Notions et résultats importants de la théorie des groupes

D'après le cours de W.O. Amrein, UNIGE.

25 mars 2000

Table des matières

1 Notions de base et exemples

Dans ce chapitre on va donner quelques définitions de base et ensuite on va traiter des exemples comme le groupe Euclidien, le groupe de Poincaré, le groupe $SO(3)$ ainsi que $SU(2)$.

1.1 Quelques définitions

Définition 1.1 *Un **groupe** est un ensemble G muni d'une loi de composition $\circ$ associative, possédant l'élément neutre et l'élément inverse.*

Définition 1.2

*a) Un **sous-groupe** G_0 d'un groupe G est une collection non-vide d'éléments de G qui est un groupe pour la loi de composition induite par G.*

*b) Un sous-groupe G_0 de G est dit **propre** si $G_0 \neq G$ et **non-trivial** si $G_0 \neq \{e\}$.*

Définition 1.3 *Soit G un groupe. Deux éléments a et b de G sont appelés **conjugués** si $\exists c \in G$ tq. $b = c \circ a \circ c^{-1}$. Avec ceci on définit aussi la **classe de conjugaison** de b comme l'ensemble des éléments de G conjugués à b.*

Définition 1.4 *$a \circ G_0 \circ a^{-1}$ est le **sous-groupe conjugué** à G_0. Si $a \circ G_0 \circ a^{-1} = G_0, \forall a \in G$, alors G_0 est appelé sous-groupe **normal.***

Remarque 1.5 *Une condition suffisante pour que G_0 soit normal est : $a \circ G_0 \circ a^{-1} \subset G_0, \quad \forall a \in G$.*

Définition 1.6 *Le **centre** est $Z(G) \doteqdot \{b \in G \mid a \circ b = b \circ a, \forall a \in G\}$.*

Définition 1.7 *Une **classe à gauche** mod G_0 de a est définie par*

$$_{G_0}[a] \doteqdot \{b \in G \mid a \overset{g}{\sim} b \Leftrightarrow a^{-1} \circ b \in G_0, \ i.e.\ \exists c \in G_0 \ tq.\ b = a \circ c\}$$

Remarque 1.8 *L'ensemble des classes à gauche mod G_0 constitue une partition de G.*

Définition 1.9 *Soit $G_0 \subset G$ normal et $[a]_{G_0} \circ [b]_{G_0} \doteqdot [a \circ b]_{G_0}$ la loi de composition des classes d'équivalence. Alors $G/G_0 \doteqdot \{Classes\ modulo\ G_0\}$ muni de cette loi de composition est le **groupe quotient** de G par G_0.*

Définition 1.10

*a) Un groupe G est appelé groupe **simple** si $\{e\}$ est le seul sous-groupe propre normal de G.*

*b) Un groupe G est appelé groupe **semi-simple** si $\{e\}$ est le seul sous-groupe propre normal abélien de G.*

Définition 1.11 *Soit G_1 et G_2 des sous-groupes d'un groupe G. On dit que G est le **produit direct** de G_1 et G_2, noté $G_1 \otimes G_2$, si :*

a) $\forall a \in G$, $\exists$ une unique décomposition *en $a = a_1 \circ a_2$ avec $a_1 \in G_1$ et $a_2 \in G_2$.*

b) les éléments de G_1 commutent *avec ceux de G_2 : $a_1 \circ a_2 = a_2 \circ a_1, \forall a_1 \in G_1$ et $\forall a_2 \in G_2$.*

Théorème 1.12 *Soit G_1 et G_2 des sous-groupes d'un groupe G. Alors*

$$G = G_1 \otimes G_2 \iff \begin{cases} \forall a \in G, \exists \text{ décomposition en } a = a_1 \circ a_2 \text{ avec } a_1 \in G_1 \text{ et } a_2 \in G_2 \\ G_1 \cap G_2 = e \\ G_1 \text{ et } G_2 \text{ sont normaux} \end{cases}$$

Remarque 1.13 *Soient G et G' deux groupes et $\mathcal{G} \doteqdot \{(a,a'), a \in G \text{ et } a' \in G'\}$ muni de la loi de composition $(a,a') \circ (b,b') \doteqdot (a \circ b, a' \circ b')$. Alors $G_1 \doteqdot \{(a,e'), a \in G\} \cong G$ et $G_2 \doteqdot \{(e,a'), a' \in G'\} \cong G'$ et $\mathcal{G} = G_1 \otimes G_2$. Dans ce sens $\mathcal{G}$ est le produit direct de G et G'.*

Définition 1.14 *Soit G_1 et G_2 des sous-groupes d'un groupe G. On dit que G est le **produit semi-direct** de G_1 et G_2, noté $G = G_1 \odot G_2$, si :*

- *$\forall a \in G, \exists$ une décomposition en $a = a_1 \circ a_2$ avec $a_1 \in G_1$ et $a_2 \in G_2$*
- *$G_1 \cap G_2 = e$*
- *G_1 est normal.*

Proposition 1.15 *Soient G et G' des groupes et $h : G \to G'$ un homomorphisme, désignons e et e' sont les éléments neutres de G et G'.*

a) On a $h(e) = e'$ et $h(a^{-1}) = h(a)^{-1} \quad \forall a \in G$.

b) Si G_0 est un sous-groupe de G, alors $h(G_0)$ est un sous-groupe de G'.

c) On définit le noyau *$K = \ker h$ de h par*

$$K = \ker h \doteqdot \{a \in G \ tq.\ h(a) = e'\}$$

K est un sous-groupe normal *de G et le groupe quotient G/K est isomorphe au sous-groupe $h(G)$ de G'. L'isomorphisme $\rho : G/K \to h(G)$ est donné par*

$$\rho\left([a]_K\right) = h(a)$$

1.2 Groupes de transformations

Définition 1.16 *Soit M un ensemble et G un groupe agissant sur M, i.e. chaque $a \in G$ définit une application $M \to M$ tq. :*

$$a(bx) = (a \circ b)x \quad \text{et} \quad ex = x \quad \forall a, b \in G, \forall x \in M$$

*Dans ce cas on parle de **groupe de transformations**.*

Définition 1.17 *Soit un groupe de transformations. On définit l'**orbite** $\mathcal{O}(x)$ de x sous G :*

$$\mathcal{O}(x) \doteqdot \{x' \in M | x' = ax \text{ pour un } a \in G\}$$

Définition 1.18 *Soit un groupe de transformations. On définit le **stabilisateur** $\mathcal{S}(x)$ (dans G) d'un point x fixé de M, l'ensemble des éléments de G qui laissent x invariant :*

$$\mathcal{S}(x) = \{a \in G | ax = x\}$$

Proposition 1.19

1. *Chaque orbite est invariante sous G.*
2. *M est la réunion de toutes les orbites.*
3. *Si existe une* unique *orbite, on dit que G agit* transitivement *sur M.*

Proposition 1.20

1. *$\mathcal{S}(x)$ est un sous-groupe de G.*
2. *Si x, y appartiennent à la même orbite, alors $\mathcal{S}(x)$ et $\mathcal{S}(y)$ sont* isomorphes.
3. *Les points de $\mathcal{O}(x)$ sont en relation biunivoque avec les classes à gauche mod $\mathcal{S}(x)$, i.e. $x' \in \mathcal{O}(x) \iff \{\exists b \in G \mid bx = x'\}$*

Corollaire 1.21 *Soit G un groupe de transformations fini et $x \in M$. Soit g l'ordre de G, $g(x)$ l'ordre du stabilisateur $\mathcal{S}(x)$ et $p(x)$ le nombre de points de l'orbite $\mathcal{O}(x)$. Alors*

$$g(x)p(x) = g$$

1.3 Le groupe Euclidien

Définition 1.22 *Le **groupe Euclidien** $\mathbb{E}(3)$ est formé de toutes les transformations $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ laissant invariant la distance $d(P,Q)$ entre toute paire de points P, Q.*

Ce groupe est le produit semi-direct de deux autres groupes : $\mathbb{E}(3) = \mathcal{T}(3) \odot O(3)$.

La transformation de $\mathbb{R}^3$ associée à $(a, R), R \in O(3), a \in \mathcal{T}(3)$ est $(a, R)x \doteqdot Rx + a$ et la loi de composition est :

$$(a_1, R_1) \circ (a_2, R_2) = (a_1 + R_1 a_2, R_1 R_2)$$

L'élément neutre est $(0, \mathbb{1})$ et l'inverse $(a, R)^{-1} = (-R^{-1}a, R^{-1})$

Définition 1.23 *Le **groupe des translations** de $\mathbb{R}^\nu$, noté $\mathcal{T}(\nu) \equiv \mathcal{T}(\mathbb{R}^\nu)$, est constitué des transformations suivantes $\mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}^\nu$:*

$$x \mapsto x + a, \text{ avec } a \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^\nu)$$

Définition 1.24 *Une **rotation** R est une transformation linéaire $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ qui laisse invariant le produit scalaire $x \cdot y$ entre vecteurs (donc aussi la longueur) : $Rx \cdot Ry = x \cdot y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3$*
*Le **groupe des rotations** $O(3)$ est formé de l'ensemble des rotations.*

Le groupe des rotations est un groupe non abélien. Il possède le sous-groupe simple $SO(3)$ des **rotations propres**, i.e. des rotations avec $det(R) = 1$. Les rotations tq. $det(R) = -1$ sont appelées **rotations impropres**. Toute rotation impropre R peut être décomposée en ΠR_0, où R_0 est une rotation propre et Π est la parité.

1.4 Rotations propres et $SU(2)$

On peut établir une correspondance un-à-deux entre l'ensemble des rotations propres $SO(3)$ et ceux de $SU(2)$ avec trace nulle. Rappelons que

$$U \in SU(2) \iff U = a_0 \mathbb{1} + ib\vec{\sigma}, a_0 \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^3 \text{ et } a_0^2 + b^2 = 1$$

Si $x \in \mathbb{R}^3$ on peut lui associer une matrice hermitique de trace nulle :

$$\boldsymbol{x} = x \cdot \sigma = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix}$$

De même si on a une matrice A hermitique de trace nulle on peut lui associer une vecteur $y \in \mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & -a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C} \iff y = (Re(b), -Im(b), a)$$

Maintenant on peut effectuer une rotation avec les matrices de $SU(2)$.
Soit $U \in SU(2)$, alors $U\boldsymbol{x}U^*$ est encore hermitique de trace nulle, donc définit un nouveau vecteur $x_U \in \mathbb{R}^3$. On a aussi : $x_U \cdot y_U = x \cdot y$, donc la correspondante $x \mapsto x_U$ est une rotation (propre).

Lemme 1.25 *Deux matrices* différentes *U_1 et U_2 de $SU(2)$ induisent la même transformation de $\mathbb{R}^3$, i.e. $U_1 \boldsymbol{x} U_1^* = U_2 \boldsymbol{x} U_2^*, \forall x \in \mathbb{R}^3 \iff U_1 = -U_2$.*

A chaque rotation propre (n, δ) où n est l'axe de rotation et δ l'angle, on peut associer une matrice $U(n, \delta) \in SU(2)$ en posant :

$$U(n, \delta) = \exp\left(-i\tfrac{\delta}{2} n \cdot \sigma\right) = \cos\left(\tfrac{\delta}{2}\right) \mathbb{1} - i \sin\left(\tfrac{\delta}{2}\right) n \cdot \sigma$$

Proposition 1.26 *Comme on a annoncé, on peut définir un homomorphisme surjectif $h : SU(2) \to SO(3)$, avec $Ker(h) = \{-\mathbb{1}, \mathbb{1}\}$ en posant les coefficients de la matrice R associée à $U \in SU(2)$: $R_{jk} = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\{\sigma_j U \sigma_k U^*\}$.*

Remarque 1.27 *Les classes d'équivalence des rotations sont les rotations d'angle fixé φ autour d'un axe quelconque. Ce résultat est utilisé pour déterminer les caractères $\chi^{(j)}(a)$ des représentations $D^{(j)}$ des rotations.*

1.5 Le groupe de Poincaré

Le groupe de Poincaré est l'analogue du groupe Euclidien, mais dans l'espace temps avec la métrique $g_{\mu\nu}$ donnée par :

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Définition 1.28 *Le **groupe de Poincaré** $\mathcal{P}$ est formé de toutes les transformations $\mathbb{M} \to \mathbb{M}$ laissant invariant la grandeur $(x-y)\cdot(x-y)$ pour tout couple de quadri-vecteurs $x, y \in \mathbb{M}$, $\mathbb{M}$ étant l'espace de Minkowsky.*

La transformation de $\mathbb{M}$ associée à $(a, \Lambda), \Lambda \in \mathcal{L}, a \in \mathcal{T}(4)$ est $(a, \Lambda)x \doteq \Lambda x + a$ et la loi de composition est :

$$(a_1, \Lambda_1) \circ (a_2, \Lambda_2) = (a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1 \Lambda_2)$$

L'élément neutre est $(0, \mathbb{1})$ et l'inverse $(a, \Lambda)^{-1} = (-\Lambda^{-1} a, \Lambda^{-1})$ Ce groupe est le produit semi-direct de deux autres groupes : $\mathcal{P} = \mathcal{T}(4) \odot \mathcal{L}$.

Définition 1.29 *Une **transformation de Lorentz** Λ est une application linéaire $\mathbb{M} \to \mathbb{M}$ laissant invariante la forme bilinéaire définie via le tenseur métrique g, i.e. $(\Lambda x)^\mu (\Lambda y)_\mu = x^\nu y_\nu, \forall x, y \in \mathbb{M}$. L'ensemble de ces transformations forme le **groupe de Lorentz** $\mathcal{L}$.*

Les matrices des transformations de Lorentz vérifient $\Lambda^T g \Lambda = g$. Cette expression pourrait être prise comme définition.

On peut distinguer quatre familles de transformations de Lorentz :

1) $\mathcal{L}_+^\uparrow$: $\mathrm{Det}(\Lambda) = +1$ et $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ qui contient l'identité (gr. de Lorentz restreint).
2) $\mathcal{L}_-^\uparrow$: $\mathrm{Det}(\Lambda) = -1$ et $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ qui contient la parité.
3) $\mathcal{L}_+^\downarrow$: $\mathrm{Det}(\Lambda) = +1$ et $\Lambda^0{}_0 \leq -1$ qui contient la réflexion totale.
4) $\mathcal{L}_-^\downarrow$: $\mathrm{Det}(\Lambda) = -1$ et $\Lambda^0{}_0 \leq -1$ qui contient le renversement du temps.

A chaque quadri-vecteur $x \in \mathbb{M}$ on associe une matrice hermitique

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_0 - x_3 & -x_1 + ix_2 \\ -x_1 - ix_2 & x_0 + x_3 \end{pmatrix} = x^\mu \sigma_\mu$$

Les rotations sont faites avec des matrices de $SL(2, \mathbb{C})$, par exemple un boost dans le plan $\{x_0, x_3\}$ correspond à la matrice : $A(\chi) = \begin{pmatrix} \exp(\chi/2) & 0 \\ 0 & \exp(-\chi/2) \end{pmatrix}$, i.e. $A(\chi)\boldsymbol{x}A(\chi)^* = [\Lambda(\chi)x]^\mu \sigma_\mu, \forall x \in \mathbb{M}$.

Proposition 1.30 *On peut définir un homomorphisme surjectif $h : SL(2, \mathbb{C}) \to \mathcal{L}_+^\uparrow$, avec $Ker(h) = \{-\mathbb{1}, \mathbb{1}\}$ en posant les coefficients de la matrice Λ associée à $A \in SL(2, \mathbb{C})$: $(\Lambda_A)^\nu{}_\mu = \frac{g_{\mu\mu} g_{\nu\nu}}{2} \mathrm{Tr}\{\sigma_\mu A \sigma_\nu A^*\}$.*

Remarque 1.31 *Chaque $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ peut être écrit dans la forme $\Lambda = \Lambda(R_1)\Lambda(\chi)\Lambda(R_2)$, où $\Lambda(R_1)$ et $\Lambda(R_2)$ décrivent des rotations propres de l'espace et $\Lambda(\chi)$ est un boost dans le plan $\{x_0, x_3\}$.*

Remarque 1.32 *Les matrices de Pauli standard sont ceux avec l'indice en haut : σ^μ.*

2 Représentations linéaires

Dans ce chapitre on va traiter les groupes finis. Dans le chapitre 4 on va traiter les groupes de Lie. On introduit la notion de représentation d'un groupe, de caractère et de moyenne invariante et on va donner les théorèmes d'orthogonalité. Ensuite on regarde la représentation d'un produit direct de groupes et du produit tensoriel de représentations, en introduisant les coefficients de Clebsch-Gordan. Enfin on donne deux théorèmes importants, les règles de sélection et le théorème de Wigner-Eckart, et on regarde les groupes de symétries en mécanique quantique et la relation entre projecteurs et représentations irréductibles.

2.1 Concepts introductifs

Définition 2.1 *Soit G un groupe. Une **représentation** (linéaire) de G est un homomorphisme U de G dans l'ensemble des applications linéaires $L(\mathcal{V})$ d'un espace vectoriel $\mathcal{V}$. On la note : $(U, \mathcal{V})$.*

Définition 2.2 *Une représentation U d'un groupe G est **fidèle** si $U(a) \neq I$, $\forall a \in G, a \neq e$.*

Proposition 2.3 *Si G est un groupe simple, toutes les représentations de G sont fidèles, à l'exception de la représentation triviale.*

Définition 2.4 *On dit que $(U, \mathcal{V})$ et $(U', \mathcal{V}')$ sont des **représentations équivalentes** si $\exists\, S : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ linéaire tq.*

$$U'(a) = SU(a)S^{-1}, \quad \forall a \in G$$

Définition 2.5 *Soit U est une représentation de dimension $n < \infty$ d'un groupe G. On appelle **caractère** d'un élément $a \in G$ le nombre $\chi(a)$ défini par :*

$$\chi(a) = \mathrm{Tr}\, U(a)$$

*On appelle **système de caractères** de la représentation U l'ensemble $\{\chi(a) | a \in G\}$.*

Proposition 2.6 *Si $n = \dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathcal{V}') < \infty$, alors :*

a) Dans une représentation U, tous les éléments d'une même classe de conjugaison de G ont même caractère : si $a \sim b$, alors $\chi(a) = \chi(b)$

b) Deux représentation équivalentes U et U' on des caractères identiques : $\chi(a) = \chi'(a), \forall a \in G$

Proposition 2.7 *Deux représentations fini-dimensionnelles complexes U_1 et U_2 d'un groupe fini sont équivalentes si et seulement si leurs systèmes de caractères sont identiques : $U_1 \sim U_2 \iff \{\chi(a) | a \in G\} = \{\chi'(a) | a \in G\}$*

Théorème 2.8 (Existence d'une représentation unitaire) *Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire, ou soit $\mathcal{V}$ un espace de Hilbert. Soit U une représentation d'un groupe fini G dans $\mathcal{V}$. Alors U est équivalente à une représentation unitaire U' de G dans $\mathcal{V}$: il existe une transformation de similarité $S : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ telle que $U'(a) = SU(a)S^{-1}$ est un opérateur unitaire pour chaque $a \in G$.*

Lemme 2.9 (Moyenne invariante) *Soit G un groupe fini d'ordre g e U une représentation de G dans $\mathcal{V}$.*

a) *Si $T \in L(\mathcal{V})$, posons*

$$M_G(T) \doteq \frac{1}{g}\sum_{b\in G} U(b)TU(b)^{-1}$$

Alors on a $\forall a \in G$:

$$U(a)M_G(T)U(a)^{-1} = M_G(T) \text{ et } U(a)M_G(T) = M_G(T)U(a)$$

b) *Si de plus $\mathcal{V}$ est muni d'un produit scalaire, soit*

$$\widetilde{M}_G(T) = \frac{1}{g}\sum_{b\in G} U(b)^* TU(b)$$

Alors on a $\forall a \in G$:

$$U(a)^*\widetilde{M}_G(T)U(a) = \widetilde{M}_G(T)$$

Si la représentation U est unitaire, alors $\widetilde{M}_G(T) = M_G(T)$.

2.2 Représentations réductibles et irréductibles

Définition 2.10 *Soit U une représentation d'un groupe G dans un espace vectoriel $\mathcal{V}$.*

a) *Un sous-espace $\mathcal{V}_0$ de $\mathcal{V}$ est dit **sous-espace invariant** sous U si $U(a)v \in \mathcal{V}_0$, $\forall v \in \mathcal{V}_0, \forall a \in G$*

b) *Un sous-espace invariant $\mathcal{V}_0$ est appelé **sous-espace invariant propre** si $\mathcal{V}_0 \neq \mathcal{V}$, **sous-espace invariant non-trivial** si $\mathcal{V}_0 \neq \{0\}$ et **sous-espace invariant minimal** si $\mathcal{V}_0$ ne contient aucun sous-espace invariant non-trivial sauf lui même.*

c) *La représentation U est **irréductible** si les seuls sous-espaces de $\mathcal{V}$ invariants sous U sont $\mathcal{V}$ lui-même et $\{0\}$.*

d) *La représentation U est **réductible** s'il existe un sous-espace invariant propre non-trivial.*

Proposition 2.11 *Toute représentation irréductible d'un groupe G fini est au plus de dimension g, g étant l'ordre de G.*

Définition 2.12 *Une représentation U d'un groupe G dans un sous-espace $\mathcal{V}$ est dite **complètement réductible** si, $\forall$ sous-espace invariant $\mathcal{V}_0$, $\exists$ un sous-espace complémentaire invariant.*

Proposition 2.13 *Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel de dimension finie, ou soit $\mathcal{V}$ un espace de Hilbert (aussi de dimension infinie).*

a) *Toute représentation U d'un* groupe fini *G dans $\mathcal{V}$ est* complètement réductible.

b) *Si $\mathcal{V}$ est muni d'un produit scalaire (p.ex. un Hilbert), alors* toute représentation unitaire *U d'un groupe G quelconque dans $\mathcal{V}$ est* complètement réductible. *Si de plus* $\dim \mathcal{V} < \infty$, *alors la décomposition de $\mathcal{V}$ en sous-espaces invariants* minimaux *$\mathcal{V} = \bigoplus_k \mathcal{V}_k$ est une somme directe* orthogonale.

c) *Soit $\mathcal{V}$ muni d'un produit scalaire, $(U, \mathcal{V})$ unitaire et $\mathcal{V}_0$ sous-espace de $\mathcal{V}$ invariant sous U. Alors $\mathcal{V}_0^\perp$ est invariant sous U et la restriction de U à $\mathcal{V}_0$ est une représentation unitaire de G dans $\mathcal{V}_0$.*

Voici deux corollaires du lemme de Schur (prop. 2.16, pag. 2.13).

Corollaire 2.14 *Soit U une représentation* irréductible *d'un groupe G dans un espace vectoriel* complexe *$\mathcal{V}$ de* dimension finie *et $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ linéaire qui commute avec chaque $U(a)$. Alors : $T = \lambda\mathbb{1}$, où λ est une constante (complexe).*

Corollaire 2.15 *Toute représentation irréductible* complexe *de dimension finie d'un groupe* abélien *est de dimension 1.*

Dans ces deux corollaires, il est nécessaire que les espaces vectoriels soient complexes. Un contre-exemple se trouve dans l'exercice (2.20.c).
Dans les prochaines deux résultats, sont présentées des règles pour déterminer les dimensions possibles des représentations irréductibles utilisées pour les caractères.

Proposition 2.16 *Soit G un groupe d'ordre $g < \infty$ et G_0 un sous-groupe abélien de G d'ordre g_0. Alors toute représentation irréductible complexe fini-dimensionnelle de G est au plus de dimension g/g_0.*

Théorème 2.17 *Soit G un groupe d'ordre g, $\eta_1, \ldots, \eta_N$ une énumération des classes d'équivalence de ses représentations irréductible complexes, et $n_k = \dim \eta_k$. Alors :*

a)

$$\sum_{k=1}^{N} n_k^2 = g$$

b) *Dans la décomposition de la représentation régulière en représentations irréductibles, il existe exactement n_k termes de classe η_k : la représentation régulière contient chaque représentation irréductible exactement n_k fois (modulo équivalences).*

2.3 Théorèmes d'orthogonalité

Proposition 2.18 *Soit U_1 et U_2 deux représentations* irréductibles complexes *d'un groupe G d'ordre fini g. Pour $a \in G$, désignons par $\chi_k(a)$ le caractère de a dans la représentation $U_k, k = 1, 2$. Alors*

$$\frac{1}{g}\sum_{b\in G}\overline{\chi_1(b)}\chi_2(b) = \begin{cases} 0 & \text{si } U_1 \text{ et } U_2 \text{ sont inéquivalents} \\ 1 & \text{si } U_1 \text{ et } U_2 \text{ sont équivalentes} \end{cases}$$

Théorème 2.19 *Soit U une représentation complexe fini-dimensionnelle d'un groupe fini d'ordre g. Si ν_k désigne le nombre de fois que la représentation irréductible U_k (où une repr. de la même classe d'équivalence η_k) apparaît dans U, alors on a :*

$$\nu_k = \frac{1}{g}\sum_{b\in G}\overline{\chi_k(b)}\chi(b)$$

On a donc que $U = \bigoplus_j \nu_j U_j$

Théorème 2.20 (Critère d'irréductibilité) *Une représentation* complexe U *d'un groupe* fini *d'ordre g est irréductible* $\iff \frac{1}{g}\sum_{b\in G}|\chi(b)|^2 = 1$.

Proposition 2.21 (Critère d'équivalence pour les représentations) *Deux représentations fini-dimensionnelles complexes U_1 et U_2 d'un groupe fini sont équivalentes $\iff$ leurs systèmes de caractères sont identiques.*

Théorème 2.22 *Pour tout groupe fini G, le nombre N de représentations complexes irréductibles inéquivalentes de G est identique avec le nombre M de classes de conjugaison.*

Corollaire 2.23 *Un groupe fini G est abélien $\iff$ toutes ses représentations complexes irréductibles sont de dimension 1.*

2.4 Tables de caractères

Avec les résultats de la proposition 2.16 et du théorème 2.17 on peut estimer les dimensions n_k possibles des représentations irréductibles. Si on détermine les classes de conjugaison du groupe, avec le théorème 2.22 on peut connaître le nombre de représentations irréductibles inéquivalentes.
Il existe une caractérisation moins complète, mais plus simple, qui est intrinsèque à la représentation (on n'utilise pas de base) : la donnée des caractères $\chi_k(a)$. On utilise une **table de caractères** :

	$1\mathcal{C}_1$	$d_2\mathcal{C}_2$	$\cdots$	$d_N\mathcal{C}_N$
η_1	$\chi_1^{(1)}$	$\chi_1^{(2)}$	$\cdots$	$\chi_1^{(N)}$
η_2	$\chi_2^{(1)}$	$\chi_2^{(2)}$	$\cdots$	$\chi_2^{(N)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
η_N	$\chi_N^{(1)}$	$\chi_N^{(2)}$	$\cdots$	$\chi_N^{(N)}$

Verticalement sont indiqués les N classes de représentations irréductibles (complexes) $\eta_1,\ldots,\eta_N$, horizontalement les N classes de conjugaison $\mathcal{C}_1,\ldots,\mathcal{C}_N$, chacune précédée du nombre d_k de ses éléments. On pose $\mathcal{C}_1$ la classe formée de e seulement et η_1 la représentation triviale. Donc la première ligne est formée que de nombres 1 et la première colonne donne les dimensions des différentes représentations irréductibles.
Il existe une autre table, la **table modifiée**, définie en multipliant la $i^{\text{ème}}$ colonne par $\sqrt{d_i}$:

	$1\mathcal{C}_1$	$d_2\mathcal{C}_2$	$\cdots$	$d_N\mathcal{C}_N$
η_1	1	$\sqrt{d_2}$	$\cdots$	$\sqrt{d_N}$
η_2	n_2	$\sqrt{d_2}\chi_2^{(2)}$	$\cdots$	$\sqrt{d_N}\chi_2^{(N)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
η_N	n_N	$\sqrt{d_2}\chi_N^{(2)}$	$\cdots$	$\sqrt{d_N}\chi_N^{(N)}$

De la proposition 2.18 et de la proposition 2.29 du cours on a :

les lignes sont orthogonales entre elles et leur norme vaut $\sqrt{g}$
les colonnes sont orthogonales entre elles et leur norme vaut $\sqrt{g}$

2.5 Représentations d'un produit direct de groupes

Soit le produit tensoriel d'espaces vectoriels de dimension finie connus (voir pagg. 2.29 et 2.30 du cours). Soient *deux* groupes G,G' et $(U,\mathcal{V})$ une représentation de G et $(U',\mathcal{V}')$ une de G'.
De plus si on définit $\mathcal{G} = G\otimes G'$, alors on obtient une représentation $\mathcal{U}$ de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{V}\otimes\mathcal{V}'$ en posant :

$$\mathcal{U}(a,a') = U(a)\otimes U'(a') \quad \forall a\in G, a'\in G' \tag{1}$$

Proposition 2.24 *Soit $(U,\mathcal{V})$ une représentation irréductible d'un groupe fini G et $(U',\mathcal{V}')$ une représentation irréductible d'un groupe fini G'.*

a) La représentation $\mathcal{U} = U\otimes U'$ de $G\otimes G'$ définie par (1) est irréductible et ses caractères sont donnés par :

$$\chi_{\mathcal{U}}(a,a') = \chi(a)\chi(a')$$

b) Toute représentation irréductible de $G\otimes G'$ est de la forme (1) (avec U,U' irréductibles).

Proposition 2.25 *Si $(U,\mathcal{V})$ est une représentation unitaire de G et $(U',\mathcal{V}')$ une représentation unitaire de G', alors la représentation $\mathcal{U} = U\otimes U'$ est unitaire.*

Remarque 2.26 *Dans le cas qu'on va traiter dans la suite, on aura un seul groupe et la proposition 2.25 ne sera plus applicable.*

2.6 Produit tensoriel de représentations – Coefficients de Clebsch-Gordan

Cette fois on considère *un seul groupe G* avec deux représentations complexes $(U,\mathcal{V})$ et $(U',\mathcal{V}')$. A ces deux représentations on peut leur associer une représentation $\mathbb{U} = U\otimes U'$ de G dans $\mathcal{V}\otimes\mathcal{V}'$ en posant :

$$\mathbb{U}(a) = U(a)\otimes U'(a) \quad \forall a\in G$$

Le caractère $\chi_{\mathbb{U}}(a)$ d'un élément a de G dans la représentation $\mathbb{U}$ est donné par :

$$\chi_{\mathbb{U}}(a) = \chi(a)\chi'(a)$$

Remarque 2.27 *En général, même si U et U' sont irréductibles, la représentation $\mathbb{U}$ ne sera pas irréductible.*

Si $\eta_1, \dots, \eta_N$ est une énumération des classes d'équivalence des représentations irréductibles complexes de G (fini), le théorème 2.19 permet de calculer de nombre de fois ν_k qu'une représentation irréductible de classe η_k, $k = 1, \dots, N$ apparaît dans $\mathbb{U}$:

$$\nu_k = \frac{1}{g} \sum_{a \in G} \overline{\chi_k(a)} \chi(a) \chi'(a) = \frac{1}{g} \sum_{i=1}^{N} d_i \overline{\chi_k(\mathcal{C}_i)} \chi(\mathcal{C}_i) \chi'(\mathcal{C}_i)$$

Si on suppose que U et U' sont irréductibles et de dimension finie, alors on peut décomposer $U \otimes U'$ en représentations irréductibles :

$$U \otimes U' = \bigoplus_{\mathcal{R}} \nu_i U_i \quad \text{dans} \quad \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}' = \bigoplus_{\mathcal{R}} \nu_i \mathcal{V}_i \tag{2}$$

où $\mathcal{R} \doteq \{i \in 1, \dots, N \text{ tq. } \nu_i \neq 0\}$, car les ν_i nuls peuvent êtres omisent.

Définition 2.28 *Un groupe G est appelé **simplement réductible** si tous les ν_i sont 0 ou 1 pour chaque choix des représentations U et U' de G.*

On va utiliser une nouvelle base de $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}'$ pour tenir compte de la décomposition (2). De plus on rappelle que U et U' sont supposées irréductibles, donc $U = U_j$ et $U' = U_k$ pour certains $j, k \in \{1, \dots, N\}$.

Soient $\{v_l^{(i)}\}_{l=1}^{n_i}$ une base de $\mathcal{V}_i$, $\{u_r^{(j)}\}_{r=1}^{n}$ une base de $\mathcal{V}$ et $\{u_s^{(k)}\}_{s=1}^{n'}$ une base de $\mathcal{V}'$ de telle façon qu'on peut écrire :

$$v_l^{(i)} = \sum_{s,r} C_{rs}(j,k;i,l) u_r^{(j)} \otimes u_s^{(k)}$$

les $C_{rs}(j,k;i,l)$ sont appelés les **coefficients de Clebsch-Gordan** du groupe G. Les lettres j, k, i spécifient des classes de représentations irréductibles et r, s, l numérotent les vecteurs de base de $\mathcal{V}, \mathcal{V}', \mathcal{V}_i$.

Si $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ sont des espaces de Hilbert, on choisira des bases orthonormées et si nous supposons U_j et U_k unitaires on aura (avec les notations de Dirac) :

$$C_{rs}(j,k;i,l) \doteq \langle u_r^{(j)} \otimes u_s^{(k)} \mid v_l^i \rangle = \langle j, r; k, s \mid i, l \rangle$$

Le changement de base $\{u_r^{(j)} \otimes u_s^{(k)}\} \to \{v_l^{(i)}\}$ est donnée par une représentation unitaire.

On donne enfin une formule parfois utile :

$$\frac{1}{g} \sum_{a \in G} \overline{U^{(i)}(a)_{\tau t}} U^{(j)}(a)_{\rho r} U^{(k)}(a)_{\sigma s} = \frac{1}{n_i} \langle i, t \mid j, r; k, s \rangle \langle j, \rho; k, \sigma \mid i, \tau \rangle$$

qui est valable sous la condition que les mêmes bases soient employées pour exprimer les coefficients de Clebsch-Gordan et les éléments de matrice $U^{(k)}(a)_{rs}$ des différentes représentations de G.

2.7 Règles de sélection et théorème de Wigner-Eckart

Soit $(U, \mathcal{V})$ une représentation d'un groupe G. Elle induit une représentation $\mathbb{U}$ de G dans l'espace vectoriel $L(\mathcal{V})$:

$$\mathbb{U}(a)T = U(a) T U(a^{-1})$$

où $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ et $\mathbb{U}(a)T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ sont des applications linéaires dans $\mathcal{V}$. Supposons $n = dim \mathcal{V} < \infty$, donc $\mathbb{U}$ est complètement réductible : on décompose $(\mathbb{U}, L(\mathcal{V}))$ en somme directe de représentations irréductibles $(\mathbb{U}_i, L_i)$ (représentation de classe η_i) :

$$L(\mathcal{V}) = \bigoplus_i \nu_i L_i \quad \mathbb{U} = \bigoplus_i \nu_i \mathbb{U}_i$$

les éléments de L_i sont des opérateurs agissant sur $\mathcal{V}$ et sont appelés en physique des *opérateurs tensoriels irréductibles de classe η_i*.

L_i est un espace vectoriel de dimension finie, soit donc $\{T_k \mid k = 1, \dots, \dim L_i\}$ une base de L_i.

On aura :

$$\mathbb{U}(a) T_k = \sum_l \theta_{kl}^{(i)}(a) T_l$$

où les $\theta_{kl}^{(i)}$ satisfont :

$$\theta_{kl}^{(i)}(e) = \delta_{kl} \quad \text{et} \quad \sum_k \theta_{jk}^{(i)}(b) \theta_{kl}^{(i)}(a) = \theta_{jl}^{(i)}(a \circ b)$$

Un ensemble L_j d'opérateurs $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ est appelée *famille d'opérateurs tensoriels irréductible de classe* η_j s'il existe une application linéaire $\Phi : \mathcal{W}_j \to L(\mathcal{V})$ qui applique $\mathcal{W}_j$ *sur* L_j et qui entrelace[1] les représentations U_j et U :

$$\Phi(U_j(a)w) = \mathbb{U}(a)\Phi(w) = U(a)\Phi(w)U(a)^{-1} \quad w \in \mathcal{W}_j, \Phi(w) \in L(\mathcal{V})$$

$(U_j, \mathcal{W}_j)$ étant une représentation irréductible de classe η_j. Si l'application Φ est injective, alors elle donne un isomorphisme entre $\mathcal{W}_j$ et L_j.

Théorème 2.29 (Règles de sélection) *Soit $U = \bigoplus_{k \in J} \nu_k U_k$ une représentation unitaire d'un groupe G dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Soit $\{T\}$ une famille d'opérateurs tensoriels irréductibles de classe η_j sur $\mathcal{H}$. Alors pour chaque opérateur T de cette famille, on a $\langle \psi_i \mid T \psi_k \rangle = 0$ pour $\psi_i \in \mathcal{H}_{i,\lambda}, \psi_k \in \mathcal{H}_{k,\mu}$, à l'exception des situations où une représentation de classe η_i apparaît dans la décomposition de $U_j \otimes U_k$ en représentations irréductibles.*

On regarde maintenant le cas où $\langle \psi_i \mid T \psi_k \rangle \neq 0$. On va expliciter le théorème de Wigner-Eckart sous l'hypothèse que G soit un groupe simplement réductible.

[1] Z entrelace U_i et U_j si on a $U_i(a)Z = ZU_j(a) \, \forall a \in G$

Théorème 2.30 (Théorème de Wigner-Eckart) *Soit U une représentation unitaire d'un groupe fini simplement réductible G dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Soit $\mathcal{H}_i$ et $\mathcal{H}_k$ des sous-espaces invariants minimaux de dimensions finies n_i et n_k. Soit $\{u_r^{(i)} \mid r = 1, \ldots, n_i\}$ une base orthonormée de $\mathcal{H}_i$, $\{u_s^{(k)} \mid s = 1, \ldots, n_k\}$ une base orthonormée de $\mathcal{H}_k$ et $\{T_t^{(j)} \mid t = 1, \ldots, n_j\}$ une base d'une famille L_j d'opérateurs tensoriel irréductibles de classe η_j se transformant selon $U(a)T_t^{(j)}U(a^{-1}) = \Phi(U_j(a)w_t^{(j)}) = \sum_{\tau=1}^{n_j} U^{(j)}(a)_{\tau t}T_\tau^{(j)}, U^{(j)}(a)_{\tau t} = \langle w_\tau^{(j)} \mid U_j(a)w_t^{(j)}\rangle$. Alors :*

$$\langle u_r^{(i)} \mid T_t^{(j)} u_s^{(k)}\rangle = \langle i, r \mid j, t; k, s\rangle \mathcal{T}(i, j, k)$$

où $\mathcal{T}(i, j, k)$ est indépendant de r, t, s.

2.8 Groupes de symétries en mécanique quantique

On considère un système quantique décrit par les vecteurs d'un espace de Hilbert (complexe) $\mathcal{H}$ où les observables sont représentées par des opérateurs autoadjoint et les états par des matrices densité.
Les **états purs** sont donnés par des projecteurs sur un sous-espace de dimension 1, qui sont appelés des **rayons** de $\mathcal{H}$:

$$\widehat{\psi} = \{\varphi \in \mathcal{H} \mid \varphi = \alpha\psi, \alpha \in \mathbb{C}\}$$

Définition 2.31 *Une **symétrie** est une application de l'ensemble des rayons de $\mathcal{H}$ dans lui-même qui est surjective et préserve les probabilités de transition, qui sont données par : $\mathrm{Tr}\, P_{\widehat{\varphi}} P_{\widehat{\psi}}$*

Une symétrie S associe à chaque rayon $\widehat{\psi}$ un autre rayon $\widehat{\varphi} = S(\widehat{\psi})$
Si U est un opérateur unitaire (ou antiunitaire) dans $\mathcal{H}$, alors U détermine une symétrie S_U en posant $S_U(\widehat{\psi})$=rayon unitaire contenant le vecteur $U\psi$. Le théorème suivant va dans le sens inverse.

Théorème 2.32 (Théorème de Wigner) *Soit S une symétrie, alors il existe une application $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ unitaire ou antiunitaire telle que $S = S_U$. Si U' est une autre application satisfaisant $S = S_{U'}$, alors $U' = \tau U$ pour un $\tau \in \mathbb{C}$ avec $\mid \tau \mid = 1$. Si $\dim \mathcal{H} > 1$, alors la nature unitaire ou antiunitaire de U est déterminée par S.*

Si G est un **groupe de symétrie** d'un système quantique, chaque élément a de G détermine une symétrie $S(a)$ et $S(a \circ b) = S(a)S(b)$. Le théorème de Wigner affirme que chaque $S(a)$ est induit par une application unitaire ou antiunitaire (déterminée à un facteur de module 1 près). Donc :

$$U(a)U(b) = \omega(a, b)U(a \circ b) \qquad \mid \omega(a, b) \mid = 1, \omega \in \mathbb{C} \tag{3}$$

On appelle facteur de G la collection $\{\omega(a, b)\}$. Si $U'(a)$ est une autre choix des opérateurs qui induisent ces symétries $U'(a) = \rho(a)U(a)$ avec $\rho(a) \in S^{(1)} \doteqdot \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Donc :

$$\omega'(a, b) = \frac{\rho(a)\tilde{\rho}(b)\omega(a, b)}{\rho(a \circ b)} \tag{4}$$

où $\tilde{\rho}(b) = \rho(b)$ si $U(a)$ est unitaire et $\tilde{\rho}(b) = \overline{\rho(b)}$ si $U(a)$ est antiunitaire. Deux facteurs sont équivalents si satisfont (4) et un facteur est dit *trivial* s'il est équivalent au facteur $\omega' \equiv 1$.

Dans la *suite* on ne va regarder que le cas de représentations (à un facteur près) par des opérateurs *linéaires* (i.e. pas antilinéaires, mais on impose pas l'unitarité).
Dans une représentation U à un facteur près, $U(e)$ doit être un multiple de l'identité : $U(e) = \sigma\mathbb{1}$ pour un $\sigma \in \mathbb{C}^*$.

Définition 2.33 (Repr. projective) *Une représentation à un facteur près d'un groupe G par des opérateurs linéaires, comme dans (3) et avec $U(e) = \mathbb{1}$ est appelée une **représentation projective** de G.*

Pour certains groupes tous les facteurs sont triviaux, alors chaque représentation projective peut être ramenée à une vraie représentation linéaire (i.e. chaque représentation projective est linéarisable).
Pour d'autres groupes il existe des facteurs non-triviaux, donc des représentations projectives qui ne sont pas linéarisables. Dans ce cas il est possible d'introduire un groupe plus large $\widetilde{G}$ tel que toute représentation projective de G est induite par une représentation linéaire de $\widetilde{G}$.

Remarque 2.34 *Pour des groupes de Lie, ceci est lié à sa topologie et en particulier à la connexité. Voir remarque 4.23*

Définition 2.35 *Pour tout groupe fini G, il existe un groupe $\widetilde{G}$ universel, appelé **groupe de revêtement** or **groupe de recouvrement** de G, tel que toute représentation projective de G est induite par une représentation linéaire de $\widetilde{G}$ (pour la construction : voir pagg. 2.53-2.59 du cours et le théorème 2.38).*

Définition 2.36 *Un **facteur** de G est une fonction $\omega : G \times G \to \mathbb{C}^*$ qui satisfait :*

$$\begin{aligned} \omega(e, a) = 1 = \omega(a, e) \qquad & \forall a \in G \\ \omega(a, b)\omega(a \circ b, c) = \omega(a, b \circ c)\omega(b, c) \qquad & \forall a, b, c \in G \end{aligned}$$

Soit $\mathbb{F}(G)$ l'ensemble des facteurs du groupe G et $\omega \in \mathbb{F}(G)$. Alors on utilise la notation $[\omega]$ pour la classe d'équivalence de ω et on peut introduire une loi de composition dans l'ensemble des classes d'équivalence des facteurs :

$$[\omega_1][\omega_2] = [\omega_1\omega_2] \tag{5}$$

Proposition 2.37 *Cette proposition définit le multiplicateur de Schur qui est important pour la construction du groupe de recouvrement.*

a) L'ensemble des classes d'équivalence des facteurs d'un groupe G, muni de la loi de composition (5), est un groupe abélien *désigné par $M(G)$ et appelé le **multiplicateur de Schur** de G.*

b) Si G est un groupe fini, $M(G)$ est également fini et pour chaque classe $[\omega] \in M(G)$ il existe un nombre $\kappa \in \mathbb{N}$ et un représentant $\tilde{\omega}$ dont les valeurs appartiennent à l'ensemble des $\kappa^{ièmes}$ racines de 1 : $\tilde{\omega}(a, b) \in \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{\kappa-1}\}$ $\forall a, b \in G$, $\varepsilon = e^{2\pi i/\kappa}$

On va maintenant construire le groupe de revêtement universel $\widetilde{G}$ de G comme «extension centrale de $M(G)$ par G» ($M(G)$ joue le rôle de G_0).

Notation : $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ les éléments de $M(G)$, l'élément neutre reste [1].
Soit $\xi_1, \ldots, \xi_m$ un sous-ensemble de $M(G)$ formant un *ensemble générateur minimal* de $M(G)$, i.e. $\forall \xi \in M(G), \exists j_1, \ldots, j_m \in \mathbb{N}(1 \leq j_k \leq g)$ tq. $\xi = \prod_{k=1}^m \xi_k^{j_k}$ et $M(G)$ ne peut pas être engendré par $m-1$ de ses éléments.
Soit κ_s l'ordre de $\xi_s, s = 1, \ldots, m$ et posons $\varepsilon_s = \exp\left(\frac{2\pi i}{\kappa_s}\right)$. Soit $\omega'_s \in \{1, \varepsilon_s, \ldots, \varepsilon_s^{\kappa_s - 1}\}$ un représentant de ξ_s. Alors $\forall a, b \in G$, existe un $n_s(a,b) \in \{0, 1, \ldots, \kappa_s - 1\}$ tq.

$$\omega'_s(a,b) = \varepsilon_s^{n_s(a,b)}$$

Avec ceci on peut définir une fonction $\Phi : G \times G \to M(G)$ par :

$$\Phi(a,b) \doteqdot \prod_{s=1}^m \xi_s^{n_s(a,b)}$$

Voici deux propriétés des nombres $n(\cdot,\cdot)$:

$$n_s(e,a) = 0 = n_s(a,e) \qquad \forall a \in G$$
$$n_s(a,b) + n_s(a \circ b, c) = n_s(a, b \circ c) + n_s(b,c) \qquad \forall a,b,c \in G\,(\mathrm{mod}\,\kappa_s)$$

Théorème 2.38 *Soit G un groupe fini, $M(G)$ son multiplicateur de Schur. Soit $\widetilde{G}$ l'ensemble des couples $\{\xi, a\}$, avec $\xi \in M(G)$ et $a \in G$, muni de la loi de composition :*

$$\{\xi, a\} \circ \{\eta, b\} = \{\xi\eta\Phi(a,b), a \circ b\}$$

Alors :

a) $\widetilde{G}$ est un groupe, les éléments de la forme $\{\xi, e\}$ forment un sous-groupe normal G_0 appartenant au centre de $\widetilde{G}$ et isomorphe à $M(G)$ et $\widetilde{G}/G_0$ est isomorphe à G.

b) Si $(U, \mathcal{V})$ est une représentation projective de G, il existe une fonction $\rho : G \to \mathbb{C}^*$ et une représentation linéaire $\widetilde{U}$ de $\widetilde{G}$ dans $\mathcal{V}$ telle que :

$$U(a) = \rho(a)\widetilde{U}(\{[1], a\}) \quad \forall a \in G$$

2.9 Projecteurs et représentations irréductibles

On considère des représentations unitaires $U : G \to \mathcal{H}$. Si G est un groupe de symétries dynamiques, i.e. $[U(a), H] = 0, \forall a \in G$, alors on peut décomposer $\mathcal{H}$ comme somme directe orthogonale $\mathcal{H} = \oplus_j \mathcal{H}_j$ tq. H et $U(a)$ laissent invariant $\mathcal{H}_j$. Dans ce cas on peut écrire : $H = \Sigma$ opérateurs autoadjoints plus simples et $U\,|_{\mathcal{H}_j}$ contient une seule classe de représentations irréductibles : η_j.

Définition 2.39 *Un **projecteur orthogonal** dans $\mathcal{H}$ est un opérateur linéaire borné $\mathcal{P}$ qui satisfait*

$$\mathcal{P}^* = \mathcal{P} = \mathcal{P}^2$$

Définition 2.40 *Soit $(U_k, \mathcal{V}_k)$ une représentation unitaire de classe η_k de G, posons $\overline{U^{(k)}(a)_{ij}} = \langle v_j \mid U_k(a^{-1})v_i\rangle$, où $\{v_i \mid i = 1, \ldots, n_k\}$ est une base orthonormée de $\mathcal{V}_k$. Soit $\mathcal{U}$ une représentation unitaire de G dans $\mathcal{H}$. On définit :*

$$\mathcal{P}_{ij}^{(k)} \doteqdot \tfrac{n_k}{g} \sum_{a \in G} \overline{U^{(k)}(a)_{ij}}\,\mathcal{U}(a)$$

pour $k = 1, \ldots, N$ et $i, j = 1, \ldots, n_k$.
*Les $\mathcal{P}_{ij}^{(k)}$ avec $i \neq j$ sont appelés **opérateurs de transfert**.*

Proposition 2.41

a) Les opérateurs $\mathcal{P}_{ii}^{(k)}$ sont des projecteurs et satisfont

$$\mathcal{P}_{ii}^{(k)}\mathcal{P}_{jj}^{(l)} = \delta_{kl}\delta_{ij}\mathcal{P}_{ii}^{(k)}$$

Si on définit $\mathcal{M}_i^{(k)} \doteqdot \mathcal{P}_{ii}^{(k)}\mathcal{H}$ on a donc $\mathcal{M}_i^{(k)} \perp \mathcal{M}_j^{(l)}$ si $k \neq l$ ou si $k = l$ mais $i \neq j$.

b) Soit

$$\mathcal{P}^{(k)} \doteqdot \sum_{j=1}^{n_k} \mathcal{P}_{jj}^{(k)}$$

$\mathcal{P}^{(k)}$ est un projecteur et on a

$$\mathcal{P}^{(k)} = \tfrac{n_k}{g} \sum_{a \in G} \overline{\chi_k(a)}\,\mathcal{U}(a)$$

De plus

$$\mathcal{P}^{(k)}\mathcal{P}^{(l)} = \delta_{kl}\mathcal{P}^{(k)}$$

et

$$\sum_{k=1}^N \mathcal{P}^{(k)} = \mathbb{1}$$

c) $\mathcal{P}^{(k)}$ commute avec les $\mathcal{U}(a), \forall a \in G$

d) Soit $\mathcal{M}^{(k)} = \mathcal{P}^{(k)}\mathcal{H}$. La restriction de $\mathcal{U}$ à $\mathcal{M}^{(k)}$ est une représentation unitaire de G dans $\mathcal{M}^{(k)}$.

e) Si $\mathcal{N}$ est un sous-espace de $\mathcal{M}^{(k)}$ invariant sous $\mathcal{U}$ et si $\mathcal{U}\,|_{\mathcal{N}}$ est une représentation irréductible de G, alors $\mathcal{U}\,|_{\mathcal{N}}$ est de classe η_k.

2.10 Groupe de symétries dynamiques

Soit $\mathcal{H}$ l'hamiltonien d'un système quantique (ici on suppose $\mathcal{H}$ borné), agissant dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

Définition 2.42 *Un groupe G est un* groupe de symétries dynamiques *du système si l'on a une représentation (éventuellement projective) U de G dans $\mathcal{H}$ par des opérateurs unitaires ou antiunitaires qui commute avec $\mathcal{H}$*

$$U(a)\mathcal{H} = \mathcal{H}U(a) \quad \forall a \in G\,.$$

3 Groupes continus à un paramètre

Pour un rappel sur les opérateurs autoadjoints on renvoie au cours, chapitre 3.1. Tous les groupes continus à 1 paramètres sont isomorphes soit à la droite $\mathbb{R}$, soit au cercle $S^{(1)}$, qui sont les deux groupes de Lie unidimensionnels.

3.1 Les représentations unitaires continues du groupe $\mathbb{R}$ et le groupe unitaire associé à un opérateur autoadjoint

$(\mathbb{R}, +)$ est l'exemple le plus simple de groupe de Lie, il est un groupe continu avec l'addition comme loi de composition. On va étudier les représentations unitaires continues de ce groupe dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Dans ce cas, $\forall s \in \mathbb{R}$ on associe un opérateur unitaire $U(s) \in \mathcal{H}$ et $\{U(s) \mid s \in \mathbb{R}\}$ satisfait :

- Unitarité : $U(s)^*U(s) = U(s)U(s)^* = \mathbb{1}$.
- Représentation : $U(0) = \mathbb{1}, \quad U(s)U(t) = U(s+t)$.
- Continuité : $\lim \tau \to 0 \|U(s+\tau)\varphi - U(s)\varphi\| = 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}, \forall \varphi \in \mathcal{H}$.

Théorème 3.1 (Théorème de Stone) *Soit $\{U(s) \mid s \in \mathbb{R}\}$ une représentation* unitaire *continue de $\mathbb{R}$ dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Définissons un opérateur linéaire A dans $\mathcal{H}$ par :*

$$D(A) = \{\varphi \in \mathcal{H} \mid \text{s-}\lim_{s\to 0} \tfrac{1}{s}[U(s) - \mathbb{1}]\varphi\}$$

$$A\varphi = \text{s-}\lim_{s\to 0} i\tfrac{1}{s}[U(s) - \mathbb{1}]\varphi \text{ si } \varphi \in D(A)$$

*Alors $D(A)$ est dense dans $\mathcal{H}$ et A est un opérateur autoadjoint, appelé le **générateur infinitésimal** du groupe $\{U(s)\}$. Le domaine $D(A)$ est invariant sous chaque $U(s)$, i.e. $\varphi \in D(A) \Rightarrow U(s)\varphi \in D(A)$. Si $\varphi \in D(A)$, alors :*

$$U(s)A\varphi = AU(s)\varphi = i\tfrac{d}{ds}U(s)\varphi$$

où on utilise la dérivée forte (par rapport à la norme de $\mathcal{H}$).

Maintenant on voit un autre théorème qui est l'inverse de celui de Stone.

Théorème 3.2 (Inverse du théorème de Stone) *Soit A un opérateur autoadjoint dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Alors il existe un unique groupe unitaire continu à un paramètre $\{U(s)\}$ dans $\mathcal{H}$ ayant comme générateur infinitésimal l'opérateur A. $\{U(s)\}$ est appelé le **groupe unitaire continu engendré par** A.*

Le groupe engendré est formellement :

$$\{\exp(-iAs) \mid s \in \mathbb{R}\}.$$

3.2 Intégrale directe

Considérons la famille d'opérateurs $U(s) = \exp(-iAs)$ $(s \in \mathbb{R})$ dans $L^2(J)$, J un interval de $\mathbb{R}$. Les $\{U(s)\}$ forment une représentation réductible du groupe $\mathbb{R}$, mais une décomposition en somme directe de représentations irréductibles (de dimension 1, car $\mathbb{R}$ est un groupe abélien) n'est pas possible. En effet supposons $\mathcal{V}' = \{\alpha\varphi \mid \alpha \in \mathbb{R}; \varphi \in L^2(J) \text{ fixé}\}$ soit invariant sous U, alors $[U(s)\varphi](x) = \beta(s)\varphi(x)$ p.p.(x) et comme $U(s) = \exp(-iAs)$ on aura $\exp(-isx) = \beta(s)$ où $\varphi(x) = 0$, la seule solution est $\varphi(x) = 0$ p.p.(x) ce qui entraine que $\mathcal{V}' = \{0\}$.

On écrit alors $L^2(J) \equiv L^2(J;\mathbb{C}) = \int_J^{\oplus} \mathbb{C}\,dx$, et le produit scalaire est donné par

$$\langle \varphi \mid \psi \rangle_{L^2(J;\mathbb{C})} = \int_J \langle \varphi(x) \mid \psi(x) \rangle_{\mathbb{C}} dx = \int_J \overline{\psi(x)}\varphi(x) dx.$$

On peut alors écrire $U(s) = \int_J^{\oplus} U_x(s) dx$, où $U_x(s)$ est un opérateur unitaire dans $\mathbb{C}$ (la multiplication par e^{-isx}). Dans ce sens la représentation U se décompose en *intégrale directe* de représentations irréductibles unidimensionnelles.

La généralisation à des espaces $L^2(J;\mathcal{K})$ est évidente, voir page 3.19 du cours.

3.3 Groupes de symétries dynamiques

L'hamiltonien $\mathcal{H}$, pour de nombreux systèmes quantiques, est un opérateur nonborné dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimension infinie. Désignons par $U(t)$ le groupe d'évolution associé (donné par le théorème 3.2).

Un *groupe de symétrie pour $\mathcal{H}$* est un groupe G possédant une représentation $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{H}$ tq.

$$U(t)\mathcal{U}(a) = \mathcal{U}(a)U(t) \quad \forall a \in G, \forall t \in \mathbb{R}$$

On montre que cette condition implique que l'hamiltonien commute avec $\mathcal{U}$:

$$\psi \in D(\mathcal{H}) \Longrightarrow \mathcal{U}(a)\psi \in D(\mathcal{H}) \ \forall a \in G \text{ et } \mathcal{H}\mathcal{U}(a)\psi = \mathcal{U}(a)\mathcal{H}\psi.$$

4 Groupes de Lie et algèbres de Lie

4.1 Groupes de Lie compacts

Définition 4.1 (Groupe de Lie (compact)) *Un **groupe de Lie** est un groupe qui est également une variété analytique. Grosso modo signifie que ses éléments sont caractérisés par un certain nombre de paramètres réels continus indépendants et que la loi de composition et le passage à l'inverse sont continues dans ces paramètres.*
*Un **groupe de Lie compact** est un groupe de Lie dont le domaine des d paramètres utilisés pour sa description est fermé et borné dans $\mathbb{R}^d$.*

Le théorème suivant introduit l'intégrale de Haar $\int_G db$, qui remplace $\frac{1}{g}\sum_G$. On pourra retrouver une bonne partie des résultats du chapitre 2 sur les groupes finis en utilisant les opérateurs $M_G(T)$ du corollaire 4.4 pourvu que l'on se restreigne à des *représentations de dimension finie.* Ceci sera vrai en particulier pour les représentations irréductibles d'un groupe compact (voir théorèmes 4.5 et 4.6).

Théorème 4.2 (Intégrale de Haar) *Soit G un groupe de Lie* compact. *Il existe une règle unique qui associe à chaque fonction $f : G \to \mathbb{C}$ un nombre $I(f)$, désigné par $\int_G f(a)da$ est appelé l'**intégrale de Haar** de f et qui possède les propriétés d'une intégrale et est invariant à gauche et à droite.*

$$\begin{aligned}
\int_G (f_1(a)+\alpha f_2(a))\,da &= \int_G f_1(a)\,da+\alpha\int_G f_2(a)\,da \quad \alpha\in\mathbb{C}\\
f(a)\geq 0 \quad \forall a\in G &\Longrightarrow \int_G f(a)\,da\geq 0\\
f(a)=1 \quad \forall a\in G &\Longrightarrow \int_G f(a)\,da=1\\
\int_G f(a\circ b)\,da=\int_G f(b\circ a)\,da &= \int_G f(a)\,da \quad \forall b\in G\\
\int_G f(a^{-1})\,da &= \int_G f(a)\,da
\end{aligned}$$

Corollaire 4.3 *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, G un groupe de Lie* compact *et $b\mapsto T(b)$ une application de G dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ faiblement continue, i.e. $\forall\varphi,\psi\in\mathcal{H}$, $f(b)=\langle\varphi\mid T(b)\psi\rangle$ définit une fonction continue de G à valeurs dans $\mathbb{C}$. Alors il existe* un unique *opérateur linéaire $\mathbb{T}$ dans $\mathcal{H}$ tq.*

$$\int_G \langle\varphi\mid T(b)\psi\rangle\,db=\langle\varphi\mid\mathbb{T}\psi\rangle \quad \forall\varphi,\psi\in\mathcal{H}$$

Notation : $\int_G T(b)\,db$ pour $\mathbb{T}$.

Maintenant on introduit la moyenne sur le groupe avec l'intégrale de Haar.

Corollaire 4.4 *Soit U une représentation fortement continue d'un groupe de Lie compact G dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$* de dimension finie. *Soit T un opérateur linéaire dans $\mathcal{H}$. Alors il existe* un unique *opérateur $M_G(T)$ dans $\mathcal{H}$ satisfaisant :*

$$U(a)M_G(T)U(a)^{-1}=M_G(T) \quad \forall a\in G$$

et

$$\int_G \langle\varphi\mid U(b)TU(b)^{-1}\psi\rangle\,db=\langle\varphi\mid M_G(T)\psi\rangle \quad \forall\varphi,\psi\in\mathcal{H}$$

Théorème 4.5 *Toute représentations* irréductibles *continue d'un groupe de Lie* compact *est de dimension finie.*
Et si U est une représentation irréductible fortement continue d'un groupe de Lie compact dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, alors $\dim\mathcal{H}<\infty$

Théorème 4.6 *Soit U une représentation* fortement continue *d'un groupe de Lie* compact *G dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$* de dimension finie.

1) *$\Rightarrow$ thm 2.8 : U est équivalente à une représentation unitaire de G dans $\mathcal{H}$.*
2) *$\Rightarrow$ prop 2.13 a) : U est complètement réductible.*
3) *$\Rightarrow$ prop 2.13 b) : Si U est unitaire, alors la décomposition de $\mathcal{H}$ en sous-espaces invariants minimaux $\mathcal{H}=\oplus_k\nu_k\mathcal{H}_k$ est une somme directe* orthogonale.
4) *$\Rightarrow$ thm 2.19 : La multiplicité ν_k d'une représentation de classe η_k dans la décomposition de U en représentations irréductibles est donnée par*

$$\nu_k=\int_G\overline{\chi(b)}\chi_k(b)\,db$$

où $\chi(b)$ est le caractère de l'élément b de G dans la représentation U et $\chi_k(b)$ celui dans une représentation irréductible de classe η_k.

5) *$\Rightarrow$ thm 2.20 : U est irréductible $\Longleftrightarrow$ $\int_G|\chi(b)|^2db=1$.*
6) *$\Rightarrow$ thm 2.21 : Si U' est une autre représentation continue de G dans un espace de Hilbert de dimension finie $\mathcal{H}'$, alors U' et U sont équivalentes $\Longleftrightarrow$ leurs systèmes de caractères sont identiques.*

Le théorème de *Wigner-Eckart* est valable pour les groupes de Lie compacts. On peut définir aussi les opérateurs $\mathcal{P}_{ij}^{(k)}=n_k\int_G\overline{U^{(k)}(a)_{ij}}U(a)da$.

Théorème 4.7 *Soit G un groupe de Lie compact, $(U_k,\mathcal{H}_k)$ une représentation irréductible complexe de G de classe η_k et $(U_l,\mathcal{H}_l)$ une représentation irréductible complexe de classe η_l.*

a) *Les caractères satisfont la relation d'orthogonalité :*

$$\int_G\overline{\chi_k(b)}\chi_l(b)\,db=\delta_{kl}$$

b) *Supposons U_k et U_l unitaires, posons $U^{(k)}(a)_{ij}=\langle v_i^{(k)}\mid U_k(a)v_j^{(k)}\rangle$ et $U^{(l)}(a)_{\rho\mu}=\langle v_\rho^{(l)}\mid U_l(a)v_\mu^{(l)}\rangle$ où $\{v_i^{(k)}\}$ (resp. $\{v_\rho^{(l)}\}$) est une base orthonormée de $\mathcal{H}_k$ (resp. $\mathcal{H}_l$). Alors on a la realisation d'orthogonalité :*

$$\int_G U^{(l)}(b)_{\rho\mu}\overline{U^{(k)}(b)_{ij}}\,db=\frac{1}{n_k}\delta_{kl}\delta_{\rho i}\delta_{\mu j}$$

c) *Les fonctions $\{\sqrt{n_k}U^{(k)}(\cdot)_{ij}\mid k=1,2,\ldots;i,j=1,\ldots,n_k\}$ forment une base orthonormée de l'espace de Hilbert $L^2(G)$*

Une partie très importante d'un groupe de Lie est la **composante connexe de l'élément neutre** e, notée G_e

Proposition 4.8

a) La composante connexe G_e de l'élément neutre d'un groupe de Lie est un sous-espace (de Lie) normal *de G.*

b) Si U est une représentation (év. projective) de G par des opérateurs unitaires ou antiunitaires, chaque élément de G_e est représenté par un opérateur unitaire.

4.2 Propriétés locales des groupes de Lie et algèbres de Lie

Définition 4.9 (Algèbre de Lie) *Soit $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une* ***algèbre de Lie*** *sur $\mathcal{K}$ est un espace vectoriel $\mathcal{L}$ de dimension finie sur le corps $\mathcal{K}$ muni d'une loi de composition notée $[\cdot,\cdot]$ et satisfaisant*

$$\begin{array}{rcll} [\alpha X + \beta Y, Z] & = & \alpha[X,Z] + \beta[Y,Z] & \forall \alpha,\beta \in \mathcal{K}, \quad \forall X,Y,Z \in \mathcal{L} \\ [X,Y] & = & -[Y,X] & \forall X,Y \in \mathcal{L} \\ [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] & + & [Z,[X,Y]] = 0 & \forall X,Y,Z \in \mathcal{L} \end{array}$$

Définition 4.10 *Soient $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ deux algèbres de Lie. Une application $\tilde{h} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ est un homomorphisme (d'algèbres de Lie) si $\tilde{h}$ est linéaire et préserve la structure d'algèbres : $\tilde{h}([X,Y]) = [\tilde{h}(X), \tilde{h}(Y)]'$ $\forall X,Y \in \mathcal{L}$*

L'opération $[\cdot,\cdot]$ est appelée la **multiplication de Lie** ou le **crochet de Lie**. Pour les groupes de Lie linéaires, de matrices, on utilisera le commutateur.

Définition 4.11 (Constantes de structure) *Soit $\mathcal{L}$ une algèbre de Lie et $\{X_1,\dots,X_d\}$ une base de l'espace vectoriel $\mathcal{L}$. Le crochet $[X_i,X_j]$ peut s'exprimer :*

$$[X_i, X_j] = \sum_{r=1}^{d} c_{ij}^r X_r.$$

Les coefficients c_{ij}^r s'appellent les ***constantes de structure*** *de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$.*

La définition de l'algèbre de Lie implique :

$$\begin{array}{c} c_{ij}^r = -c_{ji}^r \\ \sum_{r=1}^{d} \{c_{ir}^s c_{jk}^r + c_{jr}^s c_{ki}^r + c_{kr}^s c_{ij}^r\} = 0 \qquad \forall i,j,k,s = 1,\dots,d. \end{array}$$

Les constantes de structure déterminent l'algèbre de Lie à un isomorphisme près. Mais elles dépendent de la base choisie !

Soit l'application bijective $\theta : \Omega \to O_\delta$, $\Omega \in \mathbb{R}^d$ un ouvert et O_δ un voisinage de l'identité de G. Elle associe au point $x = (x_1,\dots,x_d) \in \Omega$ la matrice correspondante du groupe G (voir figure 4.4 du cours, page 4.10). On définit $Y_r = \frac{\partial\theta(x)}{\partial x_r} \mid_{x=0}$ pour $r = 1,\dots,d$. Alors à chaque courbe $t \mapsto A(t) = \theta(x(t))$qui définit une courbe dans O_δ avec $A(0) = \mathbb{1}$ on peut associer un "vecteur tangent" au point $t = 0$: $X = \frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t} \mid_{t=0} = \sum_{r=1}^{d} Y_r \frac{\mathrm{d}x_r(t)}{\mathrm{d}t} \mid_{t=0}$.

Proposition 4.12

a) L'ensemble des vecteurs tangents X coïncide avec l'espace vectoriel $\mathcal{L}(G)$.

b) $\mathcal{L}(G)$ est une algèbre de Lie si on prend comme crochet de Lie l'opération de commutation des matrices.

c) Si le groupe G est abélien, alors est une algèbre de Lie abélienne.

Théorème 4.13 *Soit G un groupe de Lie linéaire.*

a) Chaque élément X de $\mathcal{L}(G)$ détermine un sous-groupe à un paramètre de G_e donné par $A(s) = \exp(sX), s \in \mathbb{R}$. En particulier $\exp(sX) \in G_e$ pour chaque $X \in \mathcal{L}(G)$ (X appelé le générateur du groupe) et chaque $s \in \mathbb{R}$.

b) $\{\exp(sX), s \in \mathbb{R}\}$ est le seul sous-groupe à un paramètre de G_e satisfaisant $\frac{d}{ds}A(s) \mid_{s=0} = X$.

Voir la figure 1

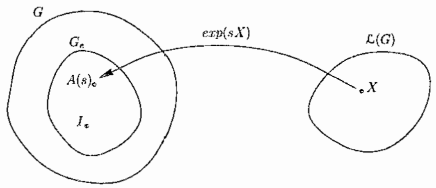

FIG. 1: *Illustration de 4.13*

Proposition 4.14 *Soit G un groupe de Lie linéaire. In existe un voisinage O_δ de l'élément neutre I tq. chaque $A \in O_\delta$ possède les propriétés suivantes :*

1. *$A = \exp X$ pour un $X \in \mathcal{L}(G)$.*
2. *$A = B^2$ pour un $B \in O_\delta$.*

Proposition 4.15 *Chaque élément de G_e peut être écrit sous la forme d'un produit* fini *d'exponentielles d'éléments de son algèbre de Lie : $A = \prod_{k=1}^{N} \exp(Y_k)$ avec $Y_k \in \mathcal{L}(G)$. Et si on a un groupe de Lie* compact *G, alors chaque élément de G_e est l'exponentiel d'un élément de $\mathcal{L}(G)$: $A = \exp(X)$ pour un $X \in \mathcal{L}(G)$.*

Proposition 4.16 *Soient G et G' deux groupes de Lie et $h : G \to G'$ un homomorphisme analytique de G dans G'. Alors l'application $\tilde{h} : \mathcal{L}(G) \to \mathcal{L}(G')$ définie par*

$$\tilde{h}(X) = \tfrac{d}{ds}[h(\exp(sX))] \mid_{s=0}$$

est un homomorphisme d'algèbres de Lie. De plus, $\forall X \in \mathcal{L}(G)$ et $\forall s \in \mathbb{R}$ on a :

$$\exp(s\tilde{h}(X)) = h(\exp(sX))$$

Voir aussi figure 2.

Définition 4.17 *Une* ***représentation d'une algèbre de Lie*** *$\mathcal{L}$ est un homomorphisme Γ de $\mathcal{L}$ dans l'algèbre de Lie des applications linéaires $\mathcal{V} \to \mathcal{V}$.*

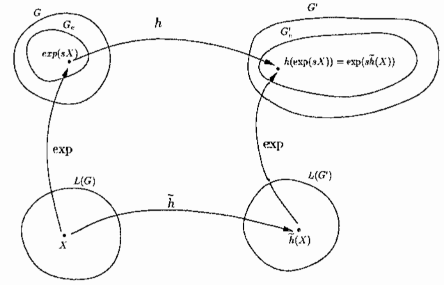

FIG. 2: *Illustration de 4.16*

Remarque 4.18 *Comme toute algèbre de Lie est isomorphe à une algèbre de Lie matricielle, Γ peut être vu comme un homomorphisme de $\mathcal{L}$ dans une algèbre de Lie matricielle. (Remarquons aussi que ici on utilise que des algèbres de Lie matricelle).*

Corollaire 4.19 *Soit G un groupe de Lie linéaire et U une représentation analytique de G dans un espace vectoriel $\mathcal{V}$ de dimension $n < \infty$. Alors la formule*

$$\Gamma(X) = \frac{d}{ds}[U(\exp(sX))]\,|_{s=0} \tag{6}$$

$X \in \mathcal{L}(G)$, définit une représentation de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}(G)$ dans $\mathcal{V}$. De plus on a

$$\exp(s\Gamma(X)) = U(\exp(sX))$$

Voir la figure 3 pour l'illustration.

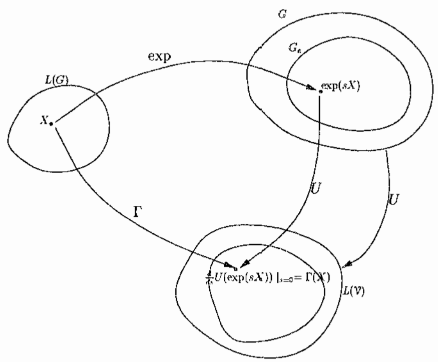

FIG. 3: *Illustration de 4.19*

L'algèbre de Lie $\mathcal{L}(G)$ ne dépend que de la structure de G dans un voisinage de l'élément neutre de G et donc si deux groupes sont isomorphes autour de l'identité alors les deux algèbres de Lie sont isomorphes. Par exemple les groupes $SU(2)$ et $SO(3)$.

Remarque 4.20 *Le contraire du corollaire 4.19, i.e. qu'une représentation de l'algèbre de Lie induit une représentation du groupe de Lie n'est pas vrai en général. Etant donné une algèbre de Lie $\mathcal{L}(G)$, la formule 4.19 définit une représentation U du groupe de revêtement universel $\widetilde{G}$ de G_e mais pas nécessairement de G_e.*

4.3 Le groupe des rotations de $\mathbb{R}^3$ et ses représentations

Commençons en rappelant quelques résultats :

1. $O(3)$ n'est pas connexe.
2. $SO(3)$ est connexe, mais pas simplement connexe.
3. $SU(2)$ est simplement connexe.
4. Chaque rotations peut être décrite comme produit d'une rotation autour de l'axe 3, puis une autour de l'axe 2 et enfin une rotation autour de l'axe 3. Ceci à l'aide des angles d'Euler ($\alpha \in [0, 2\pi[, \beta \in [0, \pi], \gamma \in [0, 2\pi[$).

$$\begin{aligned} U(\mathbf{e}_3,\gamma)U(\mathbf{e}_2,\beta)U(\mathbf{e}_3,\alpha) &= \exp\left(-i\tfrac{\gamma}{2}\sigma_3\right)\exp\left(-i\tfrac{\beta}{2}\sigma_2\right)\exp\left(-i\tfrac{\alpha}{2}\sigma_3\right) \\ &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{\frac{-i(\alpha+\gamma)}{2}} & -\sin\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{\frac{i(\alpha-\gamma)}{2}} \\ \sin\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{\frac{-i(\alpha-\gamma)}{2}} & \cos\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{\frac{i(\alpha+\gamma)}{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Regardons les algèbres de Lie $so(3)$ et $su(2)$. Elles sont des algèbres de Lie de dimension $d = 3$, donc il faut 3 éléments linéairement indépendants et leurs commutateurs. On choisit comme courbes de $SU(2)$, les sous-groupes à 1 paramètre formé des rotations autour des 3 axes $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$. On a :

$$U(\mathbf{e}_k, s) = \cos\left(\tfrac{s}{2}\right)\mathbb{1} - i\sin\left(\tfrac{s}{2}\right)\sigma_k$$

donc

$$X_k \doteq \tfrac{d}{ds}U(\mathbf{e}_k, s)\,|_{s=0} = -\tfrac{i}{2}\sigma_k$$

sont les *générateurs* de l'algèbre de Lie de $SU(2)$. Les rélations de commutations sont :

$$[X_j, X_k] = \sum_{l=1}^{3} \varepsilon_{jkl} X_l$$

ainsi les *constantes de structure* des algèbres de Lie de $SU(2)$, et donc aussi de $so(3)$, sont :

$$c_{jk}^{l} = \varepsilon_{jkl}\,.$$

Ces algèbres de Lie sont *réelles*, étant les constantes de structure réelles. Pour $SO(3)$, les matrices de base sont :

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On *complexifie* l'algèbre de Lie : la nouvelle base est donnée par $J_k = iX_k$ et donc on a :

$$[J_j, J_k] = i \sum_{l=1}^{3} \varepsilon_{jkl} J_l \tag{7}$$

On voit donc que : *Le complexifié de l'algèbre de Lie du groupe des rotations est l'algèbre du moment cinétique de la mécanique quantique.*

Pour trouver les représentations irréductibles de $SU(2)$:

1. Représentations irréductibles de $su(2)_{\mathbb{C}}$: $\Gamma(J_k)$
2. Représentations irréductibles de $su(2)$: $\Gamma(X_k) = -i\Gamma(J_k)$
3. Représentations irréductibles de $SU(2)$: Par exponentiation de $su(2)$, car $SU(2)$ est compact et connexe.

On rappelle le résultat (cf. MQ) : $\forall n = 1, 2, 3, \ldots, \exists$ *une unique représentation* irréductible *(à similarité près) des rélations de commutations* (7) *par des matrices $n \times n$. On peut choisir ces matrices hermitiques, et en posant $j = \frac{n-1}{2}$ on peut choisir une base orthonormée $\{\varphi_m \mid m = j, j-1, \ldots, -j\}$ de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle ces matrices ont la forme suivante* (où $J_\pm = J_1 \pm iJ_2$) :

$$\Gamma(J_3)\varphi_m = m\varphi_m, \quad \Gamma(J_\pm)\varphi_m = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\varphi_{m\pm1}$$

Définition 4.21 *Si $\{X_1, \ldots, X_d\}$ est une base de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}(G)$ d'un groupe G, on appelle **invariant de Casimir** ou **opérateur de Casimir** toute expression E dans les $\{X_k\}$ dont le crochet de Lie avec chaque X_k est zéro : $[E, X_k] = O$ $\forall k = 1, \ldots, d$. (E doit faire du sens mais pas forcement appartenir à $\mathcal{L}(G)$).*

Dans une représentation irréductible, $\Gamma(J^2)$ doit être un multiple de l'identité (en vertu du lemme de Schur) : $\Gamma(J^2)\varphi_m = j(j+1)\mathbb{1}\varphi_m$. J^2 est l'opérateur de Casimir du groupe $SU(2)$.

Les représentations irréductibles unitaires de $SU(2)$ sont souvent désignées par $D^{(j)}$. Les matrices $D^{(j)}_{mm'}(A) = \langle \varphi_m \mid U(A)\varphi_{m'} \rangle$ sont calculées par exponentiation :

$$D^{(j)}_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma) = \langle \varphi_m \mid U(A)\varphi_{m'} \rangle = \mathrm{e}^{-i(m\gamma + m'\alpha)} d^{(j)}_{mm'}(\beta)$$

où $d^{(j)}_{mm'}(\beta) = \langle \varphi_m \mid \mathrm{e}^{-i\beta J_2}\varphi_{m'} \rangle$.

Les caractères $\chi^{(j)}$ dans la représentation $D^{(j)}$ sont

$$\chi^{(j)}(\delta) = \frac{\mathrm{e}^{i(j+1)\delta} - \mathrm{e}^{-ij\delta}}{\mathrm{e}^{i\delta} - 1}$$

et dépendent que des classes de conjugaisons $\{\{\mathbf{n}, \delta\} \mid \mathbf{n}$ arbitraire et δ fixé$\}$.

Remarque 4.22

1. *Pour $SU(2)$ les représentations $D^{(j)}$ sont unitaires et des vraies représentations linéaires (le facteur $\omega(.,.)$ est trivial).*
2. *Pour $SO(3)$*
   - *si j est entier, $D^{(j)}$ définit une vraie représentation linéaire,*
   - *si j est demi-entier, $D^{(j)}$ donne seulement une représentation projective de facteur $\omega(.,.) = \pm 1$ (qui n'est pas linéarisable).*

   Ceci suit de

   $$D^{(j)}(-\mathbb{1}) = \begin{cases} \mathbb{1} & \text{si } j \text{ est entier} \\ -\mathbb{1} & \text{si } j \text{ est demi-entier} \end{cases}$$

   et de l'homomorphisme 2 à 1 entre $SU(2)$ et $SO(3)$.

Considérons la composante connexe à l'identité G_e et l'ensemble $\mathcal{C}$ des boucles continues dans G_e passant par l'origine. $f_1, f_2 \in \mathcal{C}$ sont dites équivalentes ($f_1 \sim f_2$) si f_1 peut être déformée continument dans f_2.

Définition 4.23 *Les classes déquivalence ci-dessus définies forment un groupe appelé **groupe fondamental** $\pi_1(G)$ de G.*

$\pi_1(G)$ est relié à la structure topologique de G_e, on a :

- G_e est simplement connexe si et seulement si $\pi_1(G)$ est d'ordre 1, et alors chaque facteur de G_e est équivalent au facteur trivial.
- si $\pi_1(G)$ est d'ordre supérieur à 1 alors il existe des représentations projectives de G_e qui ne sont pas linéarisables.

En général $\pi_1(G)$ est le multiplicateur de Schur $M(G_e)$ de G_e.

Considérons enfin la réduction du produit tensoriel $D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)}$.
Les caractères $\chi^{(j_1,j_2)}(\delta) = \chi^{(j_1)}(\delta)\chi^{(j_2)}(\delta)$ sont donnés par (en posant $\zeta = \exp i\delta$)

$$\chi^{(j_1,j_2)}(\delta) = \frac{\zeta^{j_1+j_2+1} - \zeta^{-j_1-j_2}}{\zeta - 1} + \cdots + \frac{\zeta^{|j_2-j_1|+1} - \zeta^{-|j_2-j_1|}}{\zeta - 1}$$

donc :

$$\chi^{(j_1,j_2)}(\delta) = \chi^{(j_1+j_2)}(\delta) + \cdots + \chi^{(|j_1-j_2|)}(\delta).$$

Pour les représentations on a ainsi :

$$D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)} = D^{(j_1+j_2)} \oplus \cdots \oplus D^{(|j_1-j_2|)}$$

En terme des générateurs on a

$$J_k^{(j_1)} \otimes I + I \otimes J_k^{(j_1)} = J_k^{(j_1+j_2)} \oplus \ldots \oplus J_k^{(|j_1-j_2|)}.$$

Remarque 4.24 *La représentation $D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)}$ contient chaque représentation $D^{(j)}$ avec $j =\mid j_1 - j_2 \mid, \ldots, j_1 + j_2$ exactement une fois. Donc $SU(2)$ est simplement réductible.*[2]

[2] C'est important pour appliquer par exemple le théorème de Wigner-Eckart et les règles de sélection.

5 Algèbres de Lie semi-simples

5.1 Propriétés des algèbres de Lie $su(n)$

L'algèbre de Lie (réelle) $su(n)$ du groupe $SU(n)$ est constituée de l'ensemble des matrices $n \times n$ (complexes) anti-hermitiques de trace nulle :

$$X \in su(n) \Longleftrightarrow X^* = -X \text{ et } \operatorname{Tr} X = 0.$$

La dimension de $su(n)$ est :

$$d = \dim(su(n)) = n^2 - 1.$$

On peut aussi *complexifier* une algèbre de Lie réelle. Il existe une méthode simple, mais qui n'est pas applicable en toute généralitée. Soit $\{X_1, \ldots, X_d\}$ une base de $su(n)$, alors si $\sum_{k=1}^{d} c_k X_k = 0$ avec $c_k \in \mathbb{R}$ on a $c_k = 0$ $(\forall k = 1, \ldots, d)$; si les $\{X_1, \ldots, X_d\}$ son encore linéairement indépendats sur $\mathbb{C}$ (même formule, mais avec $c_k \in \mathbb{C}$) alors $\{X_1, \ldots, X_d\}$ est une base de $su(n)_{\mathbb{C}}$.

Pour les groupes de Lie $SU(n)$ on a que toute représentation de $\mathcal{L}(G)$ mène par exponentiation à une représentration de G. Mais ceci n'est pas vrai en général !

5.2 Généralités sur les algèbres de Lie

Définition 5.1

a) Un sous-espace $\mathcal{L}'$ de $\mathcal{L}$ est une ***sous-algèbre*** *de $\mathcal{L}$ si $[X, Y] \in \mathcal{L}'$, $X, Y \in \mathcal{L}'$*

b) Un sous-espace $\mathcal{J}$ de $\mathcal{L}$ est un ***idéal*** *si $[X, Y] \in \mathcal{J}$, $\forall X \in \mathcal{J}, Y \in \mathcal{L}$. Si $\mathcal{J} \neq \mathcal{L}$ est appelé idéal propre.*

c) Le ***centre*** *de $\mathcal{L}$ est $\{X \in \mathcal{L} \mid [X, Y] = 0, Y \in \mathcal{L}\}$.*

Définition 5.2 (Somme directe au sens des algèbres de Lie) *Si $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont deux algèbres de Lie, leur* ***somme directe*** *$\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ est l'espace vectoriel $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ muni du crochet de Lie suivant :*

$$[X, Y] = [X_1, Y_1] + [X_2, Y_2] \quad \text{si } X = X_1 + X_2, Y = Y_1 + Y_2, \quad X_i, Y_i \in \mathcal{L}_i, i = 1, 2.$$

Définition 5.3

a) $\mathcal{L}$ est une algèbre de Lie ***simple*** *si $d = \dim \mathcal{L} > 1$ et $\{0\}$ est le seul idéal propre de $\mathcal{L}$.*

b) $\mathcal{L}$ est une algèbre de Lie ***semi-simple*** *si $d = \dim \mathcal{L} > 1$ et $\{0\}$ est le seul idéal propre abélien de $\mathcal{L}$.*

Définition 5.4

a) Un groupe de Lie connexe G est appelé ***groupe de Lie simple*** *s'il ne contient aucun sous-espace propre normal qui est un groupe de Lie.*

b) Un groupe de Lie connexe G est appelé ***groupe de Lie semi-simple*** *s'il ne contient aucun sous-espace propre normal abélien qui est un groupe de Lie.*

Proposition 5.5 *Soit G un groupe de Lie connexe et $\mathcal{L}(G)$ son algèbre de Lie (réelle).*

- *G est un groupe de Lie simple $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{L}(G)$ est une algèbre de Lie simple.*
- *G est un groupe de Lie semi-simple $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{L}(G)$ est une algèbre de Lie semi-simple.*
- *$\mathcal{L}(G)_{\mathbb{C}}$ est semi-simple $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{L}(G)$ est semi-simple.*
- *Si $\mathcal{L}(G)_{\mathbb{C}}$ est simple $\Longrightarrow$ $\mathcal{L}(G)$ est simple.*

Lemme 5.6 *Soit G un groupe de Lie* connexe. *Un sous-groupe de Lie G_0 de G est normal $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{L}(G_0)$ est un idéal de $\mathcal{L}(G)$.*

Regardons encore les algèbres de Lie nilpotentes et resolubles. Soit $\mathcal{L}$ une algèbre de Lie, posons $\mathcal{L}^1 = [\mathcal{L}, \mathcal{L}], \ldots, \mathcal{L}^k = [\mathcal{L}, \mathcal{L}^{k-1}]$. La dimension de $\mathcal{L}$ étant finie, il existe un k_0 tq. $\mathcal{L}^k = \mathcal{L}^{k_0}$ si $k \geq k_0$. Si on a $\mathcal{L}^k = \{0\}$ pour $k \geq k_0$, on dit que l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ est **nilpotente**. Si on fait la même chose pour la suite d'idéaux $\{\mathcal{L}^{(k)}\}$, avec $\mathcal{L}^{(k)} = [\mathcal{L}^{(k-1)}, \mathcal{L}^{(k-1)}]$, $\mathcal{L}^{(0)} = \mathcal{L}$; alors s'il existe un $K \in \mathbb{N}$ tq. $\mathcal{L}^{(K)} = \{0\}$ on dit que $\mathcal{L}$ est **résoluble**.
La décomposition de Levi, dit qu'on peut toujour décomposer une algèbre de Lie en une somme directe d'une semi-simple et d'une résoluble.

5.3 Forme de Killing d'une algèbre de Lie

Pour chaque $X \in \mathcal{L}$, on définit la **représentation adjointe** de $\mathcal{L}$ dans l'espace vectoriel $\mathcal{L}$; $X \mapsto \mathrm{ad}_X : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$

$$\mathrm{ad}_X(Y) \doteqdot [X, Y], \quad Y \in \mathcal{L}$$

Elle satisfait

$$\mathrm{ad}_X([Y, Z]) = [\mathrm{ad}_X(Y), Z] + [Y, \mathrm{ad}_X(Z)] \quad \forall Y, Z \in \mathcal{L}$$

et

$$\mathrm{ad}_{[X,Y]}(Z) = [\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y](Z)$$
$$\mathrm{ad}_{[X+\alpha Y]} = \mathrm{ad}_X + \alpha \mathrm{ad}_Y$$

$\mathcal{L}_a \doteqdot \{\mathrm{ad}_X \mid X \in \mathcal{L}\}$ est l'algèbre de Lie adjointe de $\mathcal{L}$.

A l'aide de la représentation adjointe, on définit la **forme de Killing**, une forme *bilinéaire symétrique* sur $\mathcal{L}$, qui est définie par :

$$K(X, Y) \doteqdot \operatorname{Tr}(\mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Y) \quad X, Y \in \mathcal{L}$$

On peut exprimer la forme de Killing en fonction des constantes de structures :

$$K(X_i, X_j) = \sum_{k=1}^{d} \sum_{r=1}^{d} c_{jk}^r c_{ir}^k \doteqdot g_{ij}$$

où les X_i sont les bases de l'algèbre de Lie et g_{ij} est un *tenseur métrique* de $\mathcal{L}$, appelé **tenseur métrique de Cartan**.
On peut vérifier que la forme de Killing est associative :

$$K([X,Y],Z) = K(X,[Y,Z]) \quad \forall X,Y,Z \in \mathcal{L}$$

Lemme 5.7 *Soit $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$ sont deux idéaux $\mathcal{L}$ tq. $\mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2 = \{0\}$. Si $X \in \mathcal{J}_1$ et $Y \in \mathcal{J}_2$, on a $K(X,Y) = 0$.*

Définition 5.8 *La forme de Killing est* non dégénérée *si une des deux conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*

1) $K(X,Y) = 0$ *pour tout* $Y \in \mathcal{L}$ *alors* $X = 0$.

2) $\det\{g_{ij}\} \neq 0$.

Théorème 5.9 (Théorème de Weyl) *Un groupe de Lie semi-simple connexe G est compact $\Longleftrightarrow$ la forme de Killing de son algèbre de Lie (réelle) $\mathcal{L}(G)$ est définie négative.*

Si on a un idéal $\mathcal{J}$ d'une algèbre de Lie $\mathcal{L}$, on choisit une base $\{X_1, \ldots, X_d\}$ de $\mathcal{L}$ tq. $\{X_1, \ldots, X_r\}, r \leq d$ une base de $\mathcal{J}$, qui est de dimension r. Elle est appelée **base de $\mathcal{L}$ adaptée à $\mathcal{J}$**.
$\mathcal{J}$ étant un idéal, on a $c_{ij}^k = 0$, si $i \leq r$ et $k > r$, ou $j \leq r$ et $k > r$.

Théorème 5.10 (Critère de Cartan) *Une algèbre de Lie $\mathcal{L}$ est semi-simple $\Longleftrightarrow$ sa forme de Killing est non-dégénérée, i.e. $\Longleftrightarrow$* $\det\{g_{ij}\} \neq 0$

On peut montrer que tout groupe de Lie $su(n)$ est semi-simple, ainsi que les groupes $SU(n)$ sont compacts. La forme de Killing pour $su(n)$ est donnée par

$$K(X,Y) = 2n\,\mathrm{Tr}\,(XY)$$

Si on a un $\mathcal{J}$ d'une algèbre de Lie $\mathcal{L} \neq \{0\}$, on peut lui associer un sous-espace vectoriel $\mathcal{J}^\perp$ de $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{J}^\perp = \{X \in \mathcal{L} \mid K(X,Y) = 0 \quad \forall Y \in \mathcal{J}\}$$

Lemme 5.11 *Soit $\mathcal{J}$ un idéal de $\mathcal{L}$. Alors :*

a) $\mathcal{J}^\perp$ est un idéal de $\mathcal{L}$.

b) $\mathcal{J} \cap \mathcal{J}^\perp$ est un idéal de $\mathcal{L}$.

Proposition 5.12 *Supposons que la forme de Killing K de $\mathcal{L}$ est non-dégénérée (i.e. $\mathcal{L}$ est semi-simple) et soit $\mathcal{J}$ un idéal de $\mathcal{L}$. Alors on a :*

a) $[\mathcal{J}, \mathcal{J}^\perp] = \{0\}$ et $\mathcal{J} \cap \mathcal{J}^\perp = \{0\}$.

b) $\mathcal{L} = \mathcal{J} \oplus \mathcal{J}^\perp$.

c) $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}^\perp$ sont deux algèbres de Lie semi-simples.

d) Si $\widetilde{\mathcal{J}} \subseteq \mathcal{J}$ est un idéal de l'algèbre de Lie $\mathcal{J}$, alors $\widetilde{\mathcal{J}}$ est aussi un idéal de $\mathcal{L}$.

Théorème 5.13

a) Toute algèbre de Lie $\mathcal{L}$ semi-simple peut être décomposée de façon unique en une somme directe d'algèbres de Lie simples : si $\mathcal{L}$ est semi-simple, il existe une collection unique $\{\mathcal{L}_k\}$ de sous-algèbres simples de $\mathcal{L}$ telle que $\mathcal{L} = \oplus_k \mathcal{L}_k$. Chaque $\mathcal{L}_k$ est un idéal de $\mathcal{L}$ est la somme directe contient chaque idéal simple de $\mathcal{L}$.

b) Toute somme directe (au sens des algèbres) d'un nombre fini d'algèbres de Lie simples est semi-simple.

Corollaire 5.14 *Toute algèbre de Lie semi-simple de dimension 2 ou 3 est simple.*

5.4 Racines des algèbres de Lie semi-simples complexes

On va introduire la sous-algèbre de Cartan, la notion de racine et ses propriétés. Ensuite on va faire un choix particulier des vecteurs de base (la base standard) de l'algèbre de Lie de façon à obtenir la forme la plus simple du tenseur métrique.
On veut maintenant étudier le problème aux valeurs propres de l'application ad_X, i.e. :

$$\mathrm{ad}_X(Y) = [X,Y] = \lambda Y$$

où $\lambda \in K$ (K un corps) et $Y \in \mathcal{L}$. Si $K = \mathbb{C}$ alors existe une base de $\mathcal{L}$ formée de vecteurs propres de ad_X.

Définition 5.15 *Un ensemble $\mathcal{L}_0 \in \mathcal{L}$ (où $\mathcal{L}$ est une algèbre de Lie semi-simple complexe) est appelée* sous-algèbre de Cartan *si $\mathcal{L}_0$ est une sous-algèbre* abélienne maximale *de $\mathcal{L}$ telle que toutes les applications ad_H, $H \in \mathcal{L}_0$, sont* simultanéament diagonalisables.

Donc il existe une base $\{X_i\}$ de $\mathcal{L}$ tq. $\mathrm{ad}_H(X_i) \equiv [H, X_i] = \alpha_i(H) X_i, \forall H \in \mathcal{L}_0$ et $\alpha_i(H) \in \mathbb{C}$. La dimension d_0 de la sous-algèbre de Cartan $\mathcal{L}_0$ est appelé *rang* de $\mathcal{L}_0$.
Il est immédiat que si $X_i \in \mathcal{L}_0$ alors $\alpha_i(H) = 0, \forall H \in \mathcal{L}_0$. Par contre si $X_i \notin \mathcal{L}_0$ alors $\alpha_i(H) \neq 0$ pour au moins un $H \in \mathcal{L}_0$.

Définition 5.16 *L'application linéaire $\alpha_i : \mathcal{L}_0 \to \mathbb{C}; H \mapsto \alpha_i(H)$ est appelée* racine de $\mathcal{L}$ relative à $\mathcal{L}_0$.

La nouvelle base de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ sera donc : $\{H_1, \ldots, H_{d_0}\} \cup \{E_\alpha, E_\beta, \ldots\}$, i.e. l'union d'une base de $\mathcal{L}_0$ et d'une de $\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_0$.
L'ensemble des racines non nulles, désigné par $\mathcal{R}$, est appelé *système de racines* de $\mathcal{L}$ relatif à $\mathcal{L}_0$. Soit $\mathcal{L}_\alpha \doteqdot \{X \in \mathcal{L} \mid \mathrm{ad}_H(X) = \alpha(H)X, \forall H \in \mathcal{L}_0\}$ et $d_\alpha \geq 1$ sa dimension (on va voir que c'est 1). Donc l'algèbre de Lie est donnée par :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \oplus [\oplus_{\alpha \in \mathcal{R}} \mathcal{L}_\alpha]$$

Par conséquence $[H, E_\alpha] = \alpha(H) E_\alpha$ si $\alpha \in \mathcal{R}, H \in \mathcal{L}_0, E_\alpha \in \mathcal{L}_\alpha$. La représentation adjointe sur la sous-algèbre de Cartan s'écrit :

$$\mathrm{ad}_H = 0 \oplus [\oplus_{\alpha \in \mathcal{R}} \alpha(H)]$$

Utilisant l'identité de Jacobi on trouve :

$$[H,[E_\alpha,E_\beta]]=(\alpha(H)+\beta(H))[E_\alpha,E_\beta]$$

Donc $[E_\alpha,E_\beta]$ est vecteur propre de ad_H avec valeur propre $\alpha(H)+\beta(H)$ ou bien le vecteur nul. On a trois possibilités :

$$[E_\alpha,E_\beta]=\begin{cases}\sum_{j=1}^{d_0}c^j(E_\alpha,E_\beta)H_j & \text{si } \alpha+\beta=0\\ \widetilde{E}_{\alpha+\beta} & \text{si } \alpha+\beta\in\mathcal{R}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Les $c^j(E_\alpha,E_\beta)$ et $\widetilde{E}_{\alpha+\beta}\in\mathcal{L}_{\alpha+\beta}$ dépendent du choix de E_α et de E_β.
Le prochain pas consiste en le calcul du tenseur métrique (forme de Killing). Ensuite il s'agira de choisir de nouveaux éléments de base de l'algèbre de Lie de façon à obtenir une forme simple du tenseur métrique.
Introduisons les notations : $\alpha_j=\alpha(H_j)$ et $c^k_{\alpha\beta}=c^k(E_\alpha,E_\beta)$. Alors on trouve :

1. $K(H_i,H_j)=g_{ij}=\sum_{\alpha\in\mathcal{R}}\alpha_i\alpha_j d_\alpha$,
2. $K(H_i,E_\alpha)=0$ si $E_\alpha\in\mathcal{L}_\alpha$,
3. $K(E_\alpha,E_\beta)=0$ si $\alpha+\beta\neq 0$.

Maintenant on donne les résultats de deux propositions sur les racines.

Proposition 5.17

1. *Pour tout $\alpha\in\mathcal{R}$ on a $-\alpha\in\mathcal{R}$.*
2. *Soit $\alpha\in\mathcal{R}$. Alors*
   - *$k\alpha\in\mathcal{R}$ avec $k\in\mathbb{Z}\Longleftrightarrow k=\pm1$,*
   - *$d_\alpha\equiv\dim\mathcal{L}_\alpha=1$.*

Comme $d_\alpha=1$ alors existe un $\tau_{\alpha\beta}\in\mathbb{C}$ t.q. $\widetilde{E}_{\alpha+\beta}=\tau_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta}$.

Le dernier calcul de la forme de Killing donnée :

$$K(E_\alpha,E_{-\alpha})=g_{-\alpha,\alpha}=2\sum_k\alpha_k c^k_{\alpha,-\alpha}+\sum_{\gamma\in\mathcal{R},\gamma-\alpha\in\mathcal{R}}\tau_{\alpha,\gamma-\alpha}\tau_{-\alpha,\gamma}$$

Simplification du tenseur métrique :

1. Choix des E_α :

   Proposition 5.18

   (a) *On peut choisir les $\{E_\alpha\}$ tels que $g_{\alpha,-\alpha}=1$, i.e. $g_{\alpha,\beta}=\delta_{\alpha,-\beta}$.*

   (b) *Si $g_{\alpha,\beta}=\delta_{\alpha,-\beta}$, alors $c^k_{\alpha\beta}=\alpha^k\delta_{\alpha,-\beta}$ où $\alpha^k=\sum_{j=1}^{d_0}g^{kj}\alpha_j$, $\{g^{kj}\}$ étant l'inverse de $\{g_{il}\}$.*

2. Choix des H_i : A ce point on peut encore choisir librement la base $\{H_i\}$ de $\mathcal{L}_0$, et la remplacer par une autre base $\{\widetilde{H}_j\}$ avec $\widetilde{H}_j=\sum_{k=1}^{d_0}\rho_{jk}H_k$.

Avec cette choix on a les changements suivants :

$$\widetilde{\alpha}_j=\alpha(\widetilde{H}_j)=\sum_{k=1}^{d_0}\rho_{jk}\alpha_k$$

et

$$\widetilde{g}_{ij}=\sum_{k,l}\rho_{ik}\rho_{jl}g_{kl}$$

On montre que c'est possible choisir les $\widetilde{H}_j$ tels que $\widetilde{\alpha}_j$ soient réels et $\widetilde{g}_{ij}=\delta_{ij}$.

Résumons ce qu'on a obtenu :
il existe une *base standard* $\{H_j,E_\alpha\}$ avec $j=1,\dots,d_0$ et $\alpha\in\mathcal{R}$ de $\mathcal{L}$ tq.

$$[H_j,H_k]=0\qquad[H_j,E_\alpha]=\alpha_jE_\alpha$$

et

$$[E_\alpha,E_\beta]=\begin{cases}\sum_{j=1}^{d_0}\alpha^jH_j & \text{si } \alpha+\beta=0\\ \tau_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta} & \text{si } \alpha+\beta\in\mathcal{R}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

et le tenseur métrique est donné par :

$$\begin{pmatrix}g_{ij}&0\\0&g_{\alpha\beta}\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|cccc}1&0&0&&&&\\0&1&0&&0&&\\0&0&1&&&&\\\hline&&&0&1&0&0\\&&&1&0&0&0\\&0&&0&0&0&1\\&&&0&0&1&0\end{array}\right)$$

Les racines ont des propriétés spéciales. Considérons una base standard $\{H_j,E_\alpha\}$ de $\mathcal{L}$ et α,β deux racines. Alors si on appelle $\varphi_{\alpha,\beta}$ l'angle entre eux, on a :

$$\cos(\varphi_{\alpha,\beta})=\frac{\alpha\cdot\beta}{\|\alpha\|\,\|\beta\|}$$

La proposition 5.23 qui se trouve dans la prochaine section implique l'existence de deux entiers N_1 et N_2 tq. $2\alpha\cdot\beta=N_1\|\alpha\|^2=N_2\|\beta\|^2$ et donc $|\cos(\varphi_{\alpha,\beta})|=\frac{N_1N_2}{4}$ et $\frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}=\sqrt{\frac{N_2}{N_1}}$ (si $\alpha\cdot\beta\neq0$). Donc N_1 et N_2 ont le même signe et leur produit est au maximum égal à 4. On peut résumer les propriétés dans un tableau.

$\varphi_{\alpha,\beta}$	0°, 180°	30°, 150°	45°, 135°	60°, 120°	90°
$\frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}$	1	$\sqrt{3}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	indéterminé

Le produit scalaire entre α et β peut s'exprimer aussi par la forme de Killing. Si on a une base standard de $\mathcal{L}$, alors :

$$\alpha \cdot \beta = K([E_\alpha, E_{-\alpha}], [E_\beta, E_{-\beta}])$$

Noter que cette expréssion est indépendante du choix des $\{H_j\}$ et est valable que pour une base standard où $K(E_\gamma, E_{-\gamma}) = 1, \forall \gamma \in \mathcal{R}$.

Donnons enfin une application des racines. Soit $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$. Alors les racines $\mathcal{R}$ se divisent en deux sous-ensembles disjoints $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ avec $\mathcal{R}_k = \{\alpha \in \mathcal{R} \mid E_\alpha \in \mathcal{L}_k\}$. Si $\alpha \in \mathcal{R}_1$ et $\beta \in \mathcal{R}_2$, alors $[E_\alpha, E_{-\alpha}] \in \mathcal{L}_1$ et $[E_\beta, E_{-\beta}] \in \mathcal{L}_2$ car les $\mathcal{L}_k$ sont des idéaux et donc $\alpha \cdot \beta = K([E_\alpha, E_{-\alpha}], [E_\beta, E_{-\beta}]) = 0$ Ceci signifie que *les racines apparténant à $\mathcal{R}_1$ sont orthonales à celles apparténant $\mathcal{R}_2$*. En utilisant la décomposition d'une algèbre de Lie semi-simple en somme directe au sens des algèbres de sous-algèbres simples on a : *Si $\mathcal{L}$ est semi-simple mais pas simple, le système de racines de $\mathcal{L}$ est composé de deux ou plusieurs sous-ensembles mutuellement orthogonaux.*

5.5 Poids des algèbres de Lie semi-simples complexes

Dans ce chapitre on va introduire les poids d'une représentation (dont les racines sont le cas particuliers pour la représentation adjointe) et leur relations avec les racines. On va donner une suite de propositions qui permettent de déterminer complètement les poids d'une représentation.
Soit $(h, \mathcal{V})$ une représentation de $\mathcal{L}$ dans un espace vectoriel $\mathcal{V}$ de dimension $n < \infty$. Le problème ressemble à celui des racines. En effet on s'intéresse aux vecteurs propres v dans $\mathcal{V}$, $\forall\, h(H), H \in \mathcal{L}_0$:

$$h(H)v = \mu(H)v, \quad \forall\, H \in \mathcal{L}_0$$

Définition 5.19 *L'application linéaire $\mu : \mathcal{L}_0 \to \mathbb{C}; H \mapsto \mu(H)$ est appelé un* poids *de la représentation h.*

Un poids μ peut se représenter par un vecteur à d_0 dimensions : $\mu = \{\mu_i = \mu(H_i)\}_{i=1}^{d_0} \in \mathbb{C}^{d_0}$ et v est appelé *vecteur poids.*

On introduit les notations suivantes : $\mathcal{H}_i = h(H_i)$, $\mathcal{E}_\alpha = h(E_\alpha)$. Comme la représentation conserve le produit de Lie on a : $h([X, Y]) = [h(X), h(Y)]$ on tire directement du résultat trouvé sur les racines que :

$$[\mathcal{H}_j, \mathcal{H}_k] = 0 \qquad [\mathcal{H}_j, \mathcal{E}_\alpha] = \alpha_j \mathcal{E}_\alpha$$

et

$$[\mathcal{E}_\alpha, \mathcal{E}_\beta] = \begin{cases} \sum_{j=1}^{d_0} \alpha^j \mathcal{H}_j & \text{si } \alpha + \beta = 0 \\ \tau_{\alpha\beta} \mathcal{E}_{\alpha+\beta} & \text{si } \alpha + \beta \in \mathcal{R} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 5.20

1. *Soit v un vecteur poids à poids μ et $\alpha \in \mathcal{R}$ une racine de $\mathcal{L}$. Alors $\mathcal{E}_\alpha v$ est un vecteur poinds à poids $\mu + \alpha$, en particulier si existe un vecteur poids non nul à poids μ tq. $\mathcal{E}_\alpha v \neq 0$, alors $\mu + \alpha$ est un poids de la représentation considérée :*

$$\mathcal{H}(\mathcal{E}_\alpha v) = [\mu(H) + \alpha(H)](\mathcal{E}_\alpha v)$$

2. *Soient $v^{(1)}, \dots, v^{(N)}$ des vecteurs poids non-nuls à poids $\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(N)}$* différents. *Alors $v^{(1)}, \dots, v^{(N)}$ sont linéairement indépendants.*
3. *Le nombre de poids d'une représentation $\mathcal{L}$ est inférieur ou égale à la dimension n de $\mathcal{V}$.*

Remarque 5.21 *Si $v \neq 0$ est un vecteur poids du poids μ. Alors le sous-espace engendré par action avec tous les $\mathcal{E}_\alpha, \alpha \in \mathcal{R}$ (appliqués aussi plusieurs fois) est invariant sous tous les éléments de $h(\mathcal{L})$.*

Proposition 5.22 *Soit $(h, \mathcal{V})$ une représentation* irréductible *de $\mathcal{L}$. Alors :*

1. *Les opérateurs $\mathcal{H} \equiv h(H)$, lorsque H varie sur $\mathcal{L}_0$, sont simultanément diagonalisables.*
2. *Si μ et μ' sont deux poids différents de cette représentation, il existe une racine $\alpha \in \mathcal{R}$ tq. $\mu' = \mu + \alpha$.*
3. *La dimension n de $\mathcal{V}$ est égal au nombre de poids (comptés avec leur multiplicité).*

Proposition 5.23 *Soit $(h, \mathcal{V})$ une représentation de* dimension finie *de $\mathcal{L}$, μ un poids et $\alpha \in \mathcal{R}$. Alors :*

1. $N = -2\frac{\alpha \cdot \mu}{\|\alpha\|^2} \in \mathbb{Z}$
2. $\forall k \in \mathbb{Z} \cap [0, N]$, *$\mu + k\alpha$ est un poids.*
3. *$\mu - 2\frac{\alpha \cdot \mu}{\|\alpha\|^2}\alpha$ est un poids.*

Dans cette dernière proposition on a utilisé la notation du produit scalaire comme en rélativité : $\alpha \cdot \mu = \sum_{j=1}^{d_0} \alpha^j \mu_j$

Cette proposition implique que les poids sont arrangés de façon symétrique par rapport aux hyperplans orthogonals à la racine α (si on considère α et μ comme vecteurs de $\mathbb{R}^{d_0}$).

Corollaire 5.24 *Si on a choisi une base $\{H_j\}$ de $\mathcal{L}_0$ tq. les $\alpha_j \equiv \alpha(H_j) \in \mathbb{R}$ pour chaque racine $\alpha \in \mathcal{R}$ et tq. $g_{ij} = \delta_{ij}$ et soit μ un poids d'unre représentaiton de dimension finie de $\mathcal{L}$, alors $\mu_j \equiv \mu(H_j)$ est aussi réel ($j = 1, \dots, d_0$).*

Vu que les poids sont des vecteurs à d_0 composantes, il n'y a pas en principe une relation d'ordre. C'est pourquoi on introduit la notion de poids maximal (qui détermine tous les autres).

Définition 5.25 *Soient $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{d_0})$ et $\mu' = (\mu'_1, \dots, \mu'_{d_0})$ deux poids. On dit que μ est plus grand que μ' si le premier terme non nul de la suite $(\mu_{d_0} - \mu'_{d_0}, \dots, \mu_1 - \mu'_1)$ est positif. Les plus grand est appelé le* poids maximal.

Proposition 5.26 *Le poids maximal d'une représentation* irréductible *de $\mathcal{L}$ est de* multiplicité 1.

Une dernière remarque : deux représentations équivalentes de $\mathcal{L}$ possèdent les mêmes poids avec mêmes multiplicités. Les classes d'équivalence de représentations irréductibles sont caractérisées par leur poids maximal : on peut montrer que deux représentations irréductibles possédant le même poids maximal sont équivalentes.
Les exemples pour l'algèbre de Lie de $SU(2)$ et $SU(3)$ sont traitées dans le cours et sont très utiles pour apprecier la beauté de cette théorie.