta]}$, associé aux champs D^i et H^{ij}

$$\boxed{H^{oi} = - H^{io} = D^i} \qquad H^{[\alpha\beta]} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & D^1 & D^2 & D^3 \\ \hline -D^1 & & & \\ -D^2 & & H^{ij} & \\ -D^3 & & & \end{array}\right) \tag{6.3}$$

- Tenseur d'induction $B_{[\alpha\beta]}$, associé aux champs E_i et B_{ij}

$$\boxed{B_{io} = - B_{oi} = E_i} \qquad B_{[\alpha\beta]} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ \hline E^1 & & & \\ E^2 & & B_{ij} & \\ E^3 & & & \end{array}\right)$$

Avec cette notation, les équations de Maxwell inhomogènes deviennent :

$$\boxed{\partial_\alpha H^{\alpha\beta} = -\frac{1}{c}\, j^\beta} \tag{6.4}$$

et les équations de Maxwell homogènes :

$$\partial_\alpha\, B_{\beta\gamma} + \partial_\beta\, B_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma\, B_{\alpha\beta} = 0$$

ce que l'on écrit :

$$\boxed{{}_{\alpha\beta\gamma}\ \partial_\alpha\, B_{\beta\gamma} = 0} \tag{6.5}$$

ou encore $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\, \partial_\beta\, B_{\gamma\delta} = 0$.

- Dans le <u>vide</u>, et relativement à tout référentiel d'inertie,

$$E_i = D^i \text{ et} \qquad\qquad B_{ij} = H^{ij}$$

c'est à dire $H^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\alpha'}\, \eta^{\beta\beta'}\, B_{\alpha'\beta'} = B^{\alpha\beta}$.

On a pris l'habitude d'écrire $F^{[\alpha\beta]} = H^{\alpha\beta} = B^{\alpha\beta}$ pour le tenseur électromagnétique dans le vide, et les <u>équations de Maxwell dans le vide</u> s'expriment sous la forme :

$$\boxed{\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -\frac{1}{c}\, j^\beta} \tag{6.6}$$

$$\boxed{\underset{\alpha\beta\gamma}{\circlearrowright}\ \partial_\alpha F_{\beta\gamma} = 0} \tag{6.7}$$

$$\boxed{\partial_\alpha j^\alpha = 0} \tag{6.8}$$

L'équation (6.7) implique qu'il existe un 4-vecteurs :

$$A_\alpha(x) = (-\phi(x)\,,\ \vec{A}(x))$$

appelé "<u>potentiel-vecteur</u>", tel que

$$\boxed{F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha} \tag{6.9}$$

Il n'est défini qu'à une transformation de jauge près, c'est-à-dire que $A_\alpha(x)$ et $\overline{A}_\alpha(x) = A_\alpha(x) + \partial_\alpha \varphi(x)$ (où $\varphi(x)$ est une fonction scalaire, arbitraire, dérivable), définissent le même tenseur électromagnétique.

On peut choisir A_α de manière telle que :

$$\boxed{\partial^\alpha A_\alpha = 0} \qquad \text{\underline{Jauge de Lorentz}} \tag{6.10}$$

et, avec cette jauge, les équations de Maxwell (inhomogènes) deviennent

$$\boxed{\Box\, A_\alpha = -\frac{1}{c}\, j_\alpha} \tag{6.11}$$

- Finalement la <u>force électromagnétique</u> sur une particule chargée, de charge e, s'exprime par :

$$\boxed{f^{\alpha}_{\text{é.m}} := \frac{e}{c}\, F^\alpha{}_\beta\, \omega^\beta} \tag{6.12}$$

ce qui donne l'équation de mouvement de la particule chargée dans un champ électromagnétique (en négligeant l'effet de rayonnement)

$$\boxed{m \frac{d\omega^\alpha}{d\tau} = \frac{e}{c} F^\alpha{}_\beta \, \omega^\beta} \tag{6.13}$$

(En effet, on vérifie aisément que (6.13) implique

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = e(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \wedge \overset{\curvearrowright}{B})$$

avec $\vec{p} = \breve{m} \, \vec{\omega} = \dfrac{m}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} \vec{v}$; $[\breve{m} = (\text{sign}\, \omega^o)\, m]$.

- Dans le cas d'un <u>système de particules chargées</u>, le courant électrique $j^\alpha(x)$ est donné par :

$$\boxed{j^\alpha (t, \vec{x}) = \sum_n \breve{e}_n \, v_n^\alpha(t) \;\; \delta^3 (\vec{x} - \vec{x}_n(t))} \qquad \breve{e}_n = e_n \;\; \text{sign}\, \omega_n^o \tag{6.14}$$

ce qui s'écrit sous la forme

$$j^\alpha (t, \vec{x}) = \sum_n e_n \int c \, d\tau \, \omega_n^\alpha (\tau) \;\; \delta^4 (x - x_n (\tau))$$

et montre que $j^\alpha(x)$ est un 4-vecteur (de type densité).

L'équation de continuité est satisfaite; en effet :

$$\partial_i \, j^i (t, \vec{x}) = - \sum_n e_n \, v_n^i (t) \frac{\partial}{\partial x_n^i} \;\; \delta (\vec{x} - \vec{x}_n(t))$$

$$= - \sum_n e_n \frac{\partial}{\partial t} \;\; [\delta (\vec{x} - \vec{x}_n(t))]$$

$$= - \partial_o \, [\sum_n e_n \, c \, \delta (\vec{x} - \vec{x}_n(t))] \qquad = \; - \partial_o \, j^o$$

$$\Rightarrow \qquad \partial_\alpha \; j^\alpha (x) = 0$$

De plus : $\breve{Q} (t) = \dfrac{1}{c} \displaystyle\int d^3 x \; j^o (t, \vec{x}) = \sum_n \breve{e}_n$.

6.2. Tenseur énergie-impulsion (du champ électromagnétique dans le vide)

Soit $$\boxed{T^{\alpha\beta}_{é.m} = F^{\alpha\gamma}\, F^{\beta}{}_{\gamma} - \frac{1}{4}\,\eta^{\alpha\beta}\, F_{\gamma\delta}\, F^{\gamma\delta}} \tag{6.15}$$

alors $T^{\alpha\beta}_{é.m} = T^{\beta\alpha}_{é.m}$ et $T_{é.m}{}^{\alpha}{}_{\alpha} = F_{\alpha\gamma}\, F^{\alpha\gamma} - F_{\gamma\delta}\, F^{\gamma\delta} = 0$

c'est donc un tenseur symétrique à trace nulle.

Calcul de la divergence :

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta}_{é.m} = (\partial_\alpha F^{\alpha}{}_{\gamma})\, F^{\beta\gamma} + F^{\alpha}{}_{\gamma}(\partial_\alpha F^{\beta\gamma}) - \frac{1}{2}\, F_{\gamma\delta}\, (\partial^{\beta} F^{\gamma\delta})$$

$$= (\partial_\alpha\, F^{\alpha\gamma})\, F^{\beta}{}_{\gamma} + F_{\alpha\gamma}\, (\partial^{\alpha} F^{\beta\gamma}) - \frac{1}{2}\, F_{\gamma\alpha}\, (\partial^{\beta} F^{\gamma\alpha})$$

$$= -\frac{1}{c}\, j^{\gamma}\, F^{\beta}{}_{\gamma} + \frac{1}{2}\, F_{\alpha\gamma}\, [\partial^{\alpha} F^{\beta\gamma} + \partial^{\beta}\, F^{\gamma\alpha} + \partial^{\gamma}\, F^{\alpha\beta}]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\partial_\alpha T^{\alpha\beta}_{é.m} = -\frac{1}{c}\, F^{\beta\gamma}\, j_{\gamma}} \tag{6.16}$$

Interprétation :

$$\begin{cases} T^{oo}_{e.m} = \dfrac{1}{2}(\vec{D}^2 + \vec{H}^2)\,(x) = \rho_{e.m} & \leftrightarrow \quad \text{"densité d'énergie e.m."} \\ T^{io}_{e.m} = (\vec{E} \wedge \vec{H})^i = \dfrac{1}{c}\, j^i_E = \dfrac{1}{c} S^i \;; & \vec{S} \;=\; \text{vecteur de Poynting} \\ T^{io}_{e.m} = (\vec{E} \wedge \vec{H})^i = c\; \pi^i_{e.m} \;; & \vec{\pi}_{e.m} = \text{dens. de quant. de mouv.} \\ T^{ij}_{é.m} = \eta^{ij}\; T^{oo}_{é.m} - D^i\, D^j - H^i\, H^j & \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \left\| \begin{array}{l} \partial_t\, \rho_{é.m} + \mathrm{div}\, \vec{S} = -\vec{E} \cdot \vec{j} \\[2ex] \partial_t\, \pi^{\,i}_{é.m} + \partial_k\, T^{ki}_{é.m} = -[q\, \vec{E} + \dfrac{\vec{j}}{c} \wedge \vec{B}]^i . \end{array} \right. \tag{6.17}$$

Nous retrouvons ainsi les équations de continuité de l'électrodynamique classique.

6.3. Système de particules chargées dans un champ électromagnétique

Soit $$\boxed{T^{\alpha\beta}(x) := T^{\alpha\beta}_{mat}(x) + T^{\alpha\beta}_{é.m}(x)} \qquad (6.18)$$

Des équations (5.34) et (6.16), nous obtenons :

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta}(x) = \sum_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \frac{c}{\omega^0_n(t)} f^\beta_n(t) - \frac{1}{c} F^{\beta\gamma} j_\gamma$$

d'où, en utilisant (6.12) pour la force $f^\beta_n(t)$ et (6.14) pour le courant

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta}(x) = \sum_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \frac{e_n}{\omega^0_n} F^\beta{}_\gamma \, \omega_n{}^\gamma - \sum_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \frac{1}{c} F^\beta{}_\gamma \, e_n \, v_n{}^\gamma$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\partial_\alpha T^{\alpha\beta}(x) = 0}.$$

Ainsi le 4-vecteur quantité de mouvement est une grandeur conservée, où

$$\begin{cases} \Pi^0(t) = \dfrac{1}{c} E(t) = \dfrac{1}{c}\displaystyle\int d^3x \; T^{00}(t,\vec{x}) = \dfrac{1}{c}\left\{ \displaystyle\sum_n \dfrac{m_n c^2}{\sqrt{1 - \vec{v}_n^{\,2}/c^2}} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int d^3x \left(\vec{D}^2 + \vec{H}^2\right) \right\} \\ \vec{\Pi}(t) = \dfrac{1}{c}\displaystyle\int d^3x \; T^{0i}(t,\vec{x}) = \displaystyle\sum_n \dfrac{m_n \vec{v}_n}{\sqrt{1 - \vec{v}_n^{\,2}/c^2}} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int d^3x \left(\vec{E} \wedge \vec{H}\right)\left(t, \vec{x}\right) \end{cases}$$

CHAPITRE VII : HYDRODYNAMIQUE RELATIVISTE

Nous nous limiterons au cas d'un fluide constitué d'une seule composante chimique. Pour le cas général d'un fluide à plusieurs composantes, en tenant compte des réactions chimiques, voir :

E. C. G. Stueckelberg et G. Wanders : "Thermodynamique en relativité générale", H.P.A. 26 307-316 (1953), voir également :

E. C. G. Stueckelberg : "Relativistic Thermodynamics III", H.P.A. 35, 568-591 (1962).

7.1. Quantité de substance

Par analogie avec la théorie des fluides non relativistes, on postule dans le premier principe également l'existence d'une grandeur scalaire, extensive, conservée, "la quantité de substance N" (ou "nombre de particules") :

$$\boxed{\breve{N}[\lambda(\cdot)] = \frac{1}{c} \int_{\lambda(x)=0} d\breve{\sigma}_\alpha \, j_N^\alpha (x)} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{\partial_\alpha \, j_N^\alpha = 0}$$

$$j_N \cdot j_N < 0 \, , \; j_N^0 > 0 \qquad \text{[ref. orthochrone]}$$

En particulier,

$$\boxed{\breve{N}(t) = \frac{1}{c} \int d^3x \; j_N^0 (t, \vec{x}) = \breve{N}(t')}$$

et $$\breve{N}_\Lambda (t) = \frac{1}{c} \int_\Lambda d^3 x \; j_N^0 \left(t, \vec{x}\right).$$

7.2. Description du fluide

Dans la théorie non relativiste, l'état du fluide est entièrement défini par cinq champs

- le champ de vitesse $\vec{v}\,(t, \vec{x})$
- le champ de densité de substance n $(t, \vec{x})$
- le champ de densité d'entropie s $(t, \vec{x})$.

Par analogie, nous admettons que l'état du fluide relativiste est également défini par 5 champs. Par conséquent, les grandeurs physiques (= fonctions d'état) telles que $T^{\alpha\beta}$, j_N^α , j_S^α , i, sont des fonctions de ces 5 champs.

D'autre part, ces 5 champs doivent satisfaire les 6 équations de continuité

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 \quad ; \; \partial_\alpha j_N^\alpha = 0 \quad ; \quad \partial_\alpha \; j_S^\alpha \; - i = 0 \; ; \; i \geq 0.$$

Ceci nous conduit à postuler que les 6 équations de continuité ne sont pas linéairement indépendantes, c'est-à-dire qu'il existe 6 coefficients

$$\{ \omega_\beta (x) \; , \; \mu(x) \; , \; T(x) \} \qquad\qquad \text{tels que}$$

$$\boxed{\omega_\beta (x) \, \partial_\alpha T^{\alpha\beta} (x) + \mu(x) \, \partial_\alpha j_N^\alpha (x) \; + T(x) \, [\partial_\alpha \; j_S^\alpha \; (x) \; - i\,(x)] = 0} \tag{7.1}$$

(C'est-à-dire que la 6ème équation de continuité sera satisfaite dès que cinq équations de continuité sont satisfaites).

Ces coefficients sont univoquement définis par la condition de normalisation

$$\omega_\alpha (x) \cdot \omega^\alpha (x) = - c^2 \qquad\qquad \omega^o (x) > 0$$

Nous complétons alors les deux principes en ajoutant le postulat supplémentaire suivant :

Postulat.

1) L'état du fluide est décrit par les 5 champs

$$\{\omega_\beta (x)\ ,\ \mu(x)\ ,\ T(x)\} \qquad ; \qquad \omega_\beta\, \omega^\beta (x) = -c^2\ ;\quad \omega^o (x) > 0.$$

2) Les six courants $T^{\alpha\beta}$, j^α_N , j^α_S sont des fonctions de $\{\omega_\beta, \mu, T\}$ et de leur gradient $\{\partial_\alpha\, \omega_\beta\ , \partial_\alpha\, \mu\ , \partial_\alpha\ T\}$, mais ne dépendent que linéairement des gradients [ce qui signifie que ces courants décrivent le phénomène du transport].

$$\begin{cases} T^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta}_{(o)}(\omega,\mu,T) + T^{\alpha\beta}_{(\zeta)}(\ldots,\partial_\rho\ \omega^\rho) + T^{\alpha\beta}_{(\eta)}(\ldots,[\partial_\alpha\ \omega_\beta]^{(o)}) \\ \qquad\qquad + T^{\alpha\beta}_{(\kappa)}(\ldots,\partial_\alpha\ T) + T^{\alpha\beta}_{(\lambda)}(\ldots,\partial_\alpha\ \mu) \\ j^\alpha_N = j^\alpha_{N,(o)} + j^\alpha_{N,(\zeta)} + j^\alpha_{N,(\eta)} + j^\alpha_{N,(\kappa)} + j^\alpha_{N,(\lambda)} \\ j^\alpha_S = j^\alpha_{S,(o)} + j^\alpha_{S,(\zeta)} + j^\alpha_{S,(\eta)} + j^\alpha_{S,(\kappa)} + j^\alpha_{S,(\lambda)} \\ i = i_{(o)} + i_{(\zeta)} + i_{(\eta)} + i_{(\kappa)} + i_{(\lambda)} \end{cases} \tag{7.2}$$

avec $i \geq 0$.

Nous allons donc chercher le tenseur $T^{\alpha\beta}$, symétrique, le plus général satisfaisant le postulat ainsi que l'équation (7.1). Il s'agira ainsi de calculer

$$\omega_\beta\, \partial_\alpha\, T^{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha\, (\omega_\beta\ \ T^{\alpha\beta}) - T^{\alpha\beta}\ \omega_{\alpha\beta} \tag{7.3}$$

où
$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,(\partial_\alpha\ \omega_\beta + \partial_\beta\ \omega_\alpha) \tag{7.4}$$

7.3. Fluides parfaits
Dans la fin de cette section, nous poserons en général c = 1.

6.3.1. Tenseur énergie-impulsion

Par définition, pour un fluide parfait, le tenseur $T^{\alpha\beta}$ ne dépend que des champs $\{\omega_\beta\ , \mu\ , T\}$, mais pas des gradients. Sa forme générale est la suivante :

$$\boxed{T^{\alpha\beta}_{(o)} := m\,(T,\mu)\,\omega^\alpha\ \omega^\beta + p(T,\mu)\ \eta^{\alpha\beta}} \tag{7.5}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_\beta\, T^{\alpha\beta}_{(o)} = -\,(m-p)\,\omega^\alpha$$

Introduisons pour commencer les variables s et n conjuguées à T et μ

$$\boxed{s := \frac{\partial p}{\partial T}} \qquad \boxed{n := \frac{\partial p}{\partial \mu}} \qquad \text{soit} \quad \boxed{dp = s dT + n d\mu} \tag{7.6}$$

$$\omega_\beta\, \partial_\alpha\, (T^{\alpha\beta}_{(o)}) = \partial_\alpha\, ((p-m)\,\omega^\alpha) - \underbrace{T^{\alpha\beta}\ \partial_\alpha\ \omega_\beta}$$

$$= \underbrace{m\ \omega^\alpha\ \omega^\beta\ \partial_\alpha\ \omega_\beta}_{=0} + p\,\partial^\alpha\ \omega_\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \omega_\beta\, \partial_\alpha\, (T^{\alpha\beta}_{(o)}) = \omega^\alpha\, \partial_\alpha\, p - \partial_\alpha\, (m\,\omega^\alpha)$$

$$= \omega^\alpha\, (s\, \partial_\alpha\, T + n\, \partial_\alpha\ \mu) - \partial_\alpha\, (m\,\omega^\alpha)$$

$$= \partial_\alpha\, [\omega^\alpha\, (\, s\, T + n\, \mu - m)] -$$

$$- T\ \partial_\alpha\, (\omega^\alpha\, s) - \mu\ \partial_\alpha\, (\omega^\alpha\, n)$$

L'équation (7.1) sera alors identiquement satisfaite en posant (en introduisant ici c explicitement)

$$\boxed{m\, c^2 = s\, T + n\, \mu} \qquad = T\ \frac{\partial p}{\partial T} + \mu\ \frac{\partial p}{\partial \mu} \tag{7.7}$$

$$\boxed{j^\alpha_{N,(o)} = n\ \omega^\alpha\ ;\ j^\alpha_{S,(o)} = s\ \omega^\alpha\ ;\ i_{(o)} = 0} \tag{7.8}$$

Introduisons alors

$$\rho_E = m c^2 - p$$

$$d\rho_E = sdT + Tds + nd\mu + \mu dn - sdT - nd\mu$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{d\rho_E = Tds + \mu\, dn} \qquad \boxed{T = \frac{\partial \rho_E}{\partial s}} \quad ; \quad \boxed{\mu = \frac{d\rho_E}{\partial n}} \tag{7.9}$$

Par conséquent,

$$\rho_E = - p + Ts + \mu n = \rho_E\ (s, n) \tag{7.10}$$

est la transformée de Legendre de p (T, μ).

6.3.2. Interprétation des grandeurs physiques : $\{\omega_\beta, \mu, T\}$, m, p, ρ.

Le résultat (7.8), $j^\alpha_{N,(o)} = n\ \omega^\alpha$, nous conduit à interpréter ω^α comme le **4-vecteur vitesse du fluide** au point x et la 3-vitesse du fluide au point x est donnée par :

$$\boxed{\vec{v}\ (t, \vec{x}) = c\ \frac{\omega^\alpha(t, \vec{x})}{\omega^o(t, \vec{x})} = c\ \frac{\vec{j}_N (x)}{j_N^o (x)}} \tag{7.11}$$

Remarque : Cette approche qui consiste à poser $\vec{v} = c\ \frac{\vec{j}_N}{j_N^o}$ est celle suivie par Eckart. Landau, au contraire, définit la 3-vitesse du fluide au point x par

$$v^i\ (t, \vec{x}\ ) = \frac{T^{oi}(t, \vec{x})}{T^{oo}(t, \vec{x})} = \frac{\omega^i}{\omega^o}\ \frac{c}{1 - p/\left(m\ \omega^{o2}\right)}$$

Par définition, le "référentiel local de repos du fluide" (RLR) au point x est le référentiel d'inertie R^* (x) tel que $\omega\ (x) \overset{*}{=} (c, \vec{o})$.

Posons alors : $$\boxed{T^{\alpha\beta}_{(\zeta)} = -\zeta\, H^{\alpha\beta}\, \omega^{\rho}{}_{\rho}} \tag{7.27}$$

$\Rightarrow$ $$T^{\alpha\beta}_{(\zeta)} \cdot \omega_\beta = 0$$

et $$\omega_\beta\, \partial_\alpha T^{\alpha\beta}_{(\zeta)} = \partial_\alpha \left(\omega_\beta T^{\alpha\beta}_{(\zeta)}\right) - T^{\alpha\beta}_{(\zeta)}\, \partial_\alpha\, \omega_\beta$$

$$= \zeta H^{\alpha\beta}\, \omega_{\alpha\beta} \quad \omega^{\rho}{}_{\rho} = \zeta\, (\omega^{\rho}{}_{\rho})^2$$

$$\overset{(7.1)}{=} -\mu\, \partial_\alpha\, j^{\alpha}_{N,(\zeta)} - T\,[\partial_\alpha\, j^{\alpha}_{S,(\zeta)} - i_{(\zeta)}]$$

$\Rightarrow$ $$\boxed{j^{\alpha}_{N,(\zeta)} = 0\ ;\ j^{\alpha}_{S,(\zeta)} = 0\ ;\ i_{(\zeta)} = \frac{\zeta}{T}\left(\omega^{\rho}_{\rho}\right)^2} \tag{7.28}$$

avec $$\boxed{\frac{\zeta}{T} \geq 0}.$$

Dans le <u>référentiel local de repos</u> $[\omega(x) \overset{*}{=} (1, 0, 0, 0)]$

$$T^{oo}_{(\zeta)} \overset{*}{=} T^{oi}_{(\zeta)} \overset{*}{=} 0$$

$$T)^{ij}_{(\zeta)} \overset{*}{=} -\zeta\, \delta^{ij}\, (\partial_k\, v^k) \qquad [\text{car } \omega^\alpha \partial_0 \omega_\alpha = 0 \overset{*}{=} \partial_0 \omega_0\,]$$

et ζ est le <u>coefficient de viscosité longitudinal.</u>

7.4.2. <u>Viscosité transversale</u> η

Soit : $$\boxed{T^{\alpha\beta}_{(\eta)} := -2\,\eta\ H^{\alpha\gamma}\ H^{\beta\delta}\ (\omega_{\gamma\delta} - \frac{1}{3}\ \eta_{\gamma\delta}\ \omega^{\rho}{}_{\rho})} \tag{7.29}$$

<u>Propriétés</u>

i) $\omega_\beta\ H^{\beta\delta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_\beta\ T^{\alpha\beta}_{(\eta)} = 0$ (7.30)

ii) $$H^{\alpha\gamma} H^{\beta\delta} (\omega_{\gamma\delta} - \frac{1}{3} \eta_{\gamma\delta} \omega^\rho{}_\rho) =$$

$$= [\eta^{\alpha\gamma}\eta^{\beta\delta} + \eta^{\alpha\gamma} \omega^\beta \omega^\delta + \eta^{\beta\delta} \omega^\alpha \omega^\gamma + \omega^\alpha \omega^\beta \omega^\gamma \omega^\delta] (\omega_{\gamma\delta} - \frac{1}{3} \eta_{\gamma\delta} \omega^\rho{}_\rho) =$$

$$= \omega^{\alpha\beta} + \omega^\beta \omega_\delta \omega^{\delta\alpha} + \omega^\alpha \omega_\gamma \omega^{\gamma\beta}$$

$$-\frac{1}{3} \eta^{\alpha\beta} \omega^\rho{}_\rho - \frac{1}{3} \omega^\alpha \omega^\beta \omega^\rho{}_\rho - \frac{1}{3} \omega^\alpha \omega^\beta \omega^\rho{}_\rho + \frac{1}{3} \omega^\alpha \omega^\beta \omega^\rho{}_\rho$$

[car : $\omega^\gamma \omega^\delta \omega_{\gamma\delta} = \omega^\gamma \omega^\delta \partial_\gamma \omega_\delta = 0$]

$$\Rightarrow \quad H^{\alpha\gamma} H^{\beta\delta} (\omega_{\gamma\delta} - \frac{1}{3} \eta_{\gamma\delta} \omega^\rho{}_\rho) =$$

$$= \omega^{\alpha\beta} + \omega^\alpha \omega_\gamma \omega^{\gamma\beta} + \omega^\beta \omega_\gamma \omega^{\alpha\gamma} - \frac{1}{3} (\eta^{\alpha\beta} + \omega^\alpha \omega^\beta) \omega^\rho{}_\rho$$

et $$\boxed{H^{\alpha\gamma} H^{\beta\delta} \omega_{\gamma\delta} = \omega^{\alpha\beta\perp} = \omega^{\alpha\beta} + \omega^\alpha \dot{\omega}^\beta + \omega^\beta \dot{\omega}^\alpha}$$

iii) $$T^{\alpha}_{(\eta)\,\alpha} = -2\eta\, [\omega^\alpha{}_\alpha + 2\, \omega^\alpha \omega^\gamma \omega_{\gamma\alpha} - \omega^\rho{}_\rho]$$

d'où $$T^{\alpha}_{(\eta)\,\alpha} = 0$$

c.à.d. $$\boxed{H^{\alpha\gamma} H^{\beta\delta} (\omega_{\gamma\delta} - \frac{1}{3} \eta_{\gamma\delta} \omega^\rho{}_\rho) = \omega^{\alpha\beta\perp(0)}} \qquad (7.31)$$

($\perp$) = projection spatiale ($\perp$ à ω)

(0) = à trace nulle

d'où $$\boxed{T^{\alpha\beta}_{(\eta)} = -2\eta\, \omega^{\alpha\beta\perp(0)}}$$

iv) $$\omega^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta}{}^{\perp(0)} = \text{[en utilisant ii)]} =$$

$$= [\omega^{\alpha\beta\,\perp(0)} - \omega^\alpha \omega_\gamma \omega^{\gamma\beta} - \omega^\beta \omega_\gamma \omega^{\gamma\alpha} + \frac{1}{3} (\eta^{\alpha\beta} + \omega^\alpha \omega^\beta) \omega^\rho{}_\rho]\, \omega_{\alpha\beta}{}^{\perp(0)}$$

$$= \omega^{\alpha\beta\,\perp(0)} \omega_{\alpha\beta}{}^{\perp(0)} + \frac{1}{3} (\eta^{\alpha\beta} + \omega^\alpha \omega^\beta) \omega^\rho{}_\rho\, \omega_{\alpha\beta}{}^{\perp(0)}$$

et $\omega^\alpha{}_\alpha{}^{\perp(0)} = 0, \quad \omega^\beta \omega_{\alpha\beta}{}^{\perp(0)} = 0.$

D'où $\qquad \omega_{\alpha\beta}\ T^{\alpha\beta}_{(\eta)} = -2\,\eta\ \omega_{\alpha\beta}{}^{\perp(0)}\ \omega^{\alpha\beta\,\perp(0)}$

En conséquence, l'équation (7.1) entraîne :

$$\begin{aligned}\omega_\beta \partial_\alpha T^{\alpha\beta}_{(\eta)} &= \partial_\alpha\left(\omega_\beta T^{\alpha\beta}_{(\eta)}\right) - T^{\alpha\beta}_{(\eta)}\,\omega_{\alpha\beta} \\ &= +2\,\eta\ \omega^{\alpha\beta\,\perp(0)}\ \omega_{\alpha\beta}{}^{\perp(0)} \\ &= -\mu\,\partial_\alpha\, j^\alpha_{N,(\eta)} - T\,[\partial_\alpha\, j^\alpha_{S,(\eta)} - i]\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{j^\alpha_{N,(\eta)} = 0\ ;\ j^\alpha_{S,(\eta)} = 0\ ;\ i_{(\eta)} = \frac{2\eta}{T}\,\omega^{\alpha\beta\perp(0)}\,\omega^{\perp(0)}_{\alpha\beta}} \qquad (7.32)$$

avec $\boxed{\frac{\eta}{T} \geq 0}$ $\qquad$ et η est le <u>coefficient de viscosité transversal</u>.

Dans le <u>référentiel local de repos du fluide</u>

$$\partial_i\omega_j = \partial_i(\omega^0 v_j) \overset{*}{=} \partial_i v_j$$

$$\partial_0\omega_j = \partial_0(\omega^0 v_j) \overset{*}{=} \partial_t v_j$$

$$\partial_0\omega_0 \overset{*}{=} 0 \quad \left[\text{car}\ \ \omega^\alpha\partial_0\omega_\alpha = 0 \overset{*}{=} \partial_0\omega_0\right]$$

(i) $\Rightarrow \qquad T^{oo}_{(\eta)} \overset{*}{=} T^{oi}_{(\eta)} \overset{*}{=} 0$

(ii) $\Rightarrow \qquad \omega_{ij}{}^{\perp(0)} \overset{*}{=} \frac{1}{2}(\partial_i v_j + \partial_j v_i) - \frac{1}{3}\ \delta_{ij}\,(\partial_k v^k)$

$$\Rightarrow \qquad \begin{aligned}T^{ij}_{(o)} + T^{ij}_{(\eta)} + T^{ij}_{(\zeta)} &\overset{*}{=} p\,\delta_{ij} - \eta\,(\partial_i v_j + \partial_j v_i) - (\zeta - \tfrac{2}{3}\eta)\ \delta_{ij}\,\partial_k v^k \\ &\equiv -\ \sigma_{ij}\end{aligned}$$

où σ_{ij} est le tenseur des tensions (Landau et Lifshitz, p. 49)

et $$\boxed{i \overset{*}{=} \frac{\zeta}{T}\left(\partial_k\ v^k\right)^2 + \frac{2\eta}{T}\sum_{j,\,k}\left[\omega^{\perp(0)}_{jk}\right]^2} \qquad (7.33)$$

7.5. Conduction de chaleur

Posons : $$\boxed{T^{\alpha\beta}_{(\kappa)} = -\kappa\,(\omega^\alpha q^\beta + \omega^\beta q^\alpha)} \tag{7.34}$$

avec $$q^\alpha = \partial^\alpha T + \omega^\alpha\, \omega^\beta\, \partial_\beta T + T\, \omega^\beta\, \partial_\beta\, \omega^\alpha$$

$$\boxed{q^\alpha \equiv \partial^\alpha T + \omega^\alpha\, \dot{T} + T\, \dot{\omega}^\alpha} \tag{7.35}$$

On aura : $$q^\alpha \cdot \omega_\alpha = 0 \qquad [\text{car } \omega_\alpha \cdot \partial^\alpha T - \omega^\beta \partial_\beta T + T\, \omega^\beta\, \underbrace{\omega_\alpha \partial_\beta\, \omega^\alpha}_{=0} = 0]$$

et $$\omega_\beta\, \partial_\alpha\, (T^{\alpha\beta}_{(\kappa)}) = \partial_\alpha\, (\omega_\beta\, T^{\alpha\beta}_{(\kappa)}) - T^{\alpha\beta}_{(\kappa)}\, \partial_\alpha\, \omega_\beta$$

$$= \partial_\alpha \left[+ \frac{\kappa}{T}\, T q^\alpha \right] + \kappa\,(\omega^\alpha q^\beta + \underbrace{\omega^\beta\, q^\alpha) \quad \partial_\alpha\, \omega_\beta}_{=0} \qquad [\text{avec } \alpha \leftrightarrow \beta]$$

$$= T\, \partial_\alpha \left[\frac{\kappa}{T}\, q^\alpha \right] + \frac{\kappa}{T}\, q^\alpha\, \partial_\alpha T + \kappa\, \omega^\beta\, q^\alpha\, \partial_\beta\, \omega_\alpha$$

$$= T\, \partial_\alpha \left[\frac{\kappa}{T}\, q^\alpha \right] + \frac{\kappa}{T}\, q^\alpha\, [\partial_\alpha T + T\, \omega^\beta\, \partial_\beta\, \omega_\alpha]$$

$$= T\, \partial_\alpha \left[\frac{\kappa}{T}\, q^\alpha \right] + \frac{\kappa}{T}\, q^\alpha\, [q_\alpha - \omega_\alpha\, \omega^\beta\, \partial_\beta T\,]$$

$$\Rightarrow \quad \omega_\beta\, \partial_\alpha\, T^{\alpha\beta}_{(\kappa)} = T\, \partial_\alpha \left[\frac{\kappa}{T}\, q^\alpha \right] + \frac{\kappa}{T}\, q^\alpha\, q_\alpha$$

$$= -\mu\, \partial_\alpha\, j^\alpha_{N,(\kappa)} - T\, [\partial_\alpha\, j^\alpha_{S,(\kappa)} - i_{(k)}]$$

En conclusion

$$\boxed{j^\alpha_{N,(\kappa)} = 0\ ;\ j^\alpha_{S,(\kappa)} = \frac{\kappa}{T}\, q^\alpha\ ; \quad i_{(\kappa)} = \frac{\kappa}{T^2}\, q^\alpha\, q_\alpha} \tag{7.36}$$

Dans le référentiel local de repos du fluide

$$q(x) \overset{*}{=} (0\,;\overrightarrow{\text{grad}}\,T + T\,\partial_t \vec{v}) \qquad (7.36')$$

[en introduisant c : $\vec{q}(x) \overset{*}{=} \overrightarrow{\text{grad}}\,T + T\,\partial_t\,(\vec{v}/c^2)$]

$\Rightarrow$ $-\kappa\, q^\alpha$ est le "courant de chaleur" [si $\partial_t \vec{v} = 0$], $q^\alpha q_\alpha \geq 0$,

et κ est le coefficient de conductivité de chaleur, qui doit satisfaire

$$\boxed{\kappa \geq 0}.$$

$$\begin{cases} T^{oo}_{(\kappa)} \overset{*}{=} T^{ij}_{(\kappa)} \overset{*}{=} 0 \\ T^{oi}_{(\kappa)} = -\kappa(\omega^o\, q^i + \omega^i\, q^o) \overset{*}{=} \kappa\left(\partial^i\, T + T\,\partial_t\, v^i\right) \end{cases} \qquad (7.37)$$

(Landau et Lifshitz, p. 185).

Remarque :

Le dernier terme dans q^α, soit $T\,\omega^\beta\partial_\beta\omega^\alpha = T\,\dot{\omega}^\alpha \overset{*}{=} T\partial_t v^\alpha$ n'apparaît pas en théorie non relativiste. Il n'est par conséquent pas possible d'interpréter $T^{oi}_{(\kappa)}$ comme un courant de chaleur : en thermodynamique relativiste, la décomposition du courant d'énergie en chaleur et travail n'a plus de sens.

Cependant, ce terme est nécessaire pour que l'irréversibilité i soit une forme définie positive car : $\frac{\kappa}{T}\; q^\alpha\,[\partial_\alpha\, T + T\,\omega^\beta\,\partial_\beta\;\omega_\alpha] = Ti$ (voir termes soulignés) et l'on doit également avoir $q^\alpha \cdot \omega_\alpha = 0$.

7.6. Diffusion de matière

Soit $$\boxed{T^{\alpha\beta}_{(\lambda)} = -\lambda\,(\omega^\alpha q^\beta_N + \omega^\beta q^\alpha_N)} \tag{7.38}$$

avec $q^\alpha_N = \partial^\alpha \mu + \omega^\alpha \omega^\beta \partial_\beta \mu + \mu\, \omega^\beta \partial_\beta \omega^\alpha$

soit $$\boxed{q^\alpha_N = \partial^\alpha \mu + \omega^\alpha \dot{\mu} + \mu\, \dot{\omega}^\alpha} \tag{7.39}$$

On aura de nouveau $q^\alpha_N\ \omega_\alpha = 0$ et, en suivant la même démarche,

$$\omega_\beta\, \partial_\alpha T^{\alpha\beta}_{(\lambda)} = \mu\, \partial_\alpha \left(\frac{\lambda}{\mu}\, q^\alpha_N\right) + \frac{\lambda}{\mu}\, q^\alpha_N\ q_{N\alpha}$$

$$= -\mu\, \partial_\alpha\, j^\alpha_{N,(\lambda)} - T\,[\partial_\alpha\, j^\alpha_{S,(\lambda)} - i_{(\lambda)}]$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{j^\alpha_{N,(\lambda)} = -\frac{\lambda}{\mu}\, q^\alpha_N \ ;\ j^\alpha_{S,(\lambda)} = 0 \ ;\ i_{(\lambda)} = \frac{\lambda}{\mu T}\, q_N \cdot q_N} \tag{7.40}$$

Dans le <u>référentiel local de repos</u> du fluide

$$q_N(x) \stackrel{*}{=} (0\ ;\ \overrightarrow{\text{grad}}\, \mu + \mu\, \partial_t \vec{v})$$

$$T^{ij}_{(\lambda)} \stackrel{*}{=} T^{oo}_{(\lambda)} \stackrel{*}{=} 0$$

$$T^{oi}_{(\lambda)} \stackrel{*}{=} -\lambda\,(\partial^i \mu + \mu\, \partial_t v^i)$$

Par conséquent, si $\partial_t \vec{v} = 0$, on retrouve le courant d'énergie dû à la diffusion et λ est le <u>coefficient de diffusion</u>. D'autre part, nous voyons que $q_N \cdot q_N \geq 0$ et par conséquent le coefficient de diffusion doit satisfaire la condition

$$\boxed{\frac{\lambda}{\mu T} \geq 0}\ .$$

7.7. Résumé

$$\boxed{\begin{aligned} T^{\alpha\beta} &= m\,\omega^\alpha\,\omega^\beta + p\,\eta^{\alpha\beta} - 2\,\eta\,\omega^{\alpha\beta\perp(0)} - \zeta\,H^{\alpha\beta}\,\omega^\rho_\rho \\ &\qquad - \kappa\,(\omega^\alpha\,q^\beta + \omega^\beta\,q^\alpha) - \lambda\,(\omega^\alpha\,q^\beta_N + \omega^\beta\,q^\alpha_N) \end{aligned}} \tag{7.41}$$

avec

$$H^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} + \omega^\alpha\,\omega^\beta$$

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,(\partial_\alpha\,\omega_\beta + \partial_\beta\,\omega_\alpha)$$

$$\omega^{\alpha\beta\perp(0)} = H^{\alpha\gamma}\,H^{\beta\delta}\,(\omega_{\gamma\delta} - \frac{1}{3}\,\eta_{\gamma\delta}\,\omega^\rho_\rho)$$

$$q^\alpha = \partial^\alpha T + \omega^\alpha\,\dot{T} + T\,\dot{\omega}^\alpha \qquad\qquad q^\alpha\,\omega_\alpha = 0$$

$$q^\alpha_N = \partial^\alpha\mu + \omega^\alpha\,\dot{\mu} + \mu\,\dot{\omega}^\alpha \qquad\qquad q^\alpha_N\,\omega_\alpha = 0$$

$$\boxed{j^\alpha_N = n\,\omega^\alpha - \frac{\lambda}{\mu}\,q^\alpha_N} \tag{7.42}$$

$$\boxed{j^\alpha_S = s\,\omega^\alpha - \frac{\kappa}{T}\,q^\alpha} \tag{7.43}$$

$$\boxed{i = \frac{1}{T}\left\{\zeta\left(\omega^\rho_\rho\right)^2 + 2\,\eta\,\omega^{\perp(0)}_{\alpha\beta}\,\omega^{\alpha\beta\perp(0)} + \frac{\kappa}{T}\,q\cdot q + \frac{\lambda}{\mu}\,q_N\cdot q_N\right\}} \tag{7.44}$$

Dans le <u>référentiel local de repos</u>

$$\begin{cases} T^{oo} \doteq m - p = \rho_E \\ T^{ij} \doteq p\,\delta^{ij} - 2\eta\,(v^{ij} - \frac{1}{3}\,\delta^{ij}\,v^\rho_\rho) - \zeta\,\delta^{ij}\,\omega^\rho_\rho = -\,\sigma^{ij} \\ T^{oi} \doteq -\,\kappa\,(\partial_i T + T\,\partial_t v^i) - \lambda\,(\partial_i\mu + \mu\,\partial_t v^i) \end{cases}$$

Equations du mouvement

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_\alpha\, T^{\alpha\beta} &= 0 \\ \partial_\alpha\, \dot{j}_N^{\alpha} &= 0 \\ \partial_\alpha\, \dot{j}_S^{\alpha} - i &= 0 \end{aligned}}$$

Remarque

Dans l'équation $\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ apparaîtra le terme :

$$\begin{aligned} \partial_\alpha [\kappa (\omega^\alpha q^\beta + \omega^\beta q^\alpha)] &= \kappa\ \omega^\alpha\ \partial_\alpha\ q^\beta + \dots \\ &= \kappa\ \dot{q}^{\beta} + \dots \\ &= \kappa\ \ddot{\omega}^{\beta} + \dots + \dots \end{aligned}$$

Nous voyons apparaître dans les équations du mouvement les termes en ω^α, $\dot{\omega}^{\alpha}$, et $\ddot{\omega}^{\alpha}$ (analogie avec la théorie de l'électron ponctuel).

7.8. **Etat d'équilibre** (voir : E.C.G. Stueckelberg)

En vertu du 2ème principe de la thermostatique, les états d'équilibre d'un système isolé correspondent au maximum de l'entropie S [...] soumis aux contraintes

$$\begin{aligned} E\ [\dots] &= E' \\ \Pi_i\ [\dots] &= \Pi_i' \\ J_{ij}\ [\dots] &= J_{ij}' \\ N\ [\dots] &= N' \end{aligned}$$

La résolution du problème d'extréma liés conduit à la solution suivante :

$$\begin{cases} \vec{v}(x) = \vec{v} + \vec{\Omega} \wedge \vec{x} \\ T(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2}}\, T_o \\ \mu(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2}}\, \mu_o \end{cases} \tag{7.45}$$

où $\vec{v}$, $\vec{\Omega}$, T_o et μ_o sont des constantes.

En introduisant la notation

$$\rho_{ss} = \frac{\partial^2 \rho_E}{\partial s^2} \quad , \; \rho_{sn} = \frac{\partial^2 \rho_E}{\partial s \partial n} \quad , \; \rho_{nn} = \frac{\partial^2 \rho_E}{\partial n^2}$$

la condition de maximum implique d'autre part :

$$\frac{1}{T}\ \rho_{ss} = \frac{1}{C} \geq 0 \qquad ; \qquad \frac{1}{T}\ \rho_{nn} \geq 0$$

$$\frac{a}{T} = \frac{1}{T}\ [s^2 \rho_{ss} + 2\, s\ n\, \rho_{sn} + n^2\ \rho_{nn}] \geq 0$$

$$\frac{m}{T} \geq 0 \ ; \ s \geq 0 \ ; \ 1 \geq \frac{a}{m} \geq 0 .$$

[C = chaleur spécifique par unité de volume,

a = module élastique,

$\sqrt{a/m}$ = vitesse des ondes élastiques, comme on le verra plus loin].

On vérifie facilement que (7.45) est solution des équations du mouvement.

7.9. Approximation linéaire

7.9.1. Linéarisation des équations de mouvement

Considérons l'état d'équilibre $\{\vec{v}(x) = 0,\ T(x) = T_o,\ \mu(x) = \mu_o\}$ et linéarisons les équations du mouvement au voisinage de cet état d'équilibre. Pour ce faire, on écrit :

$$\begin{aligned} \vec{v}\,(x) &= \vec{v}_o + \vec{v}_1(x) = \vec{v}_1(x) \\ s\,(x) &= s_o + s_1(x) \\ n\,(x) &= n_o + n_1(x) \end{aligned}$$

où $\vec{v}_o, s_o, n_o,$ ... sont les valeurs à l'équilibre

et $\vec{v}_1, s_1, n_1,$ ... infiniment petits.

La linéarisation des équations du mouvement consiste à se limiter aux infiniment petits de premier ordre et pour simplifier la notation on laissera tomber l'indice 1.

Commençons par linéariser les grandeurs introduites dans les courants $T^{\alpha\beta}, j_N^\alpha, j_S^\alpha$:

$$\omega^o \approx 1 \ ; \ \omega^i \approx v^i \ ; \ \partial_i \omega_j \approx \partial_i v_j \ ; \ \partial_o \omega_o \approx 0 \ ; \ \partial_i \omega_o \approx 0 \ ; \ \partial_o \omega_i = \partial_t v_i$$

$$\omega_{\alpha\beta} : \begin{cases} \omega_{oo} \approx 0 \\ \omega_{oi} \approx \dfrac{1}{2}\,\partial_t v_i \\ \omega_{ij} \approx \dfrac{1}{2}\,[\partial_i v_j + \partial_j v_i] = v_{ij} \end{cases} \qquad \omega^\rho_\rho = \operatorname{div} \vec{v}$$

$$H^{\alpha\beta} : \begin{cases} H^{oo} = -1 + (\omega^o)^2 \approx 0 \\ H^{oi} = \omega^o\, \omega^i \approx v^i \\ H^{ij} = \delta^{ij} + \omega^i\, \omega^j \approx \delta^{ij} \end{cases}$$

$$\omega^{\alpha\beta\perp(0)}: \begin{cases} \omega^{\alpha o\perp(0)} & \approx H^{\alpha k} H^{ol} (v_{kl} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \operatorname{div} \vec{v}) = 0 \\ \omega^{ij\perp(0)} & \approx H^{ik} H^{jl} (v_{kl} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \operatorname{div} \vec{v}) \\ & = v^{ij} - \frac{1}{3} \delta^{ij} \operatorname{div} \vec{v} \end{cases}$$

$$q^\alpha \approx \partial^\alpha T + v^\alpha \partial_t T + T \partial_t \omega^\alpha$$

$$q^\alpha : \begin{cases} q^o \approx 0 \\ q^i \approx \partial^i T + T \partial_t v^i \end{cases}$$

$$T^{\alpha\beta} : \begin{cases} T^{oo} \approx \rho \\ T^{oi} \approx (p+\rho) v^i - \kappa (\partial^i T + T \partial_t v^i) - \lambda (\partial^i \mu + \mu \partial_t v^i) \\ T^{ij} \approx p \delta^{ij} - 2 \eta [v^{ij} - \frac{1}{3} \delta^{ij} \operatorname{div} \vec{v}] - \zeta \delta^{ij} \operatorname{div} \vec{v} \end{cases}$$

$$j_N^\alpha : \begin{cases} j_N^o \approx n \\ j_N^i \approx n v^i - \frac{\lambda}{\mu} (\partial^i \mu + \mu \partial_t v^i) \end{cases}$$

$$j_S^\alpha : \begin{cases} j_S^o \approx s \\ j_S^i \approx s v^i - \frac{\kappa}{T} (\partial^i T + T \partial_t v^i) \end{cases}$$

De plus, dans le cadre de l'approximation linéaire : i (x) ≈ 0.
Nous obtenons ainsi les <u>équations de mouvement linéarisées</u> :

I) $\partial_\alpha j_N^\alpha = 0 \Rightarrow$ $\boxed{\partial_t n_1 + n_o \operatorname{div} \vec{v} - (\frac{\lambda}{\mu})_o \Delta\mu_1 - \lambda_o \operatorname{div} \partial_t \vec{v}_1 = 0}$

II) $\partial_\alpha j_S^\alpha = i \Rightarrow$ $\boxed{\partial_t s_1 + s_o \operatorname{div} \vec{v} - (\frac{\kappa}{T})_o \Delta T_1 - \kappa_o \operatorname{div} \partial_t \vec{v}_1 = 0}$

III-a) $\partial_\alpha T^{\alpha o} = 0 \Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{c} \partial_t \rho_1 + (p+\rho)_o \operatorname{div} \vec{v}_1 - \kappa_o (\Delta T_1 + T_o \operatorname{div} \partial_t \vec{v}_1) \\ - \lambda_o (\Delta\mu_1 + \mu_o \operatorname{div} \partial_t \vec{v}_1) = 0 \end{array}}$

III-b) $\quad \partial_\alpha T^{\alpha i} = 0 \Rightarrow$

$$\partial_t \left[(p+\rho)_o v^i - \kappa_o (\partial^i T + T_o \partial_t v^i) - \lambda_o (\partial^i \mu + \mu_o \partial_t v^i)\right]$$

$$+ \partial_j \left[p\,\delta^{ij} - (\zeta_o - \frac{2}{3}\,\eta_o)\,\delta^{ij}\ \mathrm{div}\,\vec{v}\ - 2\,\eta\, v^{ij}\right] = 0$$

Mais $\quad 2\partial_j v^{ij} = \partial_j \partial^i v^j + \partial_j \partial^j v^i = \partial^i (\mathrm{div}\,\vec{v}\,) + \Delta v^i$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c}(p_o + \rho_o)\,\partial_t\,\vec{v}_1 - (\kappa_o\, T_o + \lambda_o\, \mu_o)\,\partial_t^2\,\vec{v}_1 - \kappa_o\,\vec{\mathrm{grad}}\,\partial_t\,T_1 - \lambda_o\,\vec{\mathrm{grad}}\,\partial_t\,\mu_1 + \\ + \vec{\mathrm{grad}}\,p_1 - (\zeta_o + \frac{1}{3}\,\eta_o)\,\vec{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,\vec{v}_1) - \eta_o\,\Delta\,\vec{v}_1 = 0\end{array}}$$

(Equation que l'on peut comparer avec l'équation 2.7.6. du polycopié de M. Châtelain avec $\kappa_o = \lambda_o = 0$ et $\zeta_o + \frac{1}{3}\,\eta_o = \eta_o^* + \eta_o$).

Il faudra encore exprimer $\Delta\mu_1, \Delta T_1, \vec{\mathrm{grad}}\,p_1$ en terme de n_1, s_1 et de leurs dérivées:

$$\Delta\mu_1 = (\rho_{nn})_o\,\Delta n_1 + (\rho_{ns})_o\,\Delta s_1$$

$$\Delta T_1 = (\rho_{sn})_o\,\Delta n_1 + (\rho_{ss})_o\,\Delta s_1$$

$$\vec{\mathrm{grad}}\ p_1 = s\vec{\mathrm{grad}}\ T_1 + n\vec{\mathrm{grad}}\ \mu_1$$

$$= s\left[\rho_{ss}\,\vec{\mathrm{grad}}\,s + \rho_{sn}\,\vec{\mathrm{grad}}\,n\right] + n\left[\rho_{ns}\,\vec{\mathrm{grad}}\,s + \rho_{nn}\,\vec{\mathrm{grad}}\,n\right]$$

$$\approx (s\,\rho_{ss} + n\,\rho_{ns})_o\,\vec{\mathrm{grad}}\,s_1 + (s\,\rho_{sn} + n\,\rho_{nn})_o\,\vec{\mathrm{grad}}\,n_1.$$

Finalement, on peut toujours décomposer $\vec{v}_1$ en une <u>partie longitudinale</u> $\vec{v}_{\parallel}$ et <u>une partie transversale</u> $\vec{v}_{\perp}$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$$

telles que : $\begin{cases} \vec{rot}\ \vec{v}_{\parallel} = 0 & \text{soit} \quad \vec{v}_{\parallel} = \vec{grad}\ \varphi \\ \text{div}\ \vec{v}_{\perp} = 0 & \text{soit} \quad \vec{v}_{\perp} = \vec{rot}\ \vec{a} \end{cases}$

L'équation III-b est alors équivalente aux deux équations suivantes :

$$(p+\rho)_o\, \partial_t \vec{v}_{\perp} - (\kappa T + \lambda\mu)_o\, \partial_t^2\ \vec{v}_{\perp} - \eta_o\, \Delta \vec{v}_{\perp} = 0$$

$$(p+\rho)_o\, \partial_t(-\varphi) - (\kappa T + \lambda\mu)_o\, \partial_t^2(-\varphi) - \kappa_o\left[(\rho_{ss})_o\, \partial_t s_1 + (\rho_{sn})_o\, \partial_t n_1\right]$$

$$-\lambda_o\left[(\rho_{ns})_o\, \partial_t s_1 + (\rho_{nn})_o\, \partial_t n_1\right] +$$

$$+ (s\,\rho_{ss} + n\,\rho_{ns})_o\, s_1 + (s\,\rho_{sn} + n\,\rho_{nn})_o\ n_1$$

$$-(\zeta_o + \frac{4}{3}\eta_o)\ \Delta(-\varphi) = 0.$$

7.9.2. <u>Ondes élastiques</u> (vitesse longitudinale)

Posons $\kappa_o = \lambda_o = 0$, c'est-à-dire que l'on néglige les courants de chaleur et de diffusion. Dans ce cas, les équations linéarisées sont :

I) $\partial_t n_1 - n_o\, \Delta\varphi = 0$

II) $\partial_t s_1 - s_o\, \Delta\varphi = 0$

III-b) $m_o\, \partial_t^2\ \varphi - (s\,\rho_{ss} + n\rho_{ns})_o\, \partial_t s_1 - (s\,\rho_{sn} + n\rho_{nn})_o\, \partial_t n_1 - (\zeta_o + \frac{4}{3}\eta_o)\ \Delta\, \partial_t \varphi = 0$

soit : $\boxed{\partial_t^2\ \varphi - c_{\parallel}^2\ \ \Delta\varphi - \frac{1}{m_o}\ (\zeta_o + \frac{4}{3}\eta_o)\ \Delta\, \partial_t\, \varphi = 0}$

$$c_{\parallel}^2 = \frac{1}{m_o}\ (s^2\,\rho_{ss} + 2\,n\,s\ \rho_{ns} + n^2\,\rho_{nn})_o$$

$$m_o = (s\,\rho_s + n\,\rho_s)_o\,.$$

Dans le cas du fluide parfait ($\xi_0 = \eta_0 = 0$), les ondes ne sont pas amorties et se propagent à la vitesse $c_{\parallel} < 1$; dans le cas de fluide visqueux il y a amortissement.

7.9.3. Vitesse transverse

$$\boxed{(p+\rho_E)_o\, \partial_t \vec{v}_\perp - (\kappa\, T + \lambda\mu)_o\, \partial_t^2\ \vec{v}_\perp - \eta_o\, \Delta \vec{v}_\perp = 0}$$

• Si $\quad \kappa_o = \lambda_o = 0 \Rightarrow \quad \partial_t \vec{v}_\perp - \dfrac{\eta_o}{m_o}\ \Delta \vec{v}_\perp = 0$

Cette dernière équation est identique à "l'équation de la chaleur" (§ 7.9.4)

• Si $\quad \eta_o = 0 \Rightarrow \partial_t \vec{v}_\perp - \left(\dfrac{\kappa\, T + \lambda\mu}{p+\rho_E}\right)_o \partial_t^2\ \vec{v}_\perp = 0$

Dans ce cas, $\partial_t\ \vec{v}_\perp$ devient infini quand $t \to \infty$, ce qui est non-physique.

7.9.4. Courant de chaleur

Pour étudier le courant de chaleur, on considère le cas où la vitesse longitudinale est nulle $(\mathrm{div}\, \vec{v} = 0)$, et $n(x) = n_o$, $\lambda_o = 0$.

I) est satisfait

II) $\boxed{\partial_t s_1 - \left(\frac{\kappa}{C}\right)_o \Delta s_1 = 0}$ "Equation de la chaleur"

$$C = T\, \frac{\partial s}{\partial T} = \text{capacité calorifique}$$

La solution de l'équation de la chaleur est:

$$s(t, \vec{x}) = \int d^3y\ K(\vec{x} - \vec{y}\ ; t)\, s_1(0, \vec{y}) \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

où $\quad K(\vec{z}\ , t) = \left[4\pi \left(\frac{\kappa}{C}\right)_o t\right]^{-3/2} \exp\left[-\dfrac{\vec{z}^{\,2}}{4\left(\frac{\kappa}{C}\right)_o t}\right]$

III-a) $\partial_t \rho_E - \kappa_o \, \Delta T_1 = 0$

mais $\partial_t \rho_E = \rho_s \partial_t s = T \dfrac{\partial s}{\partial T} \partial_t T = C \partial_t T$

d'où $\partial_t T_1 - (\dfrac{\kappa}{C})_o \, \Delta T_1 = 0$

soit $T_1 (t, \vec{x}) = \int d^3 y \; K(\vec{x} - \vec{y} \; ; t) \, T_1 (0, \vec{y}) \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} 0$

III-b) $\varphi = 0$ et $n_1 = 0 \Rightarrow$

$$- \kappa_o (\rho_{ss})_o \, \partial_t s_1 + (s \, \rho_{ss} + n \, \rho_{ns})_o \, s_1 = 0 .$$

On remarque que cette équation ne peut pas être satisfaite par la solution de l'équation de la chaleur. Par conséquent, **il ne peut pas y avoir de propagation de chaleur sans l'apparition d'ondes élastiques.**

(7.8) $\Rightarrow \quad j_{N,(o)}(x) \stackrel{*}{=} (c\,n(x), \vec{o})$ $\qquad\qquad j_{S,(o)}(x) \stackrel{*}{=} (c\,s(x), \vec{o})$

D'où :	$n(x)$	=	**densité de particules**	p.r. au RLR
	$s(x)$	=	**densité d'entropie**	p.r. au RLR
$T^{oo} \stackrel{*}{=} \rho_E \Rightarrow$	$\rho_E(x)$	=	**densité d'énergie**	p.r. au RLR
$T = \dfrac{\partial \rho_E}{\partial s} \Rightarrow$	$T(x)$	=	**température**	p.r. au RLR
$\mu = \dfrac{\partial \rho_E}{\partial n} \Rightarrow$	$\mu(x)$	=	**potentiel chimique**	p.r. au RLR
$-p = \rho_E - Ts - \mu n \Rightarrow$	$p(x)$	=	**pression**	p.r. au RLR
$m\,c^2 = \rho_E + p \Rightarrow$	$m(x)$	=	**densité d'enthalpie**	p.r. au RLR

D'autre part, l'équation de continuité :

$$\partial_\alpha \, T^{\alpha i} = 0$$

implique :

$$\frac{1}{c}\,\partial_t\,[m\,\omega^o\,\omega^i] + \partial_j\,[m\,\omega^j\,\omega^i] + \partial^i p = 0$$

$$\Rightarrow \quad m\,\frac{\omega^{o2}}{c^2}\,\partial_t v^i + v^i\,\partial_t\left[m\,\frac{\omega^{o2}}{c^2}\right] + \omega^i\,\partial_j\,(m\,\omega^j) + m\,\omega^j\,\partial_j\,\omega^i + \partial^i p = 0$$

En conclusion, par rapport au RLR au point x du fluide :

$$m\,\partial_t v^i = -\,\partial^i p \tag{7.12}$$

d'où $\quad m(x) =$ <u>densité de masse</u> (au repos) p.r. au RLR.

Finalement de (7.8), $\qquad i_{(o)}(x) \equiv 0$

on conclut que <u>l'irréversibilité du fluide parfait est identiquement nulle</u>.

<u>Remarque</u> : Par définition,

$$\boxed{\omega^\alpha\,\partial_\alpha\,f = \dot{f}} \tag{7.13}$$

est la dérivée hydrodynamique de f.

6.3.3. Equations d'évolution du fluide parfait [c = 1]

1) $\partial_\alpha (n\,\omega^\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{n}{\sqrt{1-\vec{v}^2}}\right) + \vec{\nabla}\left(\frac{n\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2}}\right) = 0}$ (7.14)

"Equation de continuité de la quantité de substance"

2) $$\partial_\alpha (s\,\omega^\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\alpha\left(\frac{s}{n}\,n\,\omega^\alpha\right) = 0 = n\,\omega^\alpha\,\partial_\alpha\left(\frac{s}{n}\right) + \frac{s}{n}\,\partial_\alpha (n\,\omega^\alpha)$$
$$= n\,\omega^\alpha\,\partial_\alpha\left(\frac{s}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{s}{n}\right) + \vec{v}\,.\,\vec{\nabla}\left(\frac{s}{n}\right) = 0} \quad \text{soit} \quad \frac{d}{d\tau}\left(\frac{s}{n}\right) = 0 \qquad (7.15)$$

"Equation de continuité de l'entropie"

3) $$\partial_\alpha (T^{\alpha\beta}_{(o)}) = 0 = \partial_\alpha \left[\frac{m}{n}\,n\,\omega^\alpha\,\omega^\beta\right] + \partial^\beta p =$$
$$= n\,\omega^\alpha\,\partial_\alpha \left[\frac{m}{n}\,\omega^\beta\right] + \frac{m}{n}\,\omega^\beta\,\partial_\alpha (n\,\omega^\alpha) + \partial^\beta p$$
$$= n\,\omega^\alpha\,\partial_\alpha \left(\frac{m}{n}\,\omega^o\,v^\beta\right) + \partial^\beta p\,.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_\alpha\,T^{\alpha o}_{(o)} = 0 = n\,\omega^\alpha\,\partial_\alpha\left(\frac{m}{n}\,\omega^o\right) - \partial_t\,p \\ \partial_\alpha\,T^{\alpha i}_{(o)} = 0 = m\,\omega^{o2}\left[\partial_t\,v^i + v^j\,\partial_j\,v^i\right] + n\,\omega^\alpha\,v^i\,\partial_\alpha\left(\frac{m}{n}\,\omega^o\right) + \partial^i\,p \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad m\,\omega^{o2}\,[\partial_t v^i + v^j\,\partial_j\,v^i] = -\,v^i\,\partial_t\,p - \partial^i\,p$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\partial_t\,\vec{v} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\,\frac{1-\vec{v}^2}{\rho_E + p}\left[\vec{\nabla}\,p + \vec{v}\,\partial_t\,p\right]} \qquad (7.16)$$

"Equation d'Euler"

$$\left[\vec{v}^2 \equiv \vec{v}^2/c^2\ ;\ \vec{v}\,\partial_t\,p = \frac{\vec{v}}{c^2}\,\partial_t\,p\right]$$

(Comparer avec Landau et Lifshitz, p. 3; on remarque de nouveau que $\rho_E + p$ = masse spécifique).

4) <u>Thermodynamique</u> : Soit l'équation d'état $\rho_E = \rho_E(n, s)$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\rho_E + p = s\,\frac{\partial \rho_E}{\partial s} + n\,\frac{\partial \rho_E}{\partial n} = m(n, s)} \tag{7.17}$$

En conclusion, connaissant la fonction $\rho_E = \rho_E(n, s)$ on aura ainsi 5 équations aux dérivées partielles pour les 5 variables $\{\vec{v}, n, s\}$ (la sixième équation sera alors automatiquement satisfaite).

6.3.4. <u>Illustration</u>

Considérons le cas d'un fluide constitué de <u>particules ponctuelles identiques</u> de masse M, dont les seules interactions sont des collisions localisées dans R^4 :

$$T^{\alpha\beta}(x) = \sum_N \frac{p_N^\alpha p_N^\beta}{E_N}\,\delta^3(\vec{x} - \vec{x}_N(t)) \quad ; \; E_N = \sqrt{\vec{p}_N^{\,2} + M^2}$$

Par rapport au référentiel local de repos $\tilde{R}(x)$

$$\rho_E(x) = \tilde{T}^{oo}(x) = \sum_N \tilde{E}_N\,\delta^3(\vec{x} - \vec{x}_N(t)) \tag{7.18}$$

$$n(x) = \sum_N \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_N(t))$$

$$p(x) = \frac{1}{3}\sum_i \tilde{T}^{ii}(x) = \frac{1}{3}\sum_N \frac{\vec{p}_N^{\,2}}{\tilde{E}_N}\,\delta^3(\vec{x} - \vec{x}_N(t)) \tag{7.19}$$

($\vec{p}_N$ relativement à $\tilde{R}$).

Mais $\quad |\vec{p}_N|^2 \leq \tilde{E}_N^2$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{0 \leq p(x) \leq \frac{1}{3}\sum_N \tilde{E}_N\,\delta^3(\vec{x} - \vec{x}_N(t)) \equiv \frac{1}{3}\,\rho_E(x)} \tag{7.20}$$

Gaz froid (Non relativiste)

$$|\vec{p}_N| << M \qquad \text{d'où} \qquad \tilde{E}_N \approx M + \frac{\vec{p}_N^{\,2}}{2M}$$

$$(7.18) \qquad \Rightarrow \quad \rho_E(x) \approx M\, n(x) + \frac{1}{2} \sum_N \frac{\vec{p}_N^{\,2}}{M}\, \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_N(t))$$

$$(7.19) \qquad \Rightarrow \quad p(x) \approx \frac{1}{3} \sum_N \frac{\vec{p}_N^{\,2}}{M}\, \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_N(t))$$

d'où
$$\boxed{\underset{\substack{\text{densité}\\ \text{d'énergie}}}{\underset{\uparrow}{\rho_E(x)}} \approx \underset{\substack{\text{masse d'une}\\ \text{particule}}}{\underset{\uparrow}{M}}\, c^2 \underset{\substack{\text{densité de}\\ \text{substance}}}{\underset{\uparrow}{n(x)}} + \frac{3}{2} \underset{\text{pression}}{\underset{\uparrow}{p(x)}}} \qquad (7.21)$$

Gaz chaud (Relativiste; ou "rayonnement pur" $M = 0$)

$$|\vec{p}_N| >> M \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{E}_N \equiv |\vec{p}_N| >> M$$

$$\overset{(7.18)-(7.19)}{\Rightarrow} p(x) \approx \frac{1}{3} \sum_N \tilde{E}_N\, \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_N(t)) = \frac{1}{3}\, \rho_E(x) >> M \cdot n(x)$$

c'est à dire $\boxed{\rho_E(x) \approx 3\, p(x)} \quad >> M\, n(x)$ (7.22)

Pour être plus général, on considère souvent l'équation d'état

$$\boxed{\rho_E(x) = M c^2 n(x) + (\gamma - 1)^{-1}\, p(x)} \qquad \gamma \geq \frac{4}{3} \qquad (7.23)$$

c'est-à-dire que l'énergie interne $\rho_E - M c^2 n$ est proportionnelle à la pression.

$$\begin{cases} \gamma = \frac{5}{3} & \text{pour un gaz froid} \\ \gamma = \frac{4}{3} & \text{pour un gaz chaud ou le rayonnement pur} \end{cases}$$

et les autres valeurs de γ ($\gamma \geq 4/3$) permettent de décrire une classe plus générale de fluide.

Cherchons alors les équations de mouvement du fluide d'équation d'état donnée par (7.23).

De $$\rho_E + p = T s + \mu n$$

$$d\rho_E = T\, ds + \mu\, dn$$

et $$dp = s\, dT + n\, d\mu$$

il vient $$d\left(\frac{\rho_E}{n}\right) = T\, d\left(\frac{s}{n}\right) - p\, d\left(\frac{1}{n}\right)$$

En utilisant (7.23) $\Rightarrow$ $$T\, d\left(\frac{s}{n}\right) = p\, d\left(\frac{1}{n}\right) + (\gamma-1)^{-1}\, d\left(\frac{p}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad T\, d\left(\frac{s}{n}\right) = \frac{n^{\gamma-1}}{\gamma-1}\, d\left(\frac{p}{n^\gamma}\right) \tag{7.24}$$

[En effet, $d\left(\frac{p}{n}\, n^{-(\gamma-1)}\right) = n^{-(\gamma-1)}\, d\left(\frac{p}{n}\right) + \frac{p}{n}\, \frac{\gamma-1}{n^{(\gamma-2)}}\, d\left(\frac{1}{n}\right)$]

En conséquence, de (7.15) $$T \frac{d}{d\tau}\left(\frac{s}{n}\right) = T\, \omega^\alpha\, \partial_\alpha \left(\frac{s}{n}\right) = 0,$$

il vient : $$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{p}{n^\gamma}\right) = 0 = \omega^\alpha\, \partial_\alpha \left(\frac{p}{n^\gamma}\right) \ (*)$$

d'où
$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{n}{\sqrt{1-\vec{v}^2}}\right) + \vec{\nabla}\left(\dfrac{n\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2}}\right) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{p}{n^\gamma}\right) + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\left(\dfrac{p}{n^\gamma}\right) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial t}\vec{v} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\dfrac{1-\vec{v}^2}{\rho_E + p}\left[\vec{\nabla} p + \vec{v}\,\dfrac{\partial p}{\partial t}\right] \end{cases}$$

(*) $\Rightarrow$ $p = \text{cte}\, n^\gamma$ le long de la trajectoire : c'est l'équation d'état du "<u>Gaz Polytrope</u>" ;
$$\rho_E(n, s) = M c^2 n + \frac{1}{\gamma-1}\, \varphi\left(\frac{s}{n}\right) n^\gamma$$

7.4. Fluides visqueux

Dans cette section, nous donnons sans démonstration la forme la plus générale de $T^{\alpha\beta}$ satisfaisant notre postulat, puis nous calculons j_N^α , j_S^α , et l'irréversibilité. [cf E.C.G. Stueckelberg].

6.4.1. <u>Viscosité longitudinale</u> ζ (parfois on pose : $\zeta = \eta^* + \frac{2}{3}\eta$)

Introduisons les tenseurs : $\omega_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}(\partial_\alpha \omega_\beta + \partial_\beta \omega_\alpha)$

et $H_{(\alpha\beta)} = \eta_{\alpha\beta} + \omega_\alpha \omega_\beta$

Nous avons les propriétés suivantes :

i) $H_{\alpha\beta}\,\omega^\beta = 0$ [car : $H_{\alpha\beta}\,\omega^\beta = \omega_\alpha + \omega_\alpha\,\omega_\beta\,\omega^\beta = 0$]

Soit v un vecteur contravariant quelconque.

Posons $v = v_\parallel + v_\perp$ où $v_\parallel = -(v\,.\,\omega)\,\omega$

c.à.d. $v_\parallel\,.\,\omega = v\,.\,\omega$

$v_\perp = v + (v\,.\,\omega)\,\omega$

et $v_\perp\,.\,\omega = 0$

alors $H_{\alpha\beta}\,v^\beta = H_{\alpha\beta}\,v_\perp^\beta = \eta_{\alpha\beta}\,v_\perp^\beta + \omega_\alpha\,(\omega\,.\,v_\perp)$

c.à.d. $H_{\alpha\beta}\,v^\beta = v_{\perp,\alpha}$.

$H_{\alpha\beta}$ est le projecteur sur l'hypersurface perpendiculaire à ω.

ii) $H_{\alpha\beta}\,\omega^{\alpha\beta} = \omega^\rho{}_\rho$ [car : $H_{\alpha\beta}\,\partial^\alpha\omega^\beta = \partial_\beta\,\omega^\beta + \omega_\alpha\,\omega_\beta\,\partial^\alpha\omega^\beta$]