RELATIVITE ET COSMOLOGIE — 26 octobre 1999

Série 1 : Relativité restreinte

Transformation de Lorentz propres orthochrones et SL(2,C)

Rotations propres et SU(2,C)

Problème 1

Etablir le résultat suivant.

« Toute transformation de Lorentz propre orthochrone peut s'écrire sous la forme

$$\Lambda = R_1 \Lambda_1 R_2$$

où R_1 et R_2 sont des rotations et Λ_1 un « boost » dans la direction 1 ».

Idée :

1) Vérifier que pour toute transformation Λ et Λ' dans $L_+^\uparrow$, telles que

$$\Lambda\begin{pmatrix}1\\ \vec{0}\end{pmatrix} = \Lambda'\begin{pmatrix}1\\ \vec{0}\end{pmatrix}$$

il existe une rotation R telle que

$$\Lambda' = \cancel{R}\Lambda R$$

2) Pour tout Λ dans $L_+^\uparrow$, considérer le « boost » dans la direction 1

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} ch\eta & sh\eta & 0 \\ sh\eta & ch\eta & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

où $ch\eta = \Lambda^0_{\ 0}$, puis utiliser le premier résultat.

Problème 2

1) Vérifier que toute matrice $X \in M_2(C)$ peut s'exprimer sous la forme

$$X = \sum_{\alpha=0}^{3} x^\alpha \sigma^\alpha = x^0 \sigma^0 + \vec{x}\cdot\vec{\sigma}$$

où les σ^α sont les matrices de Pauli et

$$x^\alpha = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left(X\,\sigma^\alpha\right).$$

2) A tout $x = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) \in R^4$ on associe la matrice

$$X = \sum_\alpha x^\alpha \sigma^\alpha.$$

Vérifier que : $\det X = \left(x^0\right)^2 - \vec{x}^2 \equiv - x\cdot x.$

3) Pour tout $A \in SL(2, C)$ on définit l'application de $M_2(C)$ sur lui-même par :

$$X \to X' = A\,X\,A^*.$$

Vérifier que cette application induit une transformation de Lorentz sur R^4, soit $\Lambda(A)$.

4) Etablir les résultats suivants :

matrices unitaires : si $U \in SL(2, C)$ et $UU^* = 1$, alors

$$U = \cos\frac{\theta}{2}\,1 + i\sin\frac{\theta}{2}\,\underbrace{\vec{n}\cdot\vec{\sigma}}_{\sum n_i\cdot\sigma_i} \quad , \quad |\vec{n}| = 1$$

et $\Lambda(U)$ est une **rotation** d'axes d'angle θ autour de l'axe $\vec{n}$:

$$\Lambda(U)^0_{\ 0} = 1 \ ; \ \Lambda(U)^0_{\ i} = \Lambda(U)^i_{\ 0} = 0$$

$$\Lambda(U)^i_{\ j} = \cos\theta\,\delta_{ij} + (1-\cos\theta)\,n_i\,n_j + \sin\theta\,\varepsilon_{ijk}\,n^k$$

matrice hermitienne : Si $H \in SL(2, C)$ et $H = H^*$, alors

$$H = ch\frac{\eta}{2}\,1 - sh\frac{\eta}{2}\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma} \quad , \quad |\vec{n}| = 1$$

et $\Lambda(H)$ est une **transformation de Lorentz pure** (sans rotation) de rapidité η et de direction $\vec{n}$

$$\Lambda(H)^0_{\ 0} = ch\,\eta \quad , \quad \Lambda(H)^0_{\ i} = \Lambda(H)^i_{\ 0} = -\,sh\,\eta\,n^i$$

$$\Lambda(H)^i_{\ j} = \delta_{ij} + (ch\,\eta - 1)\,n^i\,n^j\left(th\,\eta = \frac{|\vec{v}|}{c}\right).$$

5) Etablir les résultats suivants :

$$\Lambda(1) = I \ ; \ \Lambda(-A) = \Lambda(A) : \Lambda(AB) = \Lambda(A)\cdot\Lambda(B) \ ;$$

$$\Lambda(A) = \Lambda(B) \to B = \pm A$$

c.à.d. l'application $A \to \Lambda(A)$ est un homomorphisme 2 : 1 de SL(2, C) sur $L_+^\uparrow$

"SL(2, C) est le groupe de revêtement universel de $L_+^\uparrow$".

En particulier :

Si Λ est une **rotation**, alors $\Lambda\ \Lambda^T = 1$

Si Λ est une transformation de **Lorentz pure**, alors $\Lambda = \Lambda^T$.

6) Etablir d'autre part la relation :

$$\Lambda(\vec{v}) = R^{-1}(\vec{n})\quad \Lambda(\vec{v}')\quad R(\vec{n})\ ;$$

où $\quad v'^i = R(\vec{n})^i{}_j\, v^j$

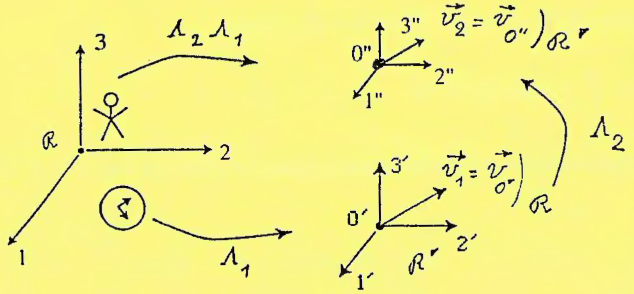
ceci montre en particulier que toute transformation de Lorentz pure peut se ramener à un « boost » dans la direction 1.

Problème 3

1) Soit $\Lambda_1 = \Lambda(\vec{v}_1)$ et $\Lambda_2 = \Lambda(\vec{v}_2)$ deux transformations de Lorentz pures (sans rotation). Trouver la décomposition

$$\Lambda_2\ \Lambda_1 = R\ \Lambda$$

où R est une rotation propre et Λ une transformation de Lorentz pure.



En particulier, vérifier que $\Lambda = \Lambda(\vec{v})$ où $\vec{v}$ est relié à $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ par la décomposition des vitesses.

2) Une particule avec spin (ou un gyroscope) évolue en se déplaçant constamment parallèlement à lui-même. Trouver la vitesse de précession du spin par rapport à l'observateur : "précession de Thomas". Trouver la relation entre l'accélération du spin mesurée dans le référentiel de repos et dans celui de l'observateur.

CTDL vol. 2, p. 1205.

Propriétés générales

« Matrices de Pauli »

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};\ \sigma^1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix};\ \sigma^2 = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix};\ \sigma^3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$(\sigma^\alpha)^* = \sigma^\alpha\ ;\ (\sigma^\alpha)^2 = 1\ ;\ \mathrm{Tr}\sigma^\alpha = 2\delta_{\alpha 0} \tag{1}$$

$$\sigma^j\sigma^k = \delta_{jk}\ \ 1 + i\,\varepsilon_{jkl}\sigma^l \qquad j,k,l\ \varepsilon\{1,2,3\}$$

$$\Rightarrow \boxed{(\vec{n}\,.\,\vec{\sigma})\,(\vec{m}\,.\,\vec{\sigma}) = (\vec{n}\,.\,\vec{m})\ 1 + i(\vec{n}\wedge\vec{m})\,.\,\vec{\sigma}} \tag{2}$$

$$\mathrm{Tr}\sigma^\alpha\sigma^\beta = 2\delta_{\alpha\beta} \tag{3}$$

$$\mathrm{Tr}\sigma^j\sigma^k\sigma^l = 2i\varepsilon_{jkl} \tag{4}$$

$$\mathrm{Tr}\sigma^i\sigma^j\sigma^k\sigma^l = 2\left[\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right] \tag{5}$$

$$\boxed{\forall A \in SL(2,C) \Rightarrow\ A = U\,.\,H\ \text{où}\ UU^* = 1\ \text{et}\ H = H^*} \tag{6}$$

Explicitement (« décomposition polaire »)

$H = \sqrt{A^*A}$ et $U = AH^{-1}$ avec la définition de $\sqrt{B}$:

$\forall\ B = b^0 1 + \vec{b}\,.\,\vec{\sigma}\ \Rightarrow$

$$\sqrt{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{\sqrt{b^0 + \sqrt{(b^0)^2 - \vec{b}^2}}}\left[\sqrt{(b^0)^2 - \vec{b}^2}\ 1 + B\right] \tag{7}$$

Si $B \in\ SL(2,C) \Rightarrow (b^0)^2 - \vec{b}^2 = 1$

$$\text{d'où}\ \sqrt{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1+b^0}}\ \left[(1+b^0)\ 1 + \vec{b}\,.\,\vec{\sigma}\right] \tag{8}$$

$$2\sin\frac{\theta}{2}\ \cos\frac{\theta}{2} = \sin\theta\ ; 2\sin^2\frac{\theta}{2} = 1-\cos\theta\ ;\ \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = \cos\theta$$

$$2sh\frac{\eta}{2}ch\frac{\eta}{2} = sh\eta\ ;\ 2sh^2\frac{\eta}{2} = ch\eta - 1\ ;\ ch^2\frac{\eta}{2} + sh^2\frac{\eta}{2} = ch\eta$$

Relativité et Cosmologie — Série 1

Problème 1

1) Soit Λ et $\Lambda' \in \mathcal{L}_+^\uparrow$, tels que

$$\Lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \Lambda' \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

alors $\Lambda^{-1}\Lambda' \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{0} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ la matrice $\mathcal{R} = \Lambda^{-1}\Lambda'$ est telle que $\mathcal{R}^0{}_0 = 1$, $\mathcal{R}^i{}_0 = 0$, et $\mathcal{R} \in \mathcal{L}_+^\uparrow$

[car: $\mathcal{R}^T \eta \mathcal{R} = \Lambda'^T \Lambda^{-1\,T} \eta \Lambda^{-1} \Lambda' = \Lambda'^T \eta \Lambda' = \eta$ et $\det \mathcal{R} = +1$]

Par conséquent $\mathcal{R}$ est une rotation. En effet :

$$(1) \quad \eta = \mathcal{R}^T \eta \mathcal{R} \Leftrightarrow \eta \mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}^T \eta \Leftrightarrow \mathcal{R}^{-1} = \eta \mathcal{R}^T \eta \Leftrightarrow \mathcal{R}^{-1}\eta = \eta \mathcal{R}^T$$

d'où (2) $\eta = \mathcal{R} \eta \mathcal{R}^T$

et (avec $\eta^{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$)

$$(1) \Rightarrow \eta_{00} = -1 = \mathcal{R}^\alpha{}_0 \eta_{\alpha\beta} \mathcal{R}^\beta{}_0 = -(\mathcal{R}^0{}_0)^2 + \sum_i (\mathcal{R}^i{}_0)^2$$

$$(2) \Rightarrow \eta^{00} = -1 = \mathcal{R}^0{}_\alpha \eta^{\alpha\beta} \mathcal{R}^0{}_\beta = -(\mathcal{R}^0{}_0)^2 + \sum_i (\mathcal{R}^0{}_i)^2$$

Par conséquent, $\forall\, \mathcal{R} \in \mathcal{L}_+$, la condition $\mathcal{R}^0{}_0 = 1$ implique $\mathcal{R}^i{}_0 = \mathcal{R}^0{}_i = 0$ et $\mathcal{R}$ est une rotation propre car

$$\mathcal{R} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R \end{array}\right) \quad \text{avec } R^T R = \mathbb{1} \text{ et } \det R = 1 \quad \blacksquare$$

$$\Rightarrow \boxed{\Lambda' = \Lambda \cdot \mathcal{R}} \qquad (3)$$

2) Pour tout $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$, posons

$$\Lambda^0{}_0 = \operatorname{ch}\eta \qquad \text{et} \qquad r = \operatorname{sh}\eta$$

De : $\eta = \Lambda^T \eta \Lambda \Rightarrow 1 = (\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i{}_0)^2$
$= \operatorname{ch}^2\eta - \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i{}_0)^2$

d'où $r^2 = \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i{}_0)^2$

Posons alors
$$\Lambda_1 = \left(\begin{array}{cc|c} \operatorname{ch}\eta & \operatorname{sh}\eta & 0 \\ \operatorname{sh}\eta & \operatorname{ch}\eta & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & \mathbb{1} \end{array}\right) \in \mathcal{L}_+^\uparrow \qquad (4)$$

$$\Rightarrow \Lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 \\ r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Comme $r^2 = \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i{}_0)^2$, $\exists$ une rotation R_1 de $\mathbb{R}^3$ qui amène le 3-vecteur $(r, 0, 0)$ sur le 3-vecteur $(\Lambda^1{}_0, \Lambda^2{}_0, \Lambda^3{}_0)$.

Par conséquent la rotation

$$\mathcal{R}_1 = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R_1 \end{array}\right) \quad \text{est telle que}$$

$$\mathcal{R}_1 \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 \\ r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 \\ \Lambda^1{}_0 \\ \Lambda^2{}_0 \\ \Lambda^3{}_0 \end{pmatrix} \overset{(5)}{=} \mathcal{R}_1 \Lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{0} \end{pmatrix} \equiv \Lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

Comme $\mathcal{R}_1 \Lambda_1 \in \mathcal{L}_+^\uparrow$, de la première partie on conclut qu'il existe une rotation $\mathcal{R}_2$ telle que

$$\boxed{\Lambda = \mathcal{R}_1 \Lambda_1 \mathcal{R}_2}$$

<u>Remarque</u> : Λ_1 est un boost de vitesse $c \operatorname{th}\eta\, \vec{e}_1$.

Problème 9

Soit $\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$; $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

1) Pour tout $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^4$, posons

$$\boxed{X \doteq \sum_{\alpha=0}^{3} x^\alpha \sigma^\alpha} = x^0 \mathbb{1} + \vec{x}\cdot\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - i x^2 \\ x^1 + i x^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$\Rightarrow$ $Tr(X\sigma^\beta) = \sum_\alpha x^\alpha \underbrace{Tr(\sigma^\alpha \sigma^\beta)}_{= 2\delta_{\alpha\beta}} = 2x^\beta$

d'où $\boxed{x^\beta = \frac{1}{2} Tr(X\sigma^\beta)}$ (2)

En particulier : $\sum_\alpha x^\alpha \sigma^\alpha = \sum_\alpha y^\alpha \sigma^\alpha \Leftrightarrow x^\alpha = y^\alpha$

Inversement : $\forall\ X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$, posons

$x^\alpha = \frac{1}{2} Tr(X\sigma^\alpha)$, c.à.d.

$$\left.\begin{aligned} a+d &= 2x^0 \\ a-d &= 2x^3 \\ b+c &= 2x^1 \\ b-c &= -2i x^2 \end{aligned}\right\} \quad \text{alors} \quad X = \sum_\alpha x^\alpha \sigma^\alpha \quad (3)$$

2) $\det X \overset{(1)}{=} x^{0\,2} - x^{3\,2} - x^{1\,2} - x^{2\,2} = x^{0\,2} - \vec{x}^{\,2} = -\eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta$

$\Rightarrow$ $\boxed{\det X = -x\cdot x}$ (4)

3) $\forall\ A \in SL(2,\mathbb{C})$, on définit l'application sur $M_2(\mathbb{C})$

$$A : \begin{array}{ccc} X & \longmapsto & X' = AXA^* \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ x^\alpha & \longmapsto & x'^\alpha = \frac{1}{2} Tr(AXA^*\sigma^\alpha) \end{array}$$

Comme : $X = \sum_\beta x^\beta \sigma^\beta \mapsto x'^\alpha = \sum_\beta \frac{1}{2} Tr(A\sigma^\beta A^* \sigma^\alpha) x^\beta$

c'est à dire $x'^\alpha = \Lambda(A)^\alpha{}_\beta\, x^\beta$

où $\boxed{\Lambda(A)^\alpha{}_\beta = \frac{1}{2} Tr(\sigma^\alpha A \sigma^\beta A^*) \in \mathbb{R}}$ (5)

Comme $A \in SL(2,\mathbb{C}) \Rightarrow \det A = 1$

et $\det X' = \det(AXA^*) = \det X \cdot (\det A)^2 = \det X$

d'où $x'\cdot x' = x\cdot x \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^4$ (6)

$\Rightarrow$ $\Lambda(A)$ est une transformation de Lorentz

De plus : $\Lambda(A)^0{}_0 = \frac{1}{2} Tr(AA^*) > 0 \Rightarrow \Lambda(A) \in \mathcal{L}^\uparrow$.

Finalement comme A est connecté à l'identité dans $SL(2,\mathbb{C})$ [cf ci-dessous], c.à.d. $\exists\ A(t) \in SL(2,\mathbb{C})$, $t \in [0,1]$, tel que $A(0) = A$, $A(1) = \mathbb{1}$, continu par rapport à t,

$\exists\ \Lambda(t) = \Lambda(A(t)) \in \mathcal{L}^\uparrow$, continu p.r. à t,

avec $\Lambda(0) = \Lambda(A)$, $\Lambda(1) = \mathbb{1}$, $\det \Lambda(t) = \pm 1$

par continuité $\Rightarrow$ $\det \Lambda(t) = 1$.

En conclusion : $\boxed{\Lambda(A) \in \mathcal{L}^\uparrow_+, \quad \forall\ A \in SL(2,\mathbb{C})}$

Vérifions alors que tout $A \in SL(2,\mathbb{C})$ est connecté à $\mathbb{1}$.

Soit : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $ad - bc = 1$.

On pourra toujours supposer que $\mathrm{Re}\, a \in]0,\infty[$:

En effet : • si $a = 0$ alors $b \neq 0$,

et en introduisant

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}t) & -\sin(\frac{\pi}{2}t) \\ \sin(\frac{\pi}{2}t) & \cos(\frac{\pi}{2}t) \end{pmatrix} \cdot A \quad) \qquad t \in [0,1]$$

on aura : $\det A(t) = 1$, $A(0) = A$, $A(1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{b} & -d \\ 0 & b \end{pmatrix}$

et on se ramène par continuité à A' avec $a' \neq 0$.

- Si $\mathrm{Re}\, a < 0$, on introduit

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos \pi t & -\sin \pi t \\ \sin \pi t & \cos \pi t \end{pmatrix} A \qquad t \in [0,1]$$

on aura : $\det A(t) = 1$, $A(0) = A$, $A(1) = -A$.

En conclusion on peut toujours se ramener par continuité au cas où $\mathrm{Re}\, a > 0$.

Considérons alors $\mathrm{Re}\, a > 0$ et considérons $A(t)$ défini par :

$$t \in [0,1] \qquad \begin{cases} a(t) = a + (1-a)t \\ b(t) = (1-t)\, b \\ c(t) = (1-t)\, c \\ d(t) = \dfrac{1 + (1-t)^2 bc}{a + (1-a)t} \end{cases}$$

$A(0) = A$, $A(1) = 1$, $\det A(t) = 1$,

et $a + (1-a)t \neq 0 \quad \forall\, t \in [0,1]$.

[en effet : $a = a_1 + i a_2$, avec $a_1 > 0$, $t \in [0,1]$:

$$a + (1-a)t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1(1-t) + 1 = 0 \\ a_2(1-t) = 0 \end{cases} : \text{impossible} \ ]$$

> En conclusion toute matrice $A \in SL(2;\mathbb{C})$ est connectée à l'identité dans $SL(2;\mathbb{C})$

Remarque : La même propriété est valable dans $SL(2;\mathbb{R})$.

4) Si $\boxed{U \in SL(2,\mathbb{C}) \text{ et } UU^* = \mathbb{1}.}$

alors nécessairement U est de la forme

$$\boxed{U = \cos\frac{\theta}{2}\,\mathbb{1} + i \sin\frac{\theta}{2}\, \vec{n}\cdot\vec{\sigma} \qquad \text{avec } |\vec{n}| = 1.} \quad (7)$$

En effet : soit $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow U^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$U^{-1} = U^* \Rightarrow \bar{d} = a \qquad \bar{c} = -b$

avec $ad - bc = 1 \Rightarrow |a|^2 + |b|^2 = 1$. $\qquad (7')$

De (3) $\Rightarrow \quad U = \sum_\alpha u^\alpha \sigma^\alpha$

$$\text{avec} \begin{cases} u^0 = \frac{1}{2}(a + \bar{a}) = \mathrm{Re}(a) \\ u^3 = \frac{1}{2}(a - \bar{a}) = i\, \mathrm{Im}(a) \\ u^1 = \frac{1}{2}(b - \bar{b}) = i\, \mathrm{Im}(b) \\ u^2 = -\frac{1}{2i}(b + \bar{b}) = i\, \mathrm{Re}(b) \end{cases} \quad \vec{u} = i(n_1, n_2, n_3)$$

Soit : $a = a_1 + i a_2 \qquad b = b_1 + i b_2 \quad \overset{(7')}{\Rightarrow}$

$|a|^2 + |b|^2 = 1 \Rightarrow a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1$.

On peut donc toujours poser

$a_1 \equiv u^0 = \cos\frac{\theta}{2}$; $\quad a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = \sin^2\frac{\theta}{2} = \vec{n}^2$

c.à.d. $\vec{u} = i \sin\frac{\theta}{2} \cdot \vec{n}$ ■

Finalement :

$$\boxed{\forall\, U \in SL(2,\mathbb{C}) \text{ avec } UU^* = \mathbb{1} \Rightarrow \Lambda(U) \in \mathcal{R}_+}$$

En effet : $\begin{cases} \Lambda(U)^0{}_0 = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma^0 U \sigma^0 U^*) = 1 \\ \Lambda(U)^0{}_i = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma^0 U \sigma^i U^*) = 0 = \Lambda(U)^i{}_0 \end{cases}$

Interprétation de $\Lambda(U)$ où $U = \cos\frac{\theta}{2}\,\mathbb{1} + i\sin\frac{\theta}{2}\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}$

1ère Méthode

$$\Lambda(U)^i{}_j = \frac{1}{2}\,Tr(\sigma^i U \sigma^j U^*)$$

$$\sigma^i U \overset{(7)}{=} \sigma^i \cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\;\sigma^i\sigma^k n_k$$

$$\sigma^j U^* \overset{(7)}{=} \sigma^j \cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}\;\sigma^j\sigma^l n_l$$

$$\sigma^i U \sigma^j U^* = \sigma^i\sigma^j\cdot\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\cdot\sigma^i\sigma^k\sigma^j\sigma^l\, n_k n_l + i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,[\sigma^i\sigma^k\sigma^j n_k - \sigma^i\sigma^j\sigma^l n_l]$$

$$\frac{1}{2}\,Tr(\sigma^i U\sigma^j U^*) = \cos^2\frac{\theta}{2}\cdot\delta_{ij} + \sin^2\frac{\theta}{2}\,[\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk}]\,n_k n_l + i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cdot 2i\,[\varepsilon_{ikj}n_k - \varepsilon_{ijl}n_l]$$

$$= \cos^2\frac{\theta}{2}\,\delta_{ij} + \sin^2\frac{\theta}{2}\,[2n_i n_j - \delta_{ij}] + \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,[\varepsilon_{ijl}n_l - \varepsilon_{ikj}n_k]$$

De $\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\sin\theta$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = \cos\theta$$

$$2\sin^2\frac{\theta}{2} = 1 - \cos\theta \qquad (8)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Lambda(U)^i{}_j = \cos\theta\,\delta_{ij} + (1-\cos\theta)\,n^i n^j + \sin\theta\,\varepsilon_{ijk}\,n^k}$$

Rotation des axes d'un angle θ autour de $\vec{n}$.

2ème Méthode : Approche vectorielle

Soit : $U = \cos\frac{\theta}{2}\,\mathbb{1} + i\sin\frac{\theta}{2}\,\hat{n}\cdot\vec{\sigma}$

$U^* = \cos\frac{\theta}{2}\,\mathbb{1} - i\sin\frac{\theta}{2}\,\hat{n}\cdot\vec{\sigma}$

$$U X U^* = \cos^2\frac{\theta}{2}\,X + i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,[\hat{n}\cdot\vec{\sigma}X - X\,\hat{n}\cdot\vec{\sigma}] + \sin^2\frac{\theta}{2}\,(\hat{n}\cdot\vec{\sigma})\,X\,(\hat{n}\cdot\vec{\sigma})$$

Soit $X = x^0\,\mathbb{1} + \vec{x}\cdot\vec{\sigma} \Rightarrow$

- $[\hat{n}\cdot\vec{\sigma}\,X - X\,\hat{n}\cdot\vec{\sigma}] = (\hat{n}\cdot\vec{\sigma})(\vec{x}\cdot\vec{\sigma}) - (\vec{x}\cdot\vec{\sigma})(\hat{n}\cdot\vec{\sigma}) = 2i\,(\hat{n}\wedge\vec{x})\cdot\vec{\sigma}$
- $(\hat{n}\cdot\vec{\sigma})X(\hat{n}\cdot\vec{\sigma}) = x^0(\hat{n}\cdot\vec{\sigma})(\hat{n}\cdot\vec{\sigma})\,\mathbb{1} + (\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\,[(\vec{x}\cdot\vec{\sigma})(\hat{n}\cdot\vec{\sigma})] =$

$$= x^0\,\hat{n}^2\,\mathbb{1} + (\vec{n}\cdot\vec{\sigma})[(\vec{x}\cdot\hat{n})\,\mathbb{1} + i(\vec{x}\wedge\hat{n})\cdot\vec{\sigma}]$$

$$= x^0\,\mathbb{1} + (\vec{x}\cdot\hat{n})(\hat{n}\cdot\vec{\sigma}) + [i\hat{n}\cdot(\vec{x}\wedge\hat{n})\,\mathbb{1} - (\hat{n}\wedge(\vec{x}\wedge\hat{n}))\cdot\vec{\sigma}]$$

$$= x^0\,\mathbb{1} + (\vec{x}\cdot\hat{n})\,\hat{n}\cdot\vec{\sigma} - [\hat{n}\wedge(\vec{x}\wedge\hat{n})]\cdot\vec{\sigma}$$

d'où : $X' = U X U^* = x'^0\,\mathbb{1} + \vec{x}'\cdot\vec{\sigma} =$

$$= \left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right)x^0\,\mathbb{1} + \cos^2\frac{\theta}{2}\,\vec{x}\cdot\vec{\sigma} - 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,(\hat{n}\wedge\vec{x})\cdot\vec{\sigma}$$

$$+ \sin^2\frac{\theta}{2}\,(\vec{x}\cdot\hat{n})\,\hat{n}\cdot\vec{\sigma} - \sin^2\frac{\theta}{2}\,[\hat{n}\wedge(\vec{x}\wedge\hat{n})]\cdot\vec{\sigma}$$

$$= x^0\,\mathbb{1} + (\vec{x}\cdot\hat{n})\,\hat{n}\cdot\vec{\sigma} + \cos^2\frac{\theta}{2}\,[\hat{n}^2\,\vec{x} - (\vec{x}\cdot\hat{n})\hat{n}]\cdot\vec{\sigma}$$

$$- \sin^2\frac{\theta}{2}\,[\hat{n}\wedge(\vec{x}\wedge\hat{n})]\cdot\vec{\sigma} + \sin\theta\,(\vec{x}\wedge\hat{n})\cdot\vec{\sigma}$$

$$= x^0\,\mathbb{1} + \{(\vec{x}\cdot\hat{n})\,\hat{n} + \cos\theta\,[\hat{n}\wedge(\vec{x}\wedge\hat{n})] + \sin\theta\,(\vec{x}\wedge\hat{n})$$

$$= x^0\,\mathbb{1} + (R_{-\theta\hat{n}}\,\vec{x})\cdot\vec{\sigma}$$

$\Rightarrow x'^0 = x^0$ et $\vec{x}' = R_{-\theta\hat{n}}\,\vec{x}$ "actif"

Du pt de vue "passif" $\Rightarrow$ $\boxed{\text{rotation des axes de } \theta \text{ autour de } \hat{n}.}$

Si $\boxed{H \in SL(2;\mathbb{C}) \quad \text{avec} \quad H = H^*}$

alors nécessairement H est de la forme

$$\boxed{H = \mathrm{ch}\frac{\eta}{2}\,\mathbb{1} - \mathrm{sh}\frac{\eta}{2}\,\vec n\cdot\vec\sigma} \quad \text{avec } |\vec n|=1 \qquad (9)$$

En effet: $H = \sum_\alpha h^\alpha \sigma^\alpha = H^* = \sum_\alpha \bar h^\alpha \sigma^\alpha$

(car $\sigma^\alpha = (\sigma^\alpha)^*$) $\Rightarrow$ $h^\alpha = \bar h^\alpha \in \mathbb{R}$.

De plus dét $H = (h^0)^2 - |\vec h|^2 = 1$, on peut toujours poser:

$$h^0 = \mathrm{ch}\frac{\eta}{2} \quad \text{et} \quad \vec h = \mathrm{sh}\frac{\eta}{2}\,\vec n \quad \text{où } |\vec n| = 1.$$

Calculons: $\Lambda(H)^\alpha{}_\beta = \frac12\,\mathrm{Tr}(\sigma^\alpha H \sigma^\beta H^*)$

$$\sigma^\alpha H = \mathrm{ch}\frac\eta2\,\sigma^\alpha - \mathrm{sh}\frac\eta2\,\sigma^\alpha\sigma^k n_k$$
$$\sigma^\beta H^* = \mathrm{ch}\frac\eta2\,\sigma^\beta - \mathrm{sh}\frac\eta2\,\sigma^\beta\sigma^\ell n_\ell$$

$$\sigma^\alpha H\sigma^\beta H^* = \mathrm{ch}^2\frac\eta2\,\sigma^\alpha\sigma^\beta + \mathrm{sh}^2\frac\eta2\,\sigma^\alpha\sigma^k\sigma^\beta\sigma^\ell n_k n_\ell - \mathrm{ch}\frac\eta2\,\mathrm{sh}\frac\eta2\,[\sigma^\alpha\sigma^\beta\sigma^\ell n_\ell + \sigma^\alpha\sigma^k\sigma^\beta n_k]$$

i) $\mathrm{Tr}[\sigma^0 H\sigma^0 H^*] = \underbrace{2\,\mathrm{ch}^2\frac\eta2 + 2\,\mathrm{sh}^2\frac\eta2}$ [car $\vec n^2=1$]

$$= 2\,\mathrm{ch}\,\eta$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\Lambda(H)^0{}_0 = \mathrm{ch}\,\eta}$

ii) $\mathrm{Tr}[\sigma^0 H\sigma^j H^*] = \mathrm{sh}^2\frac\eta2\cdot 2i\,\underbrace{\varepsilon^{kj\ell} n_k n_\ell}_{=0} +$

$$- \mathrm{ch}\frac\eta2\,\mathrm{sh}\frac\eta2\,[2n_j + 2n_j]$$

$2\,\mathrm{ch}\frac\eta2\,\mathrm{sh}\frac\eta2 = \mathrm{sh}\,\eta$ $\Rightarrow$ $\boxed{\Lambda(H)^0{}_j = -\mathrm{sh}\,\eta\cdot n^j = \Lambda(H)^j{}_0}$

iii) $\mathrm{Tr}[\sigma^i H\sigma^j H^*] = 2\,\mathrm{ch}^2\frac\eta2\,\delta_{ij} + 2\,\mathrm{sh}^2\frac\eta2\,[2n^in^j - \delta_{ij}]$

$$- \mathrm{ch}\frac\eta2\,\mathrm{sh}\frac\eta2\,\underbrace{[2i\,\varepsilon^{ij\ell}n_\ell + 2i\,\varepsilon^{ikj}n_k]}_{=0}$$

$$\mathrm{ch}^2\frac\eta2 - \mathrm{sh}^2\frac\eta2 = 1 \quad \text{et} \quad 2\,\mathrm{sh}^2\frac\eta2 = \mathrm{ch}\,\eta - 1$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\Lambda(H)^i{}_j = \delta_{ij} + (\mathrm{ch}\,\eta - 1)\,n^in^j}$ (10)

$\Rightarrow$ $\Lambda(H)^\alpha{}_\beta$ est une transformation de Lorentz pure, ou "boost", de vitesse $\vec v$, avec

$\boxed{\vec v = c\,\mathrm{th}\,\eta\,\hat n}$ c.à.d. $\Lambda(H) = \Lambda(\vec v)$. (11)

5) De $\Lambda(A)^\alpha{}_\beta = \frac12\,\mathrm{Tr}(\sigma^\alpha A\sigma^\beta A^*)$, il vient:

i) $\Lambda(\pm \mathbb{1})^\alpha{}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$ d'où $\boxed{\Lambda(\pm \mathbb{1}) = \text{Identité}}$

ii) $\Lambda(A) = \Lambda(-A)$ et $\boxed{\Lambda(A^*) = \Lambda(A)^T}$

En particulier: $H = H^*$ $\Rightarrow$ $\Lambda(H) = \Lambda(H)^T$: "boost"

$UU^* = \mathbb{1}$ $\Rightarrow$ $\Lambda(U)\cdot\Lambda(U)^T = \mathbb{1}$: "rotation"

iii) Soit: $X \to X' = AXA^* \to X'' = B(AXA^*)B^* = (BA)X(BA)^*$

$$\Rightarrow \quad x \to x' = \Lambda(A)x \to x'' = \Lambda(B)[\Lambda(A)x] = \Lambda(BA)x$$

$\forall x\in\mathbb{R}^4$. D'où $\boxed{\Lambda(B)\cdot\Lambda(A) = \Lambda(B\cdot A)}$ (12)

iv) Remarquons pour commencer

$\forall A,B\in M_2(\mathbb{C})$, la condition $\mathrm{Tr}(A\sigma^\alpha) = \mathrm{Tr}(B\sigma^\alpha)$ implique $A=B$. (cf. p. 1)

$$Si \quad \Lambda(A) = \Lambda(B) \Leftrightarrow Tr(A^* \sigma^\alpha A \sigma^\beta) = Tr(B^* \sigma^\alpha B \sigma^\beta)$$

$$\text{d'où} \quad A^* \sigma^\alpha A = B^* \sigma^\alpha B \qquad (13)$$

en particulier : $(\alpha = 0)$ $\quad A^* A = B^* B = H^2$

Posons: $\quad A = U_A H \quad$ et $\quad B = U_B H \qquad (H = H^*)$

$$(13) \quad U_A^{-1} \sigma^\alpha U_A = U_B^{-1} \sigma^\alpha U_B$$

$$\Rightarrow (U_B U_A^{-1}) \sigma^\alpha = \sigma^\alpha (U_B U_A^{-1})$$

$$\Rightarrow U_B U_A^{-1} = \lambda \mathbb{1} \Rightarrow U_B = \lambda U_A$$

De plus $\det(U_A) = 1 = \det(\lambda U_B) = \lambda^2 \det U_B = \lambda^2$

$\Rightarrow \lambda = \pm 1$: $\boxed{\Lambda(A) = \Lambda(B) \Leftrightarrow A = \pm B}$

> En conclusion l'application $A \to \Lambda(A)$ est un homomorphisme $2:1$ de $SL(2;\mathbb{C})$ dans $\mathcal{L}_+^\uparrow$

On peut de plus montrer que cette application est <u>surjective</u> (cf fin de l'exercice), c.à.d tout $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ est l'image d'une matrice de $SL(2;\mathbb{C})$.
De plus $SL(2;\mathbb{C})$ est simplement connexe : on dit alors que $SL(2;\mathbb{C})$ est le <u>revêtement universel</u> <u>de $\mathcal{L}_+^\uparrow$</u>

<u>Remarque</u>
En conclusion $\forall \Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$, $\exists \pm A \in SL(2;\mathbb{C})$ telle que $\Lambda(A) = \Lambda$. On peut toujours décomposer A sous la forme $A = U H$ avec $U \cdot U^* = \mathbb{1}$ et $H = H^* \Rightarrow \Lambda(A) = \Lambda(U)\Lambda(H)$

> Toute transformation de Lorentz $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ peut s'exprimer comme produit d'une rotation propre et d'un boost de vitesse $\vec{v}$
> $$\Lambda = R_{\vec{n}} \cdot \Lambda(\vec{v})$$

6) Montrons que : $\boxed{\Lambda(R\vec{v}) = R^{-1}(\vec{n}) \cdot \Lambda(\vec{v}) \cdot R(\vec{n})}$

où $R(\vec{n})$ est la matrice de <u>rotation des axes</u> d'un angle $|\vec{n}|$ autour de $\vec{n}$.

et $R\vec{v}$ est la <u>rotation active</u> du vecteur $\vec{v}$ d'un angle $|\vec{n}|$ autour de $\vec{n}$

Soit $\quad R(\vec{n}) = \Lambda(U_{\vec{n}}) \qquad \Lambda(\vec{v}) = \Lambda(H_{\vec{v}})$

$$R^{-1}(\vec{n}) \cdot \Lambda(\vec{v}) \cdot R(\vec{n}) = \Lambda(U_{-\vec{n}})\, \Lambda(H_{\vec{v}})\, \Lambda(U_{\vec{n}})$$

$$= \Lambda(U_{-\vec{n}} \cdot H_{\vec{v}} \cdot U_{\vec{n}}) \qquad \vec{v} = v\,\hat{m}$$

$$U_{-\vec{n}} \cdot H_{\vec{v}} \cdot U_{\vec{n}} = [\cos\tfrac{\theta}{2} \mathbb{1} - i \sin\tfrac{\theta}{2} \hat{n}\cdot\vec{\sigma}] \cdot$$
$$\cdot [ch\tfrac{\varphi}{2} \mathbb{1} - sh\tfrac{\varphi}{2} \hat{m}\cdot\vec{\sigma}] \cdot [\cos\tfrac{\theta}{2} \mathbb{1} + i \sin\tfrac{\theta}{2} \hat{n}\vec{\sigma}]$$

$$= \cos^2\tfrac{\theta}{2}\, ch\tfrac{\varphi}{2} \mathbb{1} - sh\tfrac{\varphi}{2} \cos^2\tfrac{\theta}{2}\, \hat{m}\cdot\vec{\sigma} + i \underbrace{\sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}\, ch\tfrac{\varphi}{2}\, \hat{n}\vec{\sigma}}$$
$$\underbrace{- i \sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}\, ch\tfrac{\varphi}{2}\, \hat{n}\cdot\vec{\sigma}} - i \sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2} (\hat{m}\vec{\sigma})(\hat{n}\cdot\vec{\sigma}) \cdot sh\tfrac{\varphi}{2}$$
$$+ i \sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}\, sh\tfrac{\varphi}{2} (\hat{n}\vec{\sigma})(\hat{m}\vec{\sigma}) + \sin^2\tfrac{\theta}{2}\, ch\tfrac{\varphi}{2} \underbrace{(\hat{n}\vec{\sigma})(\hat{n}\vec{\sigma})}_{=1}$$
$$- \sin^2\tfrac{\theta}{2}\, sh\tfrac{\varphi}{2} (\hat{n}\cdot\vec{\sigma})(\hat{m}\cdot\vec{\sigma})(\hat{n}\vec{\sigma})$$

$$= ch\tfrac{\varphi}{2} \mathbb{1} + 2 \sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}\, sh\tfrac{\varphi}{2} (\hat{m}\wedge\hat{n})\cdot\vec{\sigma}$$
$$- sh\tfrac{\varphi}{2} \cos^2\tfrac{\theta}{2} (\hat{m}\cdot\vec{\sigma}) - \sin^2\tfrac{\theta}{2}\, sh\tfrac{\varphi}{2} (\hat{n}\cdot\vec{\sigma})(\hat{m}\vec{\sigma})(\hat{n}\cdot\vec{\sigma})$$

Or : $(\hat m\cdot\vec\sigma)(\hat n\cdot\vec\sigma) = (\hat m\cdot\hat n)\mathbb{1} + i(\hat m\wedge\hat n)\cdot\vec\sigma \Rightarrow$

$$(\hat n\cdot\vec\sigma)(\hat m\cdot\vec\sigma)(\hat n\cdot\vec\sigma) = (\hat m\cdot\hat n)(\hat n\cdot\vec\sigma) + i\,\hat n\cdot(\hat m\wedge\hat n)\vec\sigma - [\hat n\wedge(\hat m\wedge\hat n)]\cdot\vec\sigma$$
$$= (\hat m\cdot\hat n)(\hat n\cdot\vec\sigma) - \hat m\cdot\vec\sigma + (\hat n\cdot\hat m)\,\hat n\cdot\vec\sigma$$
$$= 2(\hat m\cdot\hat n)(\hat n\cdot\vec\sigma) - \hat m\cdot\vec\sigma$$

D'où

$$U_{-\vec n}\, H_{\vec v}\, U_{\vec n} = \qquad \frac{\vec v}{c} = \operatorname{th}\eta\,\hat m$$

$$= \operatorname{ch}\frac{\eta}{2}\,\mathbb{1} + \sin\theta\,\operatorname{sh}\frac{\eta}{2}\,(\hat m\wedge\hat n)\cdot\vec\sigma$$
$$- \operatorname{sh}\frac{\eta}{2}\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)(\hat m\cdot\vec\sigma) - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\operatorname{sh}\frac{\eta}{2}\,(\hat m\hat n)(\hat n\cdot\vec\sigma)$$

Avec $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ et $2\sin^2\frac{x}{2} = 1-\cos x$

$$U_{-\vec n}\, H_{\vec v}\, U_{\vec n} =$$
$$= \operatorname{ch}\frac{\eta}{2}\,\mathbb{1} + \operatorname{sh}\frac{\eta}{2}\underbrace{\left[-\sin\theta(\hat m\wedge\hat n) + \cos\theta\,\hat m + (1-\cos\theta)(\hat n\cdot\hat m)\hat n\right]}_{= (\hat m\cdot\hat n)\hat n + \cos\theta\,\underbrace{[\hat m - (\hat n\hat m)\,\hat n]}_{=\hat n\wedge(\hat m\wedge\hat n)} = R_{\vec n}\hat m}\cdot\vec\sigma$$

Conclusion :

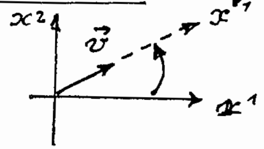
$$\boxed{U_{-\vec n}\, H_{\vec v}\, U_{\vec n} = H_{R_{\vec n}\vec v}}$$

où $R_{\vec n}\vec v$ est la rotation active de $\vec v$ autour de l'axe $\vec n$, d'un angle $|\vec n|$

et (p.10)

$$\boxed{R^{-1}(\vec n)\,\Lambda(\vec v)\,R(\vec n) = \Lambda\left(H_{R_{\vec n}\vec v}\right) = \Lambda(R_{\vec n}\vec v)}$$

Conséquence



Soit $R(\vec n)$ la rotation (d'axes) qui amène l'axe x^1 sur le support de $\vec v$

alors $$\boxed{\Lambda(\vec v) = R^{-1}(\vec n)\,\Lambda(v\,\vec e_1)\,R(\vec n)}$$

Donc n'importe quel boost peut s'exprimer comme le produit d'une rotation, d'un boost dans la direction 1, et de la rotation inverse.

Complément.

Tout $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$, est l'image d'une matrice $A\in SL(2,\mathbb{C})$ [plus exactement, $\forall\, \Lambda\in\mathcal{L}_+^\uparrow$, $\exists \pm A \in SL(2\mathbb{C})$ tel que $\Lambda(\pm A) = \Lambda$].

En effet du problème 1, nous savons que tout $\Lambda\in\mathcal{L}_+^\uparrow$, peut s'écrire :

$$\Lambda = R_1\cdot\Lambda(\operatorname{th}\eta\,\vec e_1)\cdot R_2$$

avec $R_1, R_2 \in SO(3)$

Par conséquent :

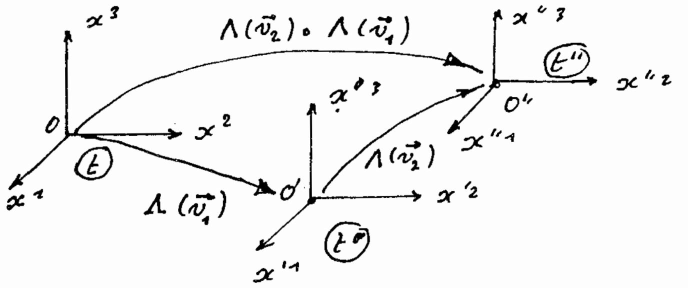
$$\Lambda = \Lambda(U_1)\cdot\Lambda(H)\cdot\Lambda(U_2)$$
$$= \Lambda(U_1 H U_2)$$

et $U_1 H U_2 \in SL(2,\mathbb{C})$

Problème 3.

Soit $H_1 = H(\vec{v}_1) = \mathrm{ch}\,\frac{\eta_1}{2}\,\mathbb{1} - \mathrm{sh}\,\frac{\eta_1}{2}\,\hat{n}_1\cdot\vec{\sigma}$; $\vec{v}_1 = c\,\mathrm{th}\,\eta_1\,\hat{n}_1$

$H_2 = H(\vec{v}_2) = \mathrm{ch}\,\frac{\eta_2}{2}\,\mathbb{1} - \mathrm{sh}\,\frac{\eta_2}{2}\,\hat{n}_2\cdot\vec{\sigma}$; $\vec{v}_2 = c\,\mathrm{th}\,\eta_2\,\hat{n}_2$



$$\Lambda(\vec{v}_2)\circ\Lambda(\vec{v}_1) = \Lambda(H_2)\cdot\Lambda(H_1) = \Lambda(H_2\cdot H_1)$$

Il nous faut trouver la décomposition : $H_2\cdot H_1 = U\,H$

$$\Rightarrow \boxed{\Lambda(\vec{v}_2)\cdot\Lambda(\vec{v}_1) = \Lambda(U\cdot H) = R_{\vec{n}}\,\Lambda(\vec{v})}$$

De $H_2\cdot H_1 = U\,H \Rightarrow H^* H = H^2 = (H_2 H_1)^*\,(H_2 H_1)$

Donc $H = \sqrt{(H_2 H_1)^*\,(H_2 H_1)}$

• Soit $H_2 H_1 \doteq A = a^0\,\mathbb{1} + \vec{a}\cdot\vec{\sigma}$

$$\Rightarrow A = \underbrace{\left[\mathrm{ch}\,\frac{\eta_2}{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{\eta_1}{2} + \mathrm{sh}\,\frac{\eta_2}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{\eta_1}{2}\,(\hat{n}_1\cdot\hat{n}_2)\right]}_{=a^0}\,\mathbb{1}$$

$$+ \underbrace{\left[-\mathrm{ch}\,\frac{\eta_2}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{\eta_1}{2}\,\hat{n}_1 - \mathrm{sh}\,\frac{\eta_2}{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{\eta_1}{2}\,\hat{n}_2 + i\,\mathrm{sh}\,\frac{\eta_2}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{\eta_1}{2}\,(\hat{n}_2\wedge\hat{n}_1)\right]}_{=\vec{a}}\cdot\vec{\sigma}$$

• Soit $B = H^2 = A^*\cdot A = (a^{0*}\,\mathbb{1} + \vec{a}^*\cdot\vec{\sigma})\cdot(a^0\,\mathbb{1} + \vec{a}\cdot\vec{\sigma})$

$$= \underbrace{\left[|a^0|^2 + |\vec{a}|^2\right]}_{=b^0}\,\mathbb{1} + \underbrace{\left(a^{0*}\,\vec{a} + a^0\,\vec{a}^* + i\,\vec{a}^*\wedge\vec{a}\right)}_{=\vec{b}}\cdot\vec{\sigma}$$

Avec les expressions de a^0 et $\vec{a}$, il vient

$$b^0 = \left[\mathrm{ch}\,\frac{\eta_1}{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{\eta_2}{2} + \mathrm{sh}\,\frac{\eta_1}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{\eta_2}{2}\,(\hat{n}_1\cdot\hat{n}_2)\right]^2$$

$$+ \left[\mathrm{sh}\,\frac{\eta_1}{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{\eta_2}{2}\,\hat{n}_1 + \mathrm{ch}\,\frac{\eta_1}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{\eta_2}{2}\,\hat{n}_2\right]^2$$

$$+ \left[\mathrm{sh}\,\frac{\eta_1}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{\eta_2}{2}\,\hat{n}_2\wedge\hat{n}_1\right]^2$$

$$= \mathrm{ch}^2\frac{\eta_1}{2}\,\mathrm{ch}^2\frac{\eta_2}{2} + \mathrm{sh}^2\frac{\eta_1}{2}\,\mathrm{sh}^2\frac{\eta_2}{2}\,\underbrace{\left[(\hat{n}_1\cdot\hat{n}_2)^2 + (\hat{n}_2\wedge\hat{n}_1)^2\right]}_{=1}$$

$$+ 4\,\mathrm{ch}\,\frac{\eta_1}{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{\eta_2}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{\eta_1}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{\eta_2}{2}\,(\hat{n}_1\cdot\hat{n}_2)$$

$$+ \mathrm{sh}^2\frac{\eta_1}{2}\,\mathrm{ch}^2\frac{\eta_2}{2} + \mathrm{ch}^2\frac{\eta_1}{2}\,\mathrm{sh}^2\frac{\eta_2}{2}$$

De $\boxed{2\,\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{sh}\,x = \mathrm{sh}\,2x}$ et $\boxed{\mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x = \mathrm{ch}\,2x}$

$$\Rightarrow \boxed{b^0 = \mathrm{ch}\,\eta_1\,\mathrm{ch}\,\eta_2 + (\hat{n}_1\cdot\hat{n}_2)\,\mathrm{sh}\,\eta_1\,\mathrm{sh}\,\eta_2}$$

$$\vec{b} = 2\left[\mathrm{ch}\,\frac{\eta_1}{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{\eta_2}{2} + \mathrm{sh}\,\frac{\eta_1}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{\eta_2}{2}\,(\hat{n}_1\cdot\hat{n}_2)\right]$$

$$\cdot\left[-\mathrm{sh}\,\frac{\eta_1}{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{\eta_2}{2}\,\hat{n}_1 - \mathrm{ch}\,\frac{\eta_1}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{\eta_2}{2}\,\hat{n}_2\right]$$

$$+ \underbrace{2\left[\mathrm{ch}\,\frac{\eta_2}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{\eta_1}{2}\,\hat{n}_1 + \mathrm{sh}\,\frac{\eta_2}{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{\eta_1}{2}\,\hat{n}_2\right]\wedge\mathrm{sh}\,\frac{\eta_1}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{\eta_2}{2}\,[\hat{n}_2\wedge\hat{n}_1]}$$

$$= \mathrm{ch}\,\frac{\eta_2}{2}\,\mathrm{sh}^2\frac{\eta_1}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{\eta_2}{2}\,\left[\hat{n}_2 - (\hat{n}_1\cdot\hat{n}_2)\,\hat{n}_1\right]$$

$$+ \mathrm{sh}^2\frac{\eta_2}{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{\eta_1}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{\eta_1}{2}\,\left[-\hat{n}_1 + (\hat{n}_1\cdot\hat{n}_2)\,\hat{n}_2\right]$$

$$\vec{b} = \hat{n}_1\,\underbrace{\left[-2\mathrm{ch}^2\frac{\eta_2}{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{\eta_1}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{\eta_1}{2} - 2\mathrm{sh}^2\frac{\eta_2}{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{\eta_1}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{\eta_1}{2}\right]}_{=-\mathrm{ch}\,\eta_2\,\mathrm{sh}\,\eta_1}$$

$$+ \hat{n}_2\,\underbrace{\left[-2\mathrm{ch}^2\frac{\eta_1}{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{\eta_2}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{\eta_2}{2} + 2\mathrm{sh}^2\frac{\eta_1}{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{\eta_2}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{\eta_2}{2}\right]}_{=-\mathrm{sh}\,\eta_2}$$

$$+ 2(\hat{n}_1\cdot\hat{n}_2)\left[\ \vec{K}\ \right]$$

$$\vec{K} = \Big[\operatorname{sh}\frac{\eta_1}{2}\operatorname{sh}\frac{\eta_2}{2}\Big(-\operatorname{sh}\frac{\eta_1}{2}\operatorname{ch}\frac{\eta_2}{2}\,\hat{n}_1 - (\ )\frac{\eta_1}{2}\operatorname{sh}\frac{\eta_2}{2}\,\hat{n}_2\Big)$$
$$+\operatorname{sh}^2\frac{\eta_1}{2}\operatorname{ch}\frac{\eta_2}{2}\operatorname{sh}\frac{\eta_2}{2}\,\hat{n}_1 + \operatorname{sh}^2\frac{\eta_2}{2}\operatorname{ch}\frac{\eta_1}{2}\operatorname{sh}\frac{\eta_1}{2}\,\hat{n}_2\Big]$$

$$= -\operatorname{sh}^2\frac{\eta_1}{2}\Big[2\operatorname{ch}\frac{\eta_2}{2}\operatorname{sh}\frac{\eta_2}{2}\Big]\hat{n}_1 = -\operatorname{sh}\eta_2\operatorname{sh}^2\frac{\eta_1}{2}\,\hat{n}_1$$

$$\boxed{\vec{b} = -\Big[\operatorname{sh}\eta_1\operatorname{ch}\eta_2 + 2(\hat{n}_1\hat{n}_2)\operatorname{sh}^2\frac{\eta_1}{2}\operatorname{sh}\eta_2\Big]\hat{n}_1 - \operatorname{sh}\eta_2\,\hat{n}_2}$$

$$\boxed{H = \sqrt{B} = \frac{1}{\sqrt{2(1+b^\circ)}}\Big[(1+b^\circ)\,\mathbb{1} + \vec{b}\cdot\vec{\sigma}\Big]}$$

Soit $\Lambda(\vec{v}) = \Lambda(H) \Leftrightarrow \vec{v} = -c\,\operatorname{th}\eta\,\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

avec $\operatorname{th}\frac{\eta}{2} = \frac{|\vec{b}|}{1+b^\circ} \Rightarrow \operatorname{th}\eta = \dfrac{2\,\frac{|\vec{b}|}{1+b^\circ}}{1+\left(\frac{\vec{b}}{1+b^\circ}\right)^2}$

c.à d. $\operatorname{th}\eta = \dfrac{2\,|\vec{b}|\,(1+b^\circ)}{1+b^{\circ 2}+2b^\circ+\vec{b}^2}$

Mais $\det B = (b^\circ)^2 - \vec{b}^2 = \det H^2 = 1$

$\Rightarrow \operatorname{th}\eta = \dfrac{|\vec{b}|}{b^\circ}$ d'où $\boxed{\vec{v} = -c\,\dfrac{\vec{b}}{b^\circ}}$

$$\vec{v} = +\frac{1}{\operatorname{ch}\eta_1\operatorname{ch}\eta_2\left[1+\frac{\vec{v}_1\vec{v}_2}{c^2}\right]}\Big[\operatorname{ch}\eta_2\cdot\vec{v}_2 + \operatorname{ch}\eta_1\operatorname{ch}\eta_2\,\vec{v}_1 + \frac{1}{c^2}(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2)\underbrace{\left(\frac{1}{\operatorname{th}\eta_1}\right)^2\frac{1}{\operatorname{th}\eta_2}\,2\operatorname{sh}^2\frac{\eta_1}{2}\operatorname{sh}\eta_2}_{=\operatorname{ch}\eta_2\cdot[\operatorname{ch}\eta_1-1]\left(\frac{\operatorname{ch}\eta_1}{\operatorname{sh}\eta_1}\right)^2}\cdot\vec{v}_1\Big]$$

$$\vec{v} = \frac{1}{1+\frac{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2}{c^2}}\Big\{\frac{1}{\operatorname{ch}\eta_1}\vec{v}_2 + \vec{v}_1 + \frac{(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2)}{c^2}\Big[1-\frac{1}{\operatorname{ch}\eta_1}\Big]\frac{c^2}{\vec{v}_1^{\,2}}\,\vec{v}_1\Big\}$$

mais $\dfrac{1}{\operatorname{ch}\eta_1} = \sqrt{1-\vec{v}_1^{\,2}/c^2} \Rightarrow$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{1}{1+\frac{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2}{c^2}}\Big\{\sqrt{1-\vec{v}_1^{\,2}/c^2}\,\vec{v}_2 + \Big[1+\frac{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2}{\vec{v}_1^{\,2}}\Big(1-\sqrt{1-\vec{v}_1^{\,2}/c^2}\Big)\Big]\vec{v}_1\Big\}}$$

où $\vec{v}_2 = \vec{v}\,' = \vec{v}_{R''})_{R'}$ = "vitesse relative"

$\vec{v}_1 = \vec{u} = \vec{v}_{R'})_{R}$ = "vitesse d'entraînement"

c'est donc la loi de composition des vitesses.

Finalement : $A = H_2 H_1 = U H \Leftrightarrow$

$$(a^\circ\mathbb{1}+\vec{a}\cdot\vec{\sigma}) = (u^\circ\mathbb{1}+i\,\vec{u}\cdot\vec{\sigma})\,(h^\circ\mathbb{1}+\vec{h}\cdot\vec{\sigma})$$
$$= (u^\circ h^\circ + i(\vec{u}\cdot\vec{h}))\,\mathbb{1} + (u^\circ\vec{h} + i\,h^\circ\vec{u} - \vec{u}\wedge\vec{h})\cdot\vec{\sigma}$$

1) $a^\circ \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{u^\circ h^\circ = a^\circ}$ et $\vec{u} \perp \vec{h}$

c.à d. $\boxed{\text{l'axe de rotation est } \perp \vec{v}}$

2) $\vec{a} = u^\circ\vec{h} - \vec{u}\wedge\vec{h} + i\,h^\circ\vec{u} \Rightarrow$ (p. 13)

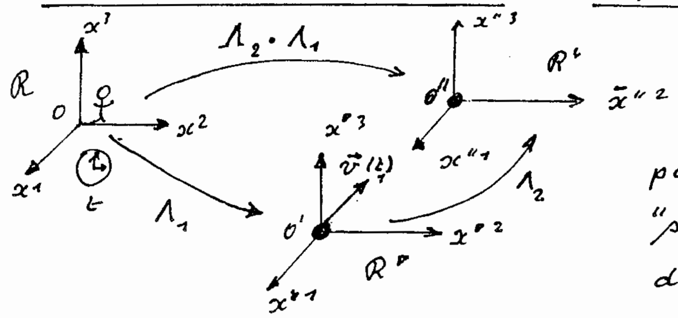
$$\boxed{h^\circ\,\vec{u} = \operatorname{sh}\frac{\eta_1}{2}\operatorname{sh}\frac{\eta_2}{2}\,(\vec{n}_2\wedge\vec{n}_1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{U = \sqrt{\frac{2}{(1+b^\circ)}}\Big[\operatorname{ch}\frac{\eta_1}{2}\operatorname{ch}\frac{\eta_2}{2} + (\hat{n}_1\cdot\hat{n}_2)\operatorname{sh}\frac{\eta_1}{2}\operatorname{sh}\frac{\eta_2}{2} + i\operatorname{sh}\frac{\eta_1}{2}\operatorname{sh}\frac{\eta_2}{2}(\vec{n}_2\wedge\vec{n}_1)\Big]}$$

D'où $R_{\vec{n}}$ est une rotation des axes autour de $\vec{n} = \vec{n}_2\wedge\vec{n}_1$

d'angle θ : $\boxed{\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\operatorname{th}(\frac{\eta_1}{2})\operatorname{th}(\frac{\eta_2}{2})\,|\vec{n}_2\wedge\vec{n}_1|}{1+(\hat{n}_1\cdot\hat{n}_2)\operatorname{th}(\frac{\eta_1}{2})\operatorname{th}(\frac{\eta_2}{2})}}$

2) Précession de Thomas et Composition des accélérations.



particule • avec "spin" dans la direction 1 dans le référentiel de repos.

Soit R^r = référentiel de repos de la particule à l'instant t_1 de R.

R'' = référentiel de repos de la particule à l'instant $(t_1+\delta t)$ de R

$\vec v_1 = \vec v(t_1)$ = vitesse de la particule p.r. à R à t_1

$\vec v_2 = \delta \vec v^{\,r}$ = vitesse de la particule p.r. à R^r à $(t_1+\delta t)$

$\vec v$ = vitesse de la particule p.r. à R à $(t_1+\delta t)$

Des calculs précédents (p.16) nous avons au 1er ordre :

$$\vec v = \sqrt{1-\vec v_1^{\,2}/c^2}\;\delta\vec v^{\,r} + \frac{\vec v_1}{1+\frac{(\vec v_1\cdot\delta\vec v^{\,r})}{c^2}} + \frac{(\vec v_1\cdot\delta\vec v^{\,r})}{\vec v_1^{\,2}}\left(1-\sqrt{1-\vec v_1^{\,2}/c^2}\right)\vec v_1$$

d'où $\vec v = \vec v_1 + \delta\vec v$, avec

$$\boxed{\delta\vec v = \sqrt{1-\vec v_1^{\,2}/c^2}\cdot\left[\delta\vec v^{\,r} + \vec v_1\frac{(\vec v_1\cdot\delta\vec v^{\,r})}{\vec v_1^{\,2}}\left(\sqrt{1-\vec v_1^{\,2}/c^2}-1\right)\right]}$$

Dans la limite où $\delta t \to 0$, on a $\delta\vec v\to 0$ et $\delta t^r \approx \delta t$

$$\Rightarrow \vec a = \sqrt{1-\vec v_1^{\,2}/c^2}\left[\vec a^{\,r} + \frac{(\vec a^{\,r}\cdot\vec v_1)}{\vec v_1^{\,2}}\left(\sqrt{1-\vec v_1^{\,2}/c^2}-1\right)\vec v_1\right]$$

$$\vec v_1^{\,2} = c^2\left(1+\sqrt{1-\vec v_1^{\,2}/c^2}\right)\left(1-\sqrt{1-\vec v_1^{\,2}/c^2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\vec a = \sqrt{1-\vec v_1^{\,2}/c^2}\;\vec a^{\,r} - \frac{(\vec a^{\,r}\cdot\vec v_1)}{c^2}\,\frac{\sqrt{1-\vec v_1^{\,2}/c^2}}{1+\sqrt{1-\vec v_1^{\,2}/c^2}}\;\vec v_1}$$

D'autre part les axes de R'' effectuent une rotation p.r. à R donnée au 1er ordre par (p.16)

$$\frac{1}{2}\,\delta\theta = \text{th}\left(\frac{\eta_1}{2}\right)\cdot\frac{\eta_2}{2}\cdot\left|\delta\hat v^{\,r}\wedge\hat v_1\right|\frac{1}{1+(\delta\hat v^{\,r}\cdot\hat v_1)\,\text{th}\frac{\eta_1}{2}\cdot\frac{\eta_2}{2}}$$

$$\eta_2 \cong \text{th}\,\eta_2 = \frac{|\delta\vec v^{\,r}|}{c}$$

$$\text{th}\frac{\eta_1}{2} = \frac{1-\sqrt{1-\text{th}^2\eta_1}}{\text{th}\,\eta_1} = \frac{1-\sqrt{1-\vec v_1^{\,2}/c^2}}{|\vec v_1|/c}$$

$$\Leftrightarrow \delta\theta = \frac{1}{|\vec v_1|^2}\left[1-\sqrt{1-\vec v_1^{\,2}/c^2}\right]\left|\delta\vec v^{\,r}\wedge\vec v_1\right|$$

$$\Leftrightarrow \delta\vec\theta = -\frac{1}{|\vec v_1|^2}\left[1-\sqrt{1-\vec v_1^{\,2}/c^2}\right]\underbrace{\vec v_1\wedge\delta\vec v^{\,r}}_{=\,\vec v_1\wedge\frac{\delta\vec v}{\sqrt{1-\vec v_1^{\,2}/c^2}}}$$

Vitesse de rotation du référentiel de repos p.r. à R

$$\boxed{\vec\Omega = -\frac{1}{\vec v^{\,2}}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\vec v^{\,2}/c^2}}-1\right]\vec v\wedge\frac{d\vec v}{dt}} \Leftrightarrow$$

S'il n'y a aucun couple agissant sur le "spin" ou le "gyroscope", celui-ci restera immobile dans le référentiel de repos, mais il aura une vitesse de rotation $\vec\Omega$ p.r. à l'observateur : c'est la précession de Thomas

L.W. Thomas : Phil. Mag. 3, (1927), p.1.

Dans la limite $|\vec v| \ll c$: $\boxed{\vec\Omega \cong -\frac{1}{2c^2}\,\vec v\wedge\dot{\vec v}}$

RELATIVITE ET COSMOLOGIE **9 novembre 1999**

Série 2 : Relativité restreinte

Loi d'addition des vitesses

<u>Problème 4</u>

Etablir la loi d'addition des vitesses (et corriger le polycopié p.31)

1ère méthode :

Prendre pour axe 1 la trajectoire de l'observateur O'. Ainsi, la vitesse constante de O' par rapport à O est $\vec{u} = u\vec{e}_1$. Considérer la ligne d'univers de la particule P par rapport au référentiel O', soit $\vec{x}' = \vec{x}'(t')$, et en déduire l'équation paramétrique de la ligne d'univers de P par rapport à O, soit $x^\alpha = x^\alpha(t')$.

On trouve ainsi la relation entre les 3- vitesses $\vec{v}'$ par rapport à O' et $\vec{v}$ par rapport à O.

2ème eméthode :

Appliquer les formules de transformation tensorielle au 4- vecteur vitesse $w^\alpha = \dfrac{dx^\alpha}{d\tau}$.

Série 2

Problème 4 " Loi d'addition des vitesses "

1) Soit $x'^i = x'^i(t')$, $t' \in \mathbb{R}$,
l'évolution de la particule par rapport à $\mathcal{R}'$.

$\mathcal{R}'$ étant animé d'un mouvement de vitesse constante par rapport à $\mathcal{R}$ de vitesse

$$\vec{u} = \vec{v}_{\mathcal{R}'})_{\mathcal{R}} = u\,\vec{e}_1 ,$$

L'évolution de la particule par rapport à $\mathcal{R}$ (et paramétrisée par t') est donnée par :

$$x^\alpha = x^\alpha(t')$$

où

$$\begin{cases} x^0(t') = \gamma\left(ct' + \frac{u}{c}\, x'^1(t')\right) \\ x^1(t') = \gamma\left(u t' + x'^1(t')\right) \\ x^2(t') = x'^2(t') \\ x^3(t') = x'^3(t') \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad t' = t'(x^0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx^0}{dt'} = \gamma\, c\left(1 + \frac{u}{c^2}\, v'^1(t')\right) \\ \dfrac{dx^1}{dt'} = \gamma\left(u + v'^1\right) \\ \dfrac{dx^2}{dt'} = v'^2(t') \\ \dfrac{dx^3}{dt'} = v'^3(t') \end{cases}$$

De

$$v^i = \frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{dt'} \cdot \frac{dt'}{dx^0} \cdot c = \frac{dx^i}{dt'} \cdot \left(\frac{dx^0}{dt'}\right)^{-1} c$$

On obtient ainsi les formules de la page 32 corrigées

$$\begin{cases} v^1 = \dfrac{v'^1 + u}{1 + u v'^1/c^2} = \dfrac{v'^1 + u}{1 + \vec{u}\cdot\vec{v}'/c^2} \\ v^2 = \dfrac{v'^2}{\gamma\left(1 + u v'^1/c^2\right)} = \sqrt{1 - \vec{u}^2/c^2}\; \dfrac{v'^2}{1 + \vec{u}\cdot\vec{v}'/c^2} \\ v^3 = \dfrac{v'^3}{\gamma\left(1 + u v'^1/c^2\right)} = \sqrt{1 - \vec{u}^2/c^2}\; \dfrac{v'^3}{1 + \vec{u}\cdot\vec{v}'/c^2} \end{cases}$$

Soit $\vec{v}' = \vec{v}'_{\parallel} + \vec{v}'_{\perp}$

où $\vec{v}'_{\parallel} = \dfrac{(\vec{v}'\cdot\vec{u})}{\vec{u}^2}\,\vec{u}$ $\quad [= v'_1\, \vec{e}_1]$

alors $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$

où

$$\begin{cases} \vec{v}_{\parallel} = \dfrac{\vec{v}'_{\parallel} + \vec{u}}{1 + \vec{u}\cdot\vec{v}'/c^2} = \dfrac{\left(\vec{v}'\cdot\vec{u}\right)/\vec{u}^2 + 1}{1 + \vec{u}\cdot\vec{v}'/c^2}\,\vec{u} & (1.24) \\ \vec{v}_{\perp} = \sqrt{1 - \vec{u}^2/c^2}\,\cdot \dfrac{\left(\vec{v}' - \left(\frac{\vec{v}'\cdot\vec{u}}{\vec{u}^2}\right)\vec{u}\right)}{1 + \vec{u}\cdot\vec{v}'/c^2} & (1.25) \end{cases}$$

et (1.24) (1.25)

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = \frac{1}{1 + \vec{u}\cdot\vec{v}'/c^2}\left[\sqrt{1 - \vec{u}^2/c^2}\;\vec{v}' + \left(1 + \frac{(\vec{v}'\cdot\vec{u})}{\vec{u}^2}\left(1 - \sqrt{1 - \vec{u}^2/c^2}\right)\right)\vec{u}\right]}$$

En conclusion on trouve l'expression 2.17

$$\boxed{\Lambda(\vec{v}') \circ \Lambda(\vec{u}) = R(\theta\vec{n})\, \Lambda(\vec{v})}$$

boost de $\mathcal{R}'$ à $\mathcal{R}^*$ — boost de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$ — rotation. — boost de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}^*$

2) $2^{\text{ème}}$ méthode

$$w^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \Lambda^\alpha{}_\beta \, w'^\beta \quad ; \quad \Lambda = \Lambda(-\vec u)$$

et $$v^i = \frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{d\tau} \cdot \frac{c}{\frac{dx^0}{d\tau}} = c\,\frac{w^i}{w^0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w^i = \Lambda^i{}_0 \, w'^0 + \Lambda^i{}_j \cdot w'^j \\ w^0 = \Lambda^0{}_0 \, w'^0 + \Lambda^0{}_j \cdot w'^j \end{cases}$$

d'où $$v^i = c \, \frac{\Lambda^i{}_0 \, w'^0 + \Lambda^i{}_j \cdot w'^j}{\Lambda^0{}_0 \, w'^0 + \Lambda^0{}_j \cdot w'^j}$$

$$\Rightarrow \boxed{v^i = c \, \frac{\Lambda^i{}_0 + \Lambda^i{}_j \cdot v'^j/c}{\Lambda^0{}_0 + \Lambda^0{}_j \cdot v'^j/c}}$$

Dans notre exemple $\vec u = u \, \vec e_1$

p.54

$$\begin{cases} \Lambda^0{}_0 = \dfrac{1}{\sqrt{1-\vec u^2/c^2}} \\ \Lambda^0{}_j \cdot v'^j/c = \Lambda^0{}_1 \, v'^1/c = \dfrac{u\, v'^1/c^2}{\sqrt{1-\vec u^2/c^2}} \\ \Lambda^i{}_0 = \delta_{i,1} \, \dfrac{u/c}{\sqrt{1-\vec u^2/c^2}} \\ \Lambda^i{}_j \cdot v'^j/c = v'^i/c + \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\vec u^2/c^2}} - 1\right) \dfrac{v'^1}{c} \, \delta_{i,1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v^1 = \dfrac{u + v'^1}{1 + \vec u \cdot \vec v'/c^2} \\ v^2 = \dfrac{v'^2}{1 + \vec v \cdot \vec v'/c^2} \cdot \sqrt{1-\vec u^2/c^2} \end{cases}$$

Série 3

Problème 5 "Composition des accélérations"

Soit $x^\alpha(\tau)$ la ligne d'univers d'un point matériel P par rapport au référentiel d'inertie R:

$$w^\alpha \doteq \frac{dx^\alpha}{d\tau} \qquad a^\alpha \doteq \frac{dw^\alpha}{d\tau}$$

Soit d'autre part $R^*(\tau)$ le référentiel de repos du point matériel P à l'instant τ.

1) Expression de w et $\dot{w}$ relativement à $R^*(\tau)$

Par définition:
$$\begin{cases} w^0(\tau) = \dfrac{dx^0}{d\tau} = \dfrac{c}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} = c\gamma \\ w^i(\tau) = \dfrac{dx^i}{d\tau} = \gamma v^i(\tau) \end{cases}$$

La transformation:

$R \to R^*(\tau)$

est définie par le boost ~~est~~ $\Lambda(\vec{v})$, suivi d'une rotation,

$$\Lambda^0{}_0 = \gamma \qquad \Lambda^0{}_i = \Lambda^i{}_0 = -\gamma\frac{v^i}{c}$$

$$\Lambda^i{}_j = \delta^i_j + (\gamma-1)\frac{v^i v^j}{|\vec{v}|^2}.$$

Nous allons nous restreindre au boost :

$$w^{*\alpha}(\tau) = \Lambda^\alpha{}_\beta(\vec{v}(\tau))\, w^\beta(\tau)$$

$$\Rightarrow w^{*0}(\tau) = \Lambda^0{}_0 w^0 + \Lambda^0{}_i w^i$$
$$= c\gamma^2 - \gamma^2\frac{(v^i)^2}{c} = c$$

$$w^{*i}(\tau) = \Lambda^i{}_0 w^0 + \Lambda^i{}_j w^j$$
$$= -\gamma\frac{v^i}{c}c\gamma + \left[\delta^i_j + (\gamma-1)\frac{v^i v^j}{\vec{v}^2}\right]\gamma v^j$$
$$= -\gamma^2 v^i + \gamma v^i + \gamma(\gamma-1)v^i = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{w(\tau) \overset{*}{=} \{w^{*\alpha}(\tau)\} = (c, \vec{0})}$$

c.à d. $\boxed{w(\tau) = c\, e_0^*(\tau)}$

Par définition $w\cdot w = -c^2 \Rightarrow \frac{d}{d\tau}(w\cdot w) = 0$

$$\Rightarrow 2\dot{w}\cdot w = 0$$

d'où $-\dot{w}^{*0}\underbrace{w^{*0}}_{=c} + \sum_{i=1}^{3}\dot{w}^{*i}\underbrace{w^{*i}}_{=0} = 0$

$$\Rightarrow \dot{w}^{*0} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\dot{w} \overset{*}{=} \{\dot{w}^{*\alpha}\} = (0, \vec{a}^*)}$$

Par rapport au référentiel $R^*(\tau)$:

$$w^{*0}(\tau_1) = c\frac{dt^*}{d\tau}(\tau_1) = c \quad \text{pour } \tau_1 = \tau$$

$$w^{*i}(\tau_1) = \frac{dx^{*i}}{dt^*}(\tau_1)\,\frac{w^{*0}}{c}(\tau_1) = 0 \quad \text{pour } \tau_1 = \tau$$

$$a^{*i}(\tau_1) = \frac{d}{d\tau}w^{*i} = \frac{d}{d\tau}(v^{*i})\cdot\frac{w^{*0}}{c}(\tau_1) + \frac{v^{*i}}{c}(\tau_1)\frac{dw^{*0}}{d\tau}(\tau_1)$$

$$a^{*i}(\tau_1) = \left(\frac{d}{dt^*}v^{*i}\right)\left(\frac{w^{*0}}{c}\right)^2 + \frac{v^{*i}}{c}\cdot a^{*0}(\tau_1)$$

Ainsi pour $\tau_1 = \tau$ $\quad a^{*i}(\tau) = \dfrac{d^2x^{*i}}{dt^{*2}}$

$$\boxed{\vec{a}^* = \frac{d^2\vec{x}^*}{dt^{*2}}}$$

13

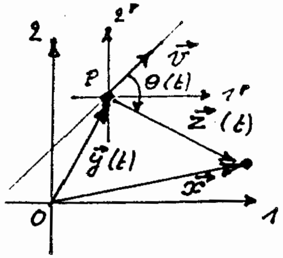
2) Trouver $\dot{\omega}(\tau)$ connaissant $\vec{a}^*(\tau)$ et $\vec{v}(\tau)$.

$$\dot{\omega}^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta(-\vec{v})\,\dot{\omega}^{*\beta}$$
$$= \Lambda^\alpha{}_j(-\vec{v})\,a^{*j}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\omega}^0 = \Lambda^0{}_j(-\vec{v}(\tau))\,a^{*j}(\tau) = \gamma\,\vec{v}\cdot\vec{a}^*$$
$$\dot{\omega}^i = \Lambda^i{}_j(-\vec{v}(\tau))\,a^{*j}(\tau) =$$
$$= \left[\delta^i{}_j + (\gamma-1)\frac{v^i v^j}{\vec{v}^2}\right]\dot{\omega}^{*j}$$
$$= a^{*i} + (\gamma-1)\frac{v^i(\vec{v}\cdot\vec{a}^*)}{\vec{v}^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\omega}^0 &= \gamma\,\vec{v}\cdot\vec{a}^* \\ \vec{\dot{\omega}} &= \vec{a}^* + (\gamma-1)\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}^*}{\vec{v}^2}\,\vec{v}\end{aligned}}$$

Problème 6 "Champ E.M. créé par une particule P chargée, de vitesse $\vec{v} = $ cte "



Mouvement de P par rapport à $\mathcal{R}$

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_0 + \vec{v}\, t$$

Posons : $$\gamma \doteq \frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}}$$

soit $$\gamma^2 - 1 = \gamma^2 \frac{\vec{v}^2}{c^2} \qquad (1)$$

On considère le changement de référentiel

$$x \mapsto x' = \Lambda x + \rho$$

où $\mathcal{R}'$ est le référentiel de repos de P. C'est à dire que la ligne d'univers de P p.r. à $\mathcal{R}'$ est :

$$\begin{cases} t'(t) = \gamma\left(t - \dfrac{\vec{v}}{c^2}\cdot\vec{y}(t)\right) & (2) \\ \vec{0}\ (t) = \vec{y}(t) - \gamma\,\vec{v}\,t + (\gamma-1)\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{y}(t)}{\vec{v}^2}\,\vec{v} + \vec{\rho} & (3) \end{cases}$$

d'où $$\vec{\rho}(t) = -\vec{y}(t) + \gamma\,\vec{v}\,t - (\gamma-1)\frac{\vec{v}\cdot\vec{y}(t)}{\vec{v}^2}\,\vec{v}$$

Le point $(t, \vec{x})$ dans $\mathcal{R}$ est alors paramétrisé dans $\mathcal{R}'$ par :

$$\begin{cases} t' = \gamma\left(t - \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{x}}{c^2}\right) & (4) \\ \vec{x}' = \vec{x} - \gamma\,\vec{v}\,t + (\gamma-1)\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{x}}{\vec{v}^2}\,\vec{v} + \vec{\rho}(t) \end{cases}$$

$$= \left(\vec{x} - \vec{y}(t)\right) + (\gamma-1)\frac{\vec{v}\cdot\left(\vec{x}-\vec{y}(t)\right)}{\vec{v}^2}\,\vec{v} \qquad (5)$$

Posons alors : $$\vec{z} \doteq \vec{x} - \vec{y}(t)$$

$$(5) \Rightarrow |\vec{x}'|^2 = |\vec{z}|^2 + (\gamma-1)^2\frac{(\vec{v}\cdot\vec{z})^2}{|\vec{v}|^2} + 2(\gamma-1)\frac{(\vec{v}\cdot\vec{z})^2}{|\vec{v}|^2}$$

$$= |\vec{z}|^2 + (\gamma^2-1)\frac{(\vec{v}\cdot\vec{z})^2}{\vec{v}^2}$$

avec (1) $\Rightarrow$ $$\boxed{|\vec{x}'|^2 = |\vec{z}|^2 + \gamma^2\frac{(\vec{v}\cdot\vec{z})^2}{c^2}} \qquad (6)$$

d'où $$|\vec{x}'|^2 = |\vec{z}|^2\left(1 + \frac{1}{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}\,\frac{\vec{v}^2\cdot\cos^2\theta}{c^2}\right)$$

$$= \gamma^2|\vec{z}|^2\left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\sin^2\theta\right)$$

$$\boxed{|\vec{x}'|^2 = \gamma^2\,|\vec{x}-\vec{y}(t)|^2\left[1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\sin^2\theta\right]} \qquad (7)$$

Champs électromagnétiques

Par rapport à $\mathcal{R}'$

$$\boxed{E'^{i}(t', \vec{x}') = B'^{0i}(t', \vec{x}') = e\,\frac{x'^{i}}{\left(|\vec{x}'|^2\right)^{3/2}}} \qquad (8)$$

Par rapport à $\mathcal{R}$:

$$B^{\alpha\beta}(t,\vec{x}) = \Lambda(-\vec{v})^{\alpha}{}_{\gamma}\,\Lambda(-\vec{v})^{\beta}{}_{\delta}\;B'^{\gamma\delta}(t', \vec{x}')$$

$$\overset{(8)}{=} \Lambda(-\vec{v})^{\alpha}{}_{0}\,\Lambda(-\vec{v})^{\beta}{}_{i}\;B'^{0i}(t', \vec{x}')$$

$$+ \Lambda(-v)^{\alpha}{}_{i}\,\Lambda(-v)^{\beta}{}_{0}\;B'^{i0}(t', \vec{x}')$$

$$\Rightarrow \boxed{B^{\alpha\beta}(t,\vec{x}) = \left[\Lambda(-\vec{v})^{\alpha}{}_{0}\,\Lambda(-\vec{v})^{\beta}{}_{i} - \Lambda(-\vec{v})^{\alpha}{}_{i}\,\Lambda(-\vec{v})^{\beta}{}_{0}\right]B'^{0i}(x')} \qquad (9)$$

Champ électrique :

$$E^j(t,\vec x) = B^{0j}(t,\vec x) =$$

$$\overset{(9)}{=} \left\{ \gamma\cdot\left[\delta^j_i + (\gamma-1)\frac{v^i v^j}{\vec v^2}\right] - \gamma^2 \frac{v^i v^j}{c^2}\right\} B'^{0i}(x')$$

$$= \gamma\, E'^j(x') + \gamma\Big[\underbrace{\gamma\left(\frac{1}{\vec v^2}-\frac{1}{c^2}\right) - \frac{1}{\vec v^2}}_{=\frac{1}{\vec v^2}\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)}\Big] v^j\, \vec v\cdot\vec E'(x')$$

$$\Rightarrow \boxed{E^j(t,\vec x) = \gamma\, E'^j(x') + (1-\gamma)\frac{v^j}{\vec v^2}\,\vec v\cdot\vec E'(x')} \qquad (10)$$

$$\gamma\, \vec E'(x') \overset{(8)}{=} \gamma\, e \frac{\vec x'}{|\vec x'|^3} \overset{(5)}{=} \frac{\gamma e}{|\vec x'|^3}\left[\vec z + (\gamma-1)\frac{(\vec v\cdot\vec z)}{\vec v^2}\,\vec v\right]$$

$$\vec v\cdot\vec E'(x') = \vec v\, e\frac{\vec x'}{|\vec x'|^3} = \frac{e}{|\vec x'|^3}\left[\vec v\cdot\vec z + (\gamma-1)\,\vec v\cdot\vec z\right]$$

$$= \gamma\frac{e}{|\vec x'|^3}(\vec v\cdot\vec z)$$

$$\Rightarrow \vec E(t,\vec x) = \frac{\gamma e}{|\vec x'|^3}\left[\vec z + (\gamma-1)\frac{(\vec v\cdot\vec z)}{\vec v^2}\,\vec v + (1-\gamma)\frac{\vec v}{\vec v^2}(\vec v\cdot\vec z)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec E(t,\vec x) = \gamma\frac{e}{|\vec x'|^3}[\vec x - \vec y(t)]} \qquad (11)$$

Avec l'expression (7) de $|\vec x'|^2$:

$$\boxed{\vec E(t,\vec x) = e\,\frac{(1-\vec v^2/c^2)}{\left[1-\frac{\vec v^2}{c^2}\sin^2\theta(t)\right]^{3/2}}\cdot\frac{[\vec x-\vec y(t)]}{|\vec x-\vec y(t)|^3}} \qquad (12)$$

En particulier :

$$E(t,\vec x) = e\left(1-\frac{\vec v^2}{c^2}\right)\frac{\vec x-\vec y(t)}{|\vec x-\vec y(t)|^3}$$

Champ magnétique.

$$B^{ij}(t,\vec x) = \left[\Lambda(-\vec v)^i{}_0\,\Lambda(-v)^j{}_k - \Lambda(-v)^i{}_k\,\Lambda(-v)^j{}_0\right] B'^{0k}(x')$$

$$= \left\{\gamma\frac{v^i}{c}\left[\delta^j_k + (\gamma-1)\frac{v^j v^k}{\vec v^2}\right] - \left[\delta^i_k + (\gamma-1)\frac{v^i v^k}{\vec v^2}\right]\gamma\frac{v^j}{c}\right\} E'^k(x')$$

$$= \gamma\left\{\frac{v^i}{c}E'^j + (\gamma-1)\frac{v^i v^j}{c\,\vec v^2}(\vec v\cdot\vec E')\right\}$$

$$- \gamma\left\{\frac{v^j}{c}E'^i + (\gamma-1)\frac{v^i v^j}{c\,\vec v^2}(\vec v\cdot\vec E')\right\}$$

$$\Rightarrow B^{ij}(t,\vec x) = \gamma\left(\frac{v^i}{c}E'^j - \frac{v^j}{c}E'^i\right)$$

$$\Rightarrow \vec B(t,\vec x) = \gamma\,\frac{\vec v}{c}\wedge\vec E'$$

$$\overset{(10)}{\Longrightarrow} \boxed{\vec B(t,\vec x) = \frac{\vec v}{c}\wedge\vec E(t,\vec x)} \qquad (13)$$

En terme du Potentiel-Vecteur $A^\alpha(t,\vec x)$:

Par rapport à R' $\quad A'^\alpha(t',\vec x') = \left(\frac{e}{|\vec x'|}, \vec 0\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} A^0(t,\vec x) &= \gamma\frac{e}{|\vec x'|} = \frac{e}{c}\frac{w^0}{|\vec x'|} \\ \vec A(t,\vec x) &= \gamma\frac{e}{|\vec x'|}\frac{\vec v}{c} = \frac{e}{c}\frac{\vec w}{|\vec x'|} \end{aligned}} \qquad (14)$$

De façon explicite avec (6)

$$\boxed{A^\mu(t,\vec x) = \frac{e\, w^\mu/c}{\left[|\vec x-\vec y(t)|^2 + \frac{1}{1-\vec v^2/c^2}\,\frac{1}{c^2}\left[\vec v\cdot(\vec x-\vec y(t))\right]^2\right]^{1/2}}}$$

Champ électrique:

$$E_i = \partial_i A_0 - \partial_0 A_i \overset{(14)}{\Rightarrow}$$

$$E^i = -\partial_i A^0 - \partial_0 \left(A^0 \frac{v^i}{c}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{E^i = -\gamma e \left[\partial_i \left(\frac{1}{|\vec x^*|}\right) + \frac{v^i}{c^2}\, \partial_t \left(\frac{1}{|\vec x^*|}\right)\right]}$$

De: $$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{1}{|\vec x^*|}\right) = -\frac{1}{2|\vec x^*|^3}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}|\vec x^*|^2$$

$$\overset{(6)}{\Rightarrow} \partial_i\left(\frac{1}{|\vec x^*|}\right) = -\frac{1}{2|\vec x^*|^3}\left[2(x^i - y^i(t)) + 2\gamma^2 \frac{\vec v\cdot(\vec x-\vec y(t))}{c^2} v^i\right]$$

$$= -\frac{1}{|\vec x^*|^3}\left[x^i - y^i(t) + \gamma^2 \frac{1}{c^2}\vec v\cdot(\vec x - \vec y(t))\, v^i\right]$$

$$\partial_t\left(\frac{1}{|\vec x^*|}\right) = -\frac{1}{2|\vec x^*|^3}\left[-2(\vec x-\vec y(t))\cdot\vec v - 2\gamma^2 \frac{\vec v\cdot(\vec x-\vec y(t))}{c^2}\vec v^2\right]$$

$$= \frac{1}{|\vec x^*|^3}(\vec x-\vec y(t))\cdot\vec v\,[\underbrace{1+\gamma^2\frac{\vec v^2}{c^2}}_{=\gamma^2}]$$

$$, \quad E^i = -\frac{\gamma e}{|\vec x^*|^3}\left[-(x^i - y^i(t)) - \frac{\gamma^2}{c^2}\vec v\cdot(\vec x-\vec y(t))\, v^i + \gamma^2 (\vec x - \vec y(t))\cdot\vec v \cdot \frac{v^i}{c^2}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec E = \gamma e \frac{\vec x - \vec y(t)}{|\vec x^*|^3}}$$ identique à (11)

Champ magnétique

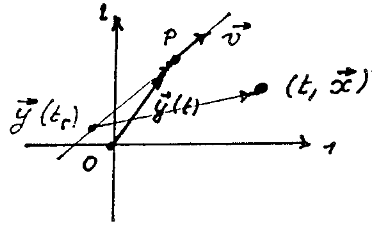
$$B_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i \overset{(14)}{=} (\partial_i A^0)\frac{v^j}{c} - (\partial_j A^0)\frac{v^i}{c}$$

$$\overset{(14)}{=} \gamma e \frac{v^j}{c}\,\partial_i\left(\frac{1}{|\vec x^*|}\right) - \gamma e\frac{v^i}{c}\,\partial_j\left(\frac{1}{|\vec x^*|}\right)$$

$$= -\gamma\frac{e}{c}\frac{1}{|\vec x^*|^3}\Big\{v^j\cdot\left[x^i - y^i(t) + \gamma^2\frac{\vec v}{c}\cdot(\vec x-\vec y(t))\, v^i\right] - v^i\left[x^j - y^j(t) + \gamma^2\frac{\vec v}{c}\cdot(\vec x - \vec y(t))\, v^j\right]\Big\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec B(t,\vec x) = \frac{\vec v}{c}\wedge \vec E(t,\vec x)}$$ identique à (13)

Connection avec Landau-Lifshitz p.216 (Ed. 1970)



Soit t_r = "temps retardé" défini par:

$$\boxed{|\vec x - \vec y(t_r)| \doteq c(t - t_r)} \qquad (15)$$

et $$\vec y(t) = \vec y_0 + \vec v t$$

alors:
L.L. p.216 $$\boxed{A^\mu(t,\vec x) = \frac{e\, v^\mu/c}{|\vec x-\vec y(t_r)| - \frac{1}{c}\vec v\cdot(\vec x - \vec y(t_r))}} \qquad (16)$$

Vérifions alors que l'on retrouve le résultat précédent:

$$\vec y(t_r) = \vec y_0 + \vec v t_r = \vec y_0 + \vec v\cdot(t_r - t) + \vec v t$$
$$= \vec y(t) - \vec v(t - t_r)$$

$$\Rightarrow |\vec x - \vec y(t_r)|^2 = |\vec x - \vec y(t) + \vec v(t-t_r)|^2 \overset{(15)}{=} c^2(t-t_r)^2$$

$$\Rightarrow |\vec x - \vec y(t)|^2 + 2\vec v\cdot(\vec x-\vec y(t))[t-t_r] + \vec v^2(t-t_r)^2 = c^2(t-t_r)^2$$

$$\Rightarrow c^2(t-t_r)^2\left[1-\frac{\vec v^2}{c^2}\right] - 2\frac{\vec v}{c}\cdot(\vec x-\vec y(t))\,c(t-t_r) - |\vec x - \vec y(t)|^2 = 0$$

$$c(t-t_r) = \frac{1}{1-\vec v^2/c^2}\left[\frac{\vec v\cdot(\vec x-\vec y(t))}{c} + \sqrt{\left[\frac{\vec v\cdot(\vec x - \vec y(t))}{c}\right]^2 + \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)|x-y|^2}\right]$$

Posons $$\vec R = \vec x - \vec y(t_r)$$

$$\Rightarrow A^0(t,\vec x) = \frac{e}{R - \vec R\cdot\vec v/c}$$

$$R = |\vec{x} - \vec{y}(t_r)| = c\,(t - t_r)$$

$$\frac{\vec{v}\cdot\vec{R}}{c} = \frac{\vec{v}}{c}\cdot\left(\vec{x} - \vec{y}(t_r)\right) = \frac{\vec{v}}{c}\cdot\left[\vec{x} - \vec{y}(t) + \vec{v}\,(t - t_r)\right]$$

$$= \frac{\vec{v}}{c}\cdot\left[\vec{x} - \vec{y}(t) + \frac{\vec{v}}{c}\, c\,(t - t_r)\right]$$

$$\Rightarrow \quad R - \frac{\vec{v}\cdot\vec{R}}{c} = c\,(t - t_r)\left[1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right] - \frac{\vec{v}}{c}\cdot\left(\vec{x} - \vec{y}(t)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R - \frac{\vec{v}\cdot\vec{R}}{c} = \sqrt{\left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)|\vec{x} - \vec{y}(t)|^2 + \frac{1}{c^2}\left[\vec{v}\cdot\left(\vec{x} - \vec{y}(t)\right)\right]^2}} \quad (17)$$

En introduisant (17) dans (16) on retrouve (14).

Potentiel-Vecteur créé par une charge en mouvement.

I) Si $\vec{v}(t) = \vec{v} = \text{cte}$

$$A^\mu(t, \vec{x}) = \frac{e\, v^\mu / c}{\sqrt{|\vec{x} - \vec{y}(t)|^2 + \frac{1}{1 - \vec{v}^2/c^2}\left[\frac{\vec{v}}{c}\cdot\left(\vec{x} - \vec{y}(t)\right)\right]^2}}$$

II) Si $\vec{v}(t) \neq \text{cte}$

$$\left\{ \begin{array}{l} A^\mu(t, \vec{x}) = \dfrac{e\, v^\mu(t_r)/c}{|\vec{x} - \vec{y}(t_r)| - \frac{1}{c}\,\vec{v}(t_r)\cdot\left(\vec{x} - \vec{y}(t_r)\right)} \\[2em] \text{où } t_r \text{ est défini par } |\vec{x} - \vec{y}(t_r)| = c\,(t - t_r) \end{array} \right.$$

Si $\vec{v}(t) = \vec{v} = \text{cte}$ $\quad$ II $\rightarrow$ I

RELATIVITE ET COSMOLOGIE 23 novembre 1999

Série 3 : **Transformations de Lorentz :**
Composition des accélérations ;
Electrodynamique ; Evolution du Spin.

Problème 5 "Composition des accélérations"

Soit $x^\alpha = x^\alpha(\tau)$, l'évolution d'un point par rapport au référentiel d'inertie R :

$$w^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \text{quadrivecteur vitesse}$$

$$\dot{w}^\alpha = \frac{dw^\alpha}{d\tau} = \text{quadrivecteur accélération}$$

Soit d'autre part $R^*(\tau)$ le "référentiel de repos" du point à l'instant τ (= référentiel d'inertie en **translation** de vitesse $\vec{u}^*(\tau) = \vec{v}(\tau)$).

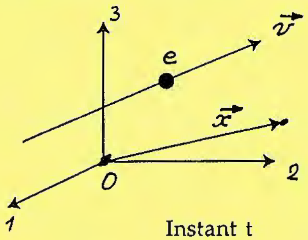
1) Exprimer w par rapport à $R^*(\tau)$.

   Vérifier que par rapport à R^* : $\dot{w}^* = \left(o, \vec{a}^*\right)$ avec $a^{*i} = \dfrac{d^2 x^{*i}}{dt^{*2}}$

2) Connaissant l'accélération $\vec{a}^*$ par rapport à R^*, trouver le quadrivecteur accélération $\dot{w}$ par rapport à R. Trouver $\dot{w}$ sachant que $\vec{a}^* = \vec{cte}$.

Problème 6 "Electrodynamique"

On considère une particule de charge e et de vitesse $\vec{v}$ constante.



Instant t

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_0 + \vec{v}\, t$$

1) Trouver les champs électromagnétiques $\vec{E}\left(t, \vec{x}\right)$, $\vec{B}\left(t, \vec{x}\right)$, sachant que par rapport au référentiel R' où la particule est fixée à l'origine, on a

i) $$E'^i\left(t', \vec{x}'\right) = B'^{oi}\left(t', \vec{x}'\right) = e\frac{x'^i}{\left|\vec{x}'\right|^3}$$

$$B'^{ij}\left(t', \vec{x}'\right) = 0$$

ou bien

ii) $$A'^\mu\left(t', \vec{x}'\right) = \left(\frac{e}{\left|\vec{x}'\right|}, 0, 0, 0\right)$$

et

$$B_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\nu A_\mu$$

2) **Facultatif**
   Pour relier ce résultat aux formules en termes des potentiels retardés de Lienard et Wiechert (Landau et Lifshitz 1970, p. 216), on établira le résultat suivant :

$$\left|\vec{x} - \vec{y}(t_r)\right| - \frac{1}{c}\vec{v}\cdot\left(\vec{x} - \vec{y}(t_r)\right) =$$

$$= \sqrt{\left(1 - \vec{v}/c^2\right)\cdot\left|\vec{x} - \vec{y}(t)\right|^2 + \frac{1}{c^2}\left[\vec{v}\,.\,(\vec{x} - \vec{y}(t))\right]^2}$$

   avec $\left|\vec{x} - \vec{y}(t_r)\right| = c(t - t_r)$.

3) Etablir les formules de la page 47 exprimant le tenseur énergie-impulsion en fonction des champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$.

Problème 7 "Evolution du spin"

1) Vérifier qu'il existe un mouvement circulaire uniforme d'un électron autour d'un proton.

2) Etudier l'évolution du spin d'un électron animé d'un mouvement circulaire uniforme de rayon R, vitesse angulaire Ω, autour du proton.

Conditions initiales : $x^1(0) = R \qquad x^2(0) = x^3(0) = 0$

$$S^0(0) = 0,\ S^1(0) = \frac{\hbar}{\sqrt{2}},\ S^2(0) = 0,\ S^3(0) = \frac{\hbar}{2}$$

(En particulier, étudier $S^1 + i\,S^2$).

Margaritondo's Relativity Paradox:

Consider a monochromatic plane wave with time-averaged electric field strength E, linearly polarized along the y-axis and propagating along the x-axis in an inertial reference frame F. Its intensity (in MKS units) is given by:

$$I = c\,\frac{\varepsilon_0}{2}\,(E^2 + c^2B^2) = c\,\varepsilon_0 E^2 . \qquad (1)$$

Consider now a second inertial reference frame F′, moving along the positive direction of the x-axis with speed u. The wave's intensity in this reference frame can be obtained from Eq. 1, by using the Lorentz transformations for the wave's (transverse) E and B-fields. One has:

$$E' = \gamma\,(E - uB) = \gamma\,(1 - \beta)E,$$

and therefore:

$$I' = c\,\varepsilon_0 E'^2 = c\,\varepsilon_0\gamma^2\,(1 - \beta)^2E^2 = \gamma^2\,(1 - \beta)^2\,I\ , \qquad (2)$$

which can be written as:

$$I' = \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)I\ . \qquad (3)$$

Consider now an experiment in which the wave is detected in the reference frame F by a photomultiplier working in the single-photon-counting mode. Assume that the detector's active surface is perpendicular to the x-axis and that its area is Σ. The number of photon pulses given by the photomultiplier in the time period Δt is:

$$N = \left(\frac{I}{h\nu}\right)\Sigma\,\Delta t\ , \qquad (4)$$

where ν is the wave's frequency measured in the frame F.

When we look at the photomultiplier from the frame F′, the area Σ is invariant, Δt becomes $\Delta t' = \gamma\Delta t$, the frequency is Doppler-shifted:

$$\nu' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\ \nu\ , \qquad (5)$$

and the intensity is transformed according to Eq. 3, thus, apparently, the number of photon pulses given by the photomultiplier, when seen from F′, should be:

$$N' = \frac{\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)}{\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}}\,\gamma N = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,\gamma N = \frac{N}{1+\beta}\ . \qquad (6)$$

This, however, is absurd, since the photomultiplier detection system "clicks" the same number of times in the two frames during the two correponding periods, therefore one must have instead $N' = N$. Where is the problem?

RELATIVITE ET COSMOLOGIE 7 décembre 1999

Série 4 : **Systèmes de particules**
Mouvement uniformément accéléré

Problème 8 :

En utilisant la loi de conservation du quadrivecteur quantité de mouvement, vérifier qu'il est impossible de produire un seul photon lors d'une désintégration électron-positron, mais qu'il est possible de produire 2 photons.

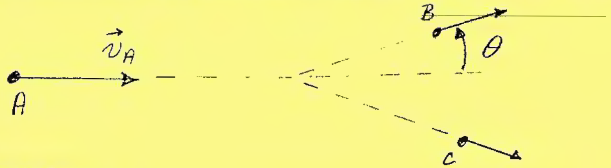
Problème 9

i) On considère la désintégration $K^+ \to \pi^+\pi^\circ$ d'un méson K^+ immobile. Calculer la vitesse des pions et la distance moyenne qu'ils parcourent avant de se désintégrer.

ii) On considère la désintégration $\Sigma^\circ \to \Lambda\gamma$, d'un Σ° immobile. Calculer l'énergie du photon émis.

iii) On considère la désintégration A → BC, d'une particule A en vol, de vitesse $\vec{v}_A$.

Trouver la relation entre l'angle d'émission θ de B, et les énergies de A et B.



Indications générales

Etablir pour commencer la relation générale pour la désintégration A → BC, de la particule A immobile

$$\left(m_A^2 + m_B^2 - m_C^2\right) / 2m_A .$$

Problème 10

On considère un système de particule de masse $m_1 \cdots, m_N$, vitesse $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_N$. Comment calculer la masse et la vitesse du centre d'énergie ?

Problème 11

Une particule de masse m_1, vitesse $\vec{v}_1$, fait une collision avec une particule de masse m_2 immobile, pour ensuite former une seule particule

Trouver la masse et la vitesse de la particule finale.

Problème 12

Calculer l'énergie de seuil que doit avoir un nucléon N pour effectuer la réaction

$$\gamma + N \to N + \pi$$

où γ est un photon à la température $3^\circ K$ $\left(E_\gamma \approx kT \approx 2,5 \cdot 10^{-10} MeV\right)$

$m_N = 940$ MeV $\qquad m_\pi = 140$ MeV

(On fera l'hypothèse d'une collision frontale).

Problème 13 (d'Inverno 3.10)

Le moteur d'une fusée impose à celle-ci un mouvement d'**accélération constante** égale à $g = 9{,}8\ ms^{-2}$.

1) Le pilote avait 30 ans à son départ de la Terre, trouver la distance qu'il aura parcourue lorsqu'il aura 52 ans.

2) Le voyageur décrit le voyage aller-retour suivant: pendant 6 ans, le mouvement est d'accélération constante g, puis pendant 6 ans –g (aller), puis –g pendant 6 ans et +g pendant 6 ans (retour). Représenter le mouvement sur la carte de l'observateur "terrestre" (= "référentiel d'inertie"); trouver la distance parcourue. Le pilote est parti en l'an 2000 et il avait 30 ans. A son retour, il a 54 ans, quelle année est-ce sur la Terre ?

Problème 14

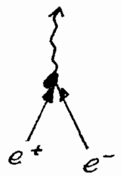
Une fusée s'éloigne de la Terre avec un mouvement d'accélération constante

1) Esquisser la ligne d'Univers (par rapport à la Terre), les 4-vecteur vitesse et accélération.

2) Trouver les vecteur de base e_0^*, e_1^* du Référentiel Lorentzien Local de Repos de la Fusée.

Relativité et Cosmologie, Série 4.

Problème 8



Si une telle réaction était possible, on devrait avoir:

$$\boxed{\Pi_+ + \Pi_- = \Pi_\gamma}$$

Mais :

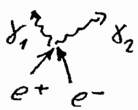
photon $\quad \Pi_\gamma = \left(\frac{E_\gamma}{c}, \vec{p}_\gamma\right)$ avec $\boxed{\Pi_\gamma \cdot \Pi_\gamma = 0}$

$\{e^+, e^-\}$:
$$\begin{cases} \Pi^0 = m_+ \omega_+^0 + m_- \omega_-^0 \\ \vec{\Pi} = m_+ \vec{\omega}_+ + m_- \vec{\omega}_- \end{cases}$$
$$= m_+ \omega_+^0 \frac{\vec{v}_+}{c} + m_- \omega_-^0 \frac{\vec{v}_-}{c}$$

$\Rightarrow \quad |\vec{\Pi}| < m_+ \omega_+^0 + m_- \omega_-^0$

$\Rightarrow \quad (\Pi^0)^2 - \vec{\Pi}^2 < 0 \quad$ d'où $\quad \boxed{\Pi \cdot \Pi < 0}$

$e^+ + e^- \rightarrow \gamma$ est donc impossible!



Mais <u>pour deux photons</u>, on aurait :

γ_1 : $\left(\frac{E_1}{c}, \vec{p}_1\right) \qquad -\left(\frac{E_1}{c}\right)^2 + \vec{p}_1^{\,2} = 0$

γ_2 : $\left(\frac{E_2}{c}, \vec{p}_2\right) \qquad -\left(\frac{E_2}{c}\right)^2 + \vec{p}_2^{\,2} = 0$

$\Pi_1 + \Pi_2 = \left(\frac{1}{c}(E_1 + E_2), (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)\right) \Rightarrow$

$$-\frac{1}{c^2}(E_1 + E_2)^2 + (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 = -\frac{2E_1E_2}{c^2}\left[1 - \cos\left(\frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{E_1 \cdot E_2 / c^2}\right)\right]$$

et l'on aura $(\Pi_1 + \Pi_2) \cdot (\Pi_1 + \Pi_2) < 0$, si $\vec{p}_1$ et $\vec{p}_2$ ne sont pas parallèles.

Problème).

Soit A immobile. On considère la désintégration
$$A \rightarrow B + C$$

- $$p_A = p_B + p_C \qquad \text{avec} \quad p_A = (m_A c, \vec{0})$$

$$p_B^2 = -m_B^2 c^2 = (p_A - p_C)^2$$
$$= -(m_A^2 + m_C^2)c^2 - 2 p_A \cdot p_C$$
$$= -(m_A^2 + m_C^2)c^2 + 2 m_A E_C$$

d'où $\quad \boxed{E_C = \frac{1}{2m_A}(m_A^2 + m_C^2 - m_B^2)c^2}$

et $\quad \vec{p}_C^{\,2} = m_C^2 \vec{w}_C^{\,2} = m_C^2 (w_C^0)^2 \vec{v}_C^{\,2} \frac{1}{c^2}$
$$= \frac{E_C^2}{c^4}\vec{v}_C^{\,2} = \frac{1}{c^2}E_C^2 - m_C^2 c^2$$

d'où
$$\boxed{\begin{aligned} \vec{v}_C^{\,2} &= c^2\left[1 - \frac{m_C^2 c^4}{E_C^2}\right] \\ &= c^2\left[1 - 4\left(\frac{m_A \cdot m_C}{(m_A^2 + m_C^2 - m_B^2)}\right)^2\right] \end{aligned}}$$

i) $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^-$:
$$\begin{cases} m_{K^+} = 493{,}67 \text{ MeV} \\ m_{\pi^+} = 139{,}57 \text{ MeV}; \ \tau_{\pi^+} = 2{,}6 \cdot 10^{-8} \text{ s} \\ m_{\pi^-} = 134{,}96 \text{ MeV}; \ \tau_\pi = 0{,}87 \cdot 10^{-16} \text{ s} \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad |\vec{v}_{\pi^+}| = \underline{0{,}8268c}$;

$$\ell_{\pi^+} = |\vec{v}_{\pi^+}| \cdot \frac{\tau_{\pi^+}}{\sqrt{1 - (\vec{v}_{\pi^+}/c)^2}} = \underline{\underline{11{,}5 \text{ m}}}$$

$$|\vec{v}_{\pi_0}| = \underline{\underline{0,8354\ c}}$$

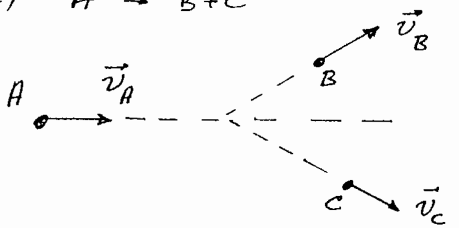
$$\ell_{\pi^0} = |\vec{v}_{\pi^0}| \cdot \frac{\tau_{\pi^0}}{\sqrt{1-\left(\frac{\vec{v}_{\pi_0}}{c}\right)^2}} = \underline{\underline{4 \cdot 10^{-8}\, m}}$$

ii) $\Sigma^0 \to \Lambda + \gamma$

$$\begin{cases} m_{\Sigma^0} = 1196{,}46 \text{ MeV} \\ m_\Lambda = 1115{,}60 \text{ MeV} \\ m_\gamma = 0 \end{cases}$$

$$E_\gamma = h\nu = \frac{1}{2 m_{\Sigma^0}} \left(m_{\Sigma^0}^2 - m_\Lambda^2 \right) c^2 = \underline{\underline{74{,}3 \text{ MeV}}}$$

iii) $A \to B + C$



$$\boxed{p_A = p_B + p_C}$$

$$p_A = \left(\frac{E_A}{c}, \vec{p}_A \right)$$

$$p_B = \left(\frac{E_B}{c}, \vec{p}_B \right)$$

$$p_C^{\,2} = -m_C^2 c^2 = (p_A - p_B)^2$$

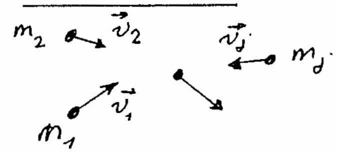
$$= -(m_A^2 + m_B^2) c^2 - 2\, p_A \cdot p_B$$

$$= -(m_A^2 + m_B^2) c^2 + 2 \frac{E_A E_B}{c^2} - 2\, \vec{p}_A \cdot \vec{p}_B$$

$$= -(m_A^2 + m_B^2) c^2 + 2 \frac{E_A E_B}{c^2} - 2 \cos\theta \left[E_A^2 - m_A^2 c^4 \right]^{1/2} \cdot \left[E_B^2 - m_B^2 c^4 \right]^{1/2} / c^2$$

$$\boxed{2 \cos\theta \cdot \left[E_A^2 - m_A^2 c^4 \right]^{1/2} \left[E_B^2 - m_B^2 c^4 \right]^{1/2} = \left(m_C^2 - m_A^2 - m_B^2 \right) c^4 + 2\, E_A \cdot E_B}$$

Problème 10



$$\begin{cases} \Pi^0 = \sum_j m_j\, w_j^0 & \text{où} \quad w_j^0 = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \vec{v}_j^{\,2}/c^2}} \\ \vec{\Pi} = \sum_j m_j\, \vec{w}_j = \sum_j m_j\, w_j^0\, \dfrac{\vec{v}_j}{c} \end{cases}$$

et $\quad \vec{\Pi}^2 - (\Pi^0)^2 = M^2 c^2$

$$\Rightarrow \boxed{M = \frac{1}{c} \sqrt{(\Pi^0)^2 - \vec{\Pi}^2}}$$

$$\boxed{\vec{v}_{CE} = c \frac{\vec{\Pi}}{\Pi^0} = c \frac{\sum_j m_j\, w_j^0\, \vec{v}_j}{\sum_j m_j\, w_j^0}}$$

Problème 11

$$\overset{\bullet\!\longrightarrow}{m_1 \quad \vec{v}_1} \qquad \overset{\bullet}{m_2} \quad \text{immobile}$$

Initial :

$$\begin{cases} \Pi^0_{(i)} = m_1 w_1^0 + m_2 w_2^0 = \dfrac{m_1 c}{\sqrt{1 - \vec{v}_1^{\,2}/c^2}} + m_2 c \\ \vec{\Pi}_{(i)} = \dfrac{m_1 \vec{v}_1}{\sqrt{1 - \vec{v}_1^{\,2}/c^2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow m^2 c^2 = (\Pi^0_{(i)})^2 - \vec{\Pi}_{(i)}^{\,2} = \frac{m_1^2 c^2}{1 - \vec{v}_1^{\,2}/c^2} + m_2^2 c^2 + \frac{2 m_1 m_2 c^2}{\sqrt{1 - \vec{v}_1^{\,2}/c^2}} - \frac{m_1 \vec{v}^{\,2}}{1 - \vec{v}_1^{\,2}/c^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{m^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2 \frac{m_1 m_2}{\sqrt{1 - \vec{v}_1^{\,2}/c^2}}}$$

final: $\begin{cases} \Pi^0_f = \Pi^0_i \\ \vec{\Pi}_f = m\,\vec{w}_f = \frac{1}{c}\Pi^0_f\,\vec{v}_f = \frac{\Pi^0_i}{c}\,\vec{v}_f = \vec{\Pi}_i \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_f = \frac{m_1\,\vec{v}_1}{m_1 + m_2\sqrt{1-\vec{v}_1^{\,2}/c^2}}}$$

Problème 12 $(c=1)$

$\gamma + N \rightarrow N + \pi \qquad m_N = 940\ MeV;\ m_\pi = 140\ MeV$

(1) $p_\gamma + p_N = p'_N + p'_\pi \quad ; \qquad p_\gamma = (E_\gamma, \vec{p}_\gamma) \quad E_\gamma = 2{,}5\cdot 10^{-10}\ MeV$

$p_N = (E_N, \vec{p}_N)$

Dans le référentiel du centre d'énergie, au seuil on a:

(2) $p'_N + p_\pi = (m_N + m_\pi\ ,\ \vec{0}\,)$

(1) $(p_\gamma + p_N)^2 = (p'_N + p_\pi)^2$

$\Rightarrow \quad -m_N^2 + 2\,p_\gamma\cdot p_N = -(m_N + m_\pi)^2$

$\Rightarrow \quad -2\,E_\gamma E_N + 2\,\vec{p}_\gamma\cdot\vec{p}_N = -m_\pi^2 - 2\,m_N m_\pi \qquad (3)$

Collision frontale $\Rightarrow \quad \vec{p}_\gamma\cdot\vec{p}_N = -E_\gamma\cdot|\vec{p}_N|$

$\Rightarrow \quad 2\,E_\gamma E_N + 2\,E_\gamma\,|\vec{p}_N| = m_\pi^2 + 2 m_N m_\pi$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E_N + (E_N^2 - m_N^2)^{1/2} = \frac{m_\pi^2 + 2\,m_N m_\pi}{2\,E_\gamma}} \qquad (4)$$

$$\Rightarrow \quad E_N^2 - m_N^2 = \left[\frac{m_\pi^2 + 2 m_N m_\pi}{2 E_\gamma} - E_N\right]^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E_N = \frac{m_\pi^2\,(m_\pi + 2 m_N)^2 + 4\,m_N^2\,E_\gamma^2}{4\,E_\gamma\,m_\pi\,(m_\pi + 2\,m_N)}} \approx 3\cdot 10^{14}\ MeV$$

Série 4

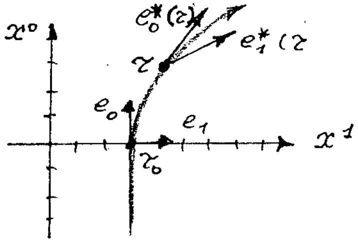
Problème 13

Dans le référentiel de repos $R^*(\tau)$ de la fusée, on a une accélération constante $\pm\vec{g}$. Par conséquent, en vertu du problème 7 :

$$w \overset{*}{=} (c, \vec{0}) \quad \text{et} \quad a \overset{*}{=} (0, \pm\vec{g}).$$

En particulier en choisissant l'axe 1^* parallèle à $\vec{g}$:

$$a \overset{*}{=} (0, \pm g, 0, 0) \quad \text{c.à.d.} \quad \boxed{a(\tau) = \pm g\, e_1^*(\tau)} \quad (1)$$



$t \leqslant 0$: $\vec{x}(t) = \vec{x} = cte$

$t \geqslant 0$: $a(\tau) \neq 0$

Nous avons vu que les vecteurs de base $e_\mu^*(\tau)$ de $R^*(\tau)$ sont caractérisés par:

$$\begin{cases} e_0^*(\tau) = \frac{1}{c}\, w(\tau) & (2) \\ \frac{d}{d\tau} e_i^*(\tau) = (a \cdot e_i^*)\, \frac{w(\tau)}{c^2} & (3) \end{cases}$$

$$\overset{(1)}{\underset{(3)}{\Longrightarrow}} \begin{cases} \frac{d}{d\tau} e_1^*(\tau) = \pm \frac{g}{c^2}\, w(\tau) & (4) \\ \frac{d}{d\tau} e_2^*(\tau) = 0 \quad \Rightarrow \quad e_2^*(\tau) = e_2^*(0) = e_2 & (5) \\ \frac{d}{d\tau} e_3^*(\tau) = 0 \quad \Rightarrow \quad e_3^*(\tau) = e_3^*(0) = e_3 & (6) \end{cases}$$

et $$a^i(\tau) = a \cdot e_i = g\, e_1^*(\tau) \cdot e_i$$

d'où $$a^2 = \frac{dw^2}{d\tau} = g\, e_1^*(\tau) \cdot e_2 \overset{(5)}{=} g\, e_1^*(\tau) \cdot e_2^*(\tau) = 0$$

$$a^3 = \frac{dw^3}{d\tau} = g\, e_1^*(\tau) \cdot e_3 \overset{(6)}{=} g\, e_1^*(\tau)\, e_3^*(\tau) = 0$$

> Par conséquent, si $w^2(\tau_0) = w^3(\tau_0) = 0$, on obtient $w^2(\tau) = w^3(\tau) = 0$, et le <u>mouvement est rectiligne</u> selon l'axe 1. On est ainsi ramené à un problème à $(1+1)$ dimension.

Nous avons ainsi $\quad w(\tau) = (w^0(\tau), w^1(\tau))$

et comme $w \cdot w = -c^2$, on peut toujours écrire

$$w(\tau) = c\,(\operatorname{ch}\eta(\tau), \operatorname{sh}\eta(\tau)) \qquad v = c\operatorname{th}\eta \qquad (7)$$

$$\Rightarrow \quad a(\tau) = \frac{dw}{d\tau} = c\,(\operatorname{sh}\eta(\tau), \operatorname{ch}\eta(\tau))\, \frac{d\eta}{d\tau} \qquad (8)$$

D'autre part (1) implique $a \cdot a = g^2$, d'où

$$c^2 \left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2 = g^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\eta}{d\tau} = \pm\frac{g}{c} = \frac{\alpha}{c} \qquad (9)$$

et $$\boxed{\eta(\tau) = \eta(\tau_0) + \frac{\alpha}{c}(\tau - \tau_0)} \qquad (10)$$

De $w(\tau) = \frac{dx}{d\tau} = c\,(\operatorname{ch}\eta(\tau), \operatorname{sh}\eta(\tau))$, on obtient ainsi l'évolution temporelle :

$$\boxed{x(\tau) = \frac{c^2}{\alpha}\left(x^0(\tau_0) + \operatorname{sh}\eta(\tau) - \operatorname{sh}\eta(\tau_0),\ x^1(\tau_0) + \operatorname{ch}\eta(\tau) - \operatorname{ch}\eta(\tau_0)\right)} \quad (1$$

1) Soit $\alpha = +g$. Pour $w^1(\tau_0) = 0$, on a $\eta(\tau_0) = 0$

et la distance parcourue pendant $\Delta\tau = \tau - \tau_0$ est:

$$\boxed{\Delta x^1 = x^1(\tau) - x^1(\tau^0) = \frac{c^2}{g}\left[\operatorname{ch}\left(\frac{g}{c}\Delta\tau\right) - 1\right]} \quad (12)$$

2) Entre τ_0 et τ_1, $\alpha = +g$ et $\tau_1 - \tau_0 = \Delta\tau$

Entre τ_1 et τ_2, $\alpha = -g$ et $\tau_2 - \tau_1 = \Delta\tau$

Entre τ_3 et τ_2, $\alpha = -g$ et $\tau_3 - \tau_2 = \Delta\tau$

Entre τ_4 et τ_2, $\alpha = +g$ et $\tau_4 - \tau_3\ \Delta\tau$.

Pour $\tau_0 \le \tau \le \tau_1$, $\alpha = g$, $\eta(\tau_0) = 0$, $\eta(\tau) = \frac{g}{c}(\tau - \tau_0)$:

$$\overset{(11)}{\Rightarrow} \quad x(\tau) = x(\tau_0) + \frac{c^2}{g}\left(\operatorname{sh}\left(\frac{g}{c}(\tau-\tau_0)\right),\ \operatorname{ch}\left(\frac{g}{c}(\tau-\tau_0)\right) - 1\right)$$

En particulier pour τ_1: $\eta(\tau_1) = \frac{g}{c}\Delta\tau$, et

$$x(\tau_1) = x(\tau_0) + \frac{c^2}{g}\left(\operatorname{sh}\left(\frac{g}{c}\Delta\tau\right),\ \operatorname{ch}\left(\frac{g}{c}\Delta\tau\right) - 1\right)$$

Pour $\tau_1 \le \tau \le \tau_3$, $\alpha = -g$, $\eta(\tau_1) = \frac{g}{c}\Delta\tau$

$$\eta(\tau) = \frac{g}{c}\Delta\tau - \frac{g}{c}(\tau - \tau_1)$$

$$\overset{(11)}{\Rightarrow} \quad x(\tau) = x(\tau_1) - \frac{c^2}{g}\left(\operatorname{sh}\eta(\tau) - \operatorname{sh}\left(\frac{g}{c}\Delta\tau\right),\ \operatorname{ch}\eta(\tau) - \operatorname{ch}\left(\frac{g}{c}\Delta\tau\right)\right)$$

En particulier pour $\tau = \tau_3$: $\eta(\tau_3) = -\frac{g}{c}\Delta\tau$

$$x(\tau_3) = x(\tau_1) + \frac{c^2}{g}\left(2\operatorname{sh}\left(\frac{g}{c}\Delta\tau\right),\ 0\right)$$

$$= x(\tau_0) + \frac{c^2}{g}\left(3\operatorname{sh}\left(\frac{g}{c}\Delta\tau\right),\ \operatorname{ch}\left(\frac{g}{c}\Delta\tau\right) - 1\right)$$

Pour $\tau_3 \le \tau \le \tau_4$, $\alpha = +g$, $\eta(\tau_3) = -\frac{g}{c}\Delta\tau$

$$\eta(\tau) = -\frac{g}{c}\Delta\tau + \frac{g}{c}(\tau - \tau_3)$$

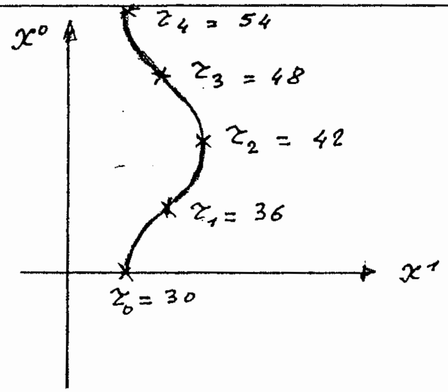
$$\overset{(11)}{\Rightarrow} \quad x(\tau) = x(\tau_3) + \frac{c^2}{g}\left(\operatorname{sh}\eta(\tau) + \operatorname{sh}\left(\frac{g}{c}\Delta\tau\right),\ \operatorname{ch}\eta(\tau) - \operatorname{ch}\left(\frac{g}{c}\Delta\tau\right)\right)$$

En particulier pour $\tau = \tau_4$

$$x(\tau_4) = x(\tau_0) + \frac{c^2}{g}\left(4\operatorname{sh}\left(\frac{g}{c}\Delta\tau\right),\ 0\right)$$

D'où

$$\boxed{\Delta t = t_4 - t_0 = 4\,\frac{c}{g}\operatorname{sh}\left(\frac{g}{c}\Delta\tau\right)} \qquad (13)$$



Application numérique.

1) $(12) \Rightarrow \Delta x^1 = \frac{c^2}{g}\left[\operatorname{ch}\left(\frac{g}{c}\Delta\tau\right) - 1\right]$

$g = 9{,}81 \qquad \Delta\tau = 22$ ans

$\Rightarrow \Delta x^1 = 3{,}32 \cdot 10^{27}\,m = $ 0,35 milliard année lumière

2) $\Delta\tau = 6$ ans $\overset{(13)}{\Rightarrow}$

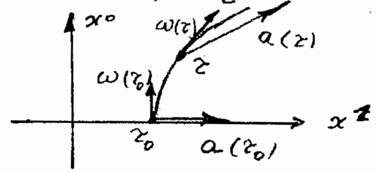
$\Delta t = \frac{4c}{g}\operatorname{sh}\left(\frac{g}{c}\Delta\tau\right) = $ 947 années

Le pilote est parti en l'an 2000 et il avait 30 ans ; il revient en l'an 2947 âgé de 54 ans.

Problème 14 : De (7) et (10), avec $\tau_0 = 0$,

$$e^*_0(\tau) = \frac{1}{c}\,w(\tau) = \left(\operatorname{ch}\frac{g}{c}\tau,\ \operatorname{sh}\frac{g}{c}\tau\right)$$

$$e^*_1(\tau) = \frac{1}{g}\,a(\tau) = \left(\operatorname{sh}\frac{g}{c}\tau,\ \operatorname{ch}\frac{g}{c}\tau\right)$$



Série 5 : Propriétés géométriques : métrique, ~~connexion~~ connexion affine, géodésique

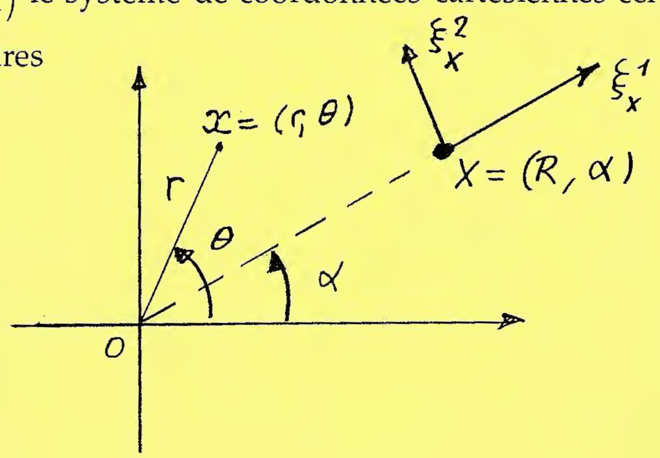
Problème 15

On considère le plan euclidien muni des coordonnées polaires

$x = (r, \theta) = (x^1, x^2)$, et X = (R, α)

un point de ce plan.

Soit $\xi_X = (\xi_X^1, \xi_X^2)$ le système de coordonnées cartésiennes centrées en X, orienté selon les directions polaires



$|OX| = R$

1) Trouver la <u>métrique</u> $g_{ij}(r, \theta)$ où

$$ds^2 = (d\xi_x^1)^2 + (d\xi_x^2)^2 = g_{ij}dx^i dx^j$$

i) à partir de la définition ci-dessus

ii) à partir de la propriété $g_{ij} = e_i \cdot e_j$

où e_r, e_θ sont les vecteurs tangents aux lignes de coordonnées

2) Trouver la <u>connexion affine</u> $\Gamma^i_{j\ k}(r, \theta)$

i) à partir de l'équation de la droite $\ddot{\xi}_x^1 = 0,\ \ddot{\xi}_x^2 = 0$

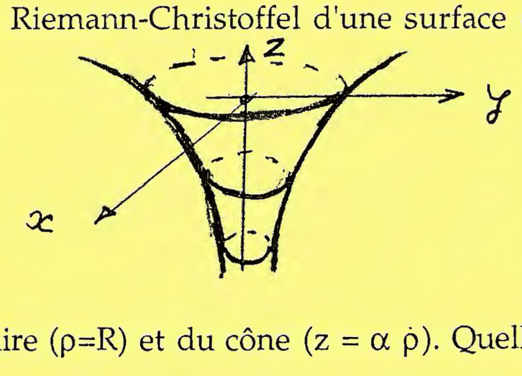
ii) à partir de l'expression du changement des coordonnées de $(\xi_x^1,\ \xi_x^2)$ à (r, θ)

iii) à partir de la métrique $g_{ij}(r,\theta)$

Problème 16

Calculer le tenseur métrique, puis les symboles de Riemann-Christoffel d'une surface de révolution, d'équation

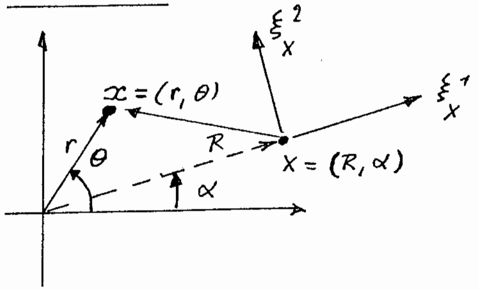
$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = f(\rho) \end{cases}$$



Vérifier que les génératrices sont des géodésiques.
Etudier les cas particuliers du cylindre à base circulaire (ρ=R) et du cône ($z = \alpha\ \rho$). Quelles sont les géodésiques issues d'un point P ?

Relativité   Série 5   )

Problème 15



Coordonnés polaires:

$x^1 = r \quad , \quad x^2 = \theta$

Connaissant α et R, on introduit le changement de coordonnées suivant:

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(r,\theta) \longmapsto (\xi^1_X(r,\theta), \xi^2_X(r,\theta))$$

où
$$\begin{cases} \xi^1_X(r,\theta) = r\cos(\theta-\alpha) - R \\ \xi^2_X(r,\theta) = r\sin(\theta-\alpha) \end{cases}$$

sont les coordonnées cartésiennes centrées en $X=(R,\alpha)$.
Pour simplifier la notation on écrira simplement ξ^i au lieu de ξ^i_X.

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial r}\xi^1 = \cos(\theta-\alpha) & ; \quad \dfrac{\partial}{\partial \theta}\xi^1 = -r\sin(\theta-\alpha) \\ \dfrac{\partial}{\partial r}\xi^2 = \sin(\theta-\alpha) & ; \quad \dfrac{\partial}{\partial \theta}\xi^2 = +r\cos(\theta-\alpha) \end{cases}$$

1) Métrique:

i) $d\rho^2 = \eta_{ij}\, d\xi^i d\xi^j = (d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 =$

$$= [\cos(\theta-\alpha)\,dr - r\sin(\theta-\alpha)\,d\theta]^2 +$$
$$+ [\sin(\theta-\alpha)\,dr + r\sin(\theta-\alpha)\,d\theta]^2$$
$$= dr^2 + r^2\, d\theta^2$$

c.à d. $d\rho^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j$

avec $g_{ij}(r,\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$

ii) autre méthode

Soit e_r, e_θ, les vecteurs tangents aux lignes de coordonnées, au point $X=(r,\theta)$.

$$e_r = \left(\frac{\partial}{\partial r}\xi^1, \frac{\partial}{\partial r}\xi^2\right) = (\cos(\theta-\alpha), \sin(\theta-\alpha))$$
$$e_\theta = \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\xi^1, \frac{\partial}{\partial \theta}\xi^2\right) = (-r\sin(\theta-\alpha), r\cos(\theta-\alpha))$$

De $\quad g_{ij} = e_r \cdot e_\theta$

il vient $\quad g_{rr}(r,\theta) = 1 , \quad g_{\theta\theta}(r,\theta) = r^2 , \quad g_{r\theta} = g_{\theta r} = 0$

2) Connexion affine $\quad \Gamma^i_{jk}(r,\theta)$

i) Soit $(\xi^1(t), \xi^2(t))$ une droite exprimée en coordonnées cartésienne. Par définition de la droite

$$\ddot{\xi}^1 = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{\xi}^2 = 0$$

$$\begin{cases} \dot{\xi}^1 = \dot{r}\cos(\theta-\alpha) - r\dot{\theta}\sin(\theta-\alpha) \\ \dot{\xi}^2 = \dot{r}\sin(\theta-\alpha) + r\dot{\theta}\cos(\theta-\alpha) \end{cases}$$

$$\ddot{\xi}^1 = 0 = \ddot{r}\cos(\theta-\alpha) - 2\dot{r}\dot{\theta}\sin(\theta-\alpha) - r\ddot{\theta}\sin(\theta-\alpha) - r\dot{\theta}^2\cos(\theta-\alpha)$$

$$\ddot{\xi}^2 = 0 = \ddot{r}\sin(\theta-\alpha) + 2\dot{r}\dot{\theta}\cos(\theta-\alpha) + r\ddot{\theta}\cos(\theta-\alpha) - r\dot{\theta}^2\sin(\theta-\alpha)$$

$$\cos(\theta-\alpha)\,\ddot{\xi}^1 + \sin(\theta-\alpha)\,\ddot{\xi}^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0} \quad \text{et}$$

$$\sin(\theta-\alpha)\,\ddot{\xi}^1 - \cos(\theta-\alpha)\,\ddot{\xi}^2 = 0$$

$$-2\dot{r}\dot{\theta} - r\ddot{\theta} = 0$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} = 0}$$

d'où
$$\begin{cases} \Gamma^r_{\theta\theta} = -r & \Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r} \\ \Gamma^i_{j\,k} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ii) $\Gamma^i_{j\,k} \doteq \dfrac{\partial x^i}{\partial \xi^\ell} \dfrac{\partial^2 \xi^\ell}{\partial x^j \partial x^k}$

où
$$\frac{\partial x^i}{\partial \xi^\ell}\frac{\partial \xi^\ell}{\partial x^j} = \delta^i_j$$

De
$$\left\{\frac{\partial \xi^\ell}{\partial x^j}\right\} = \begin{pmatrix} \cos(\theta-\alpha) & -r\sin(\theta-\alpha) \\ \sin(\theta-\alpha) & r\cos(\theta-\alpha)\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{\frac{\partial x^i}{\partial \xi^\ell}\right\} = \left\{\frac{\partial \xi^\ell}{\partial x^j}\right\}^{-1} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos(\theta-\alpha) & r\sin(\theta-\alpha) \\ -\sin(\theta-\alpha) & \cos(\theta-\alpha)\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial r^2} = 0$$

- $\Gamma^r_{r\,r} = 0$; $\Gamma^r_{r\theta} = \Gamma^r_{\theta r} = -\cos(\theta-\alpha)\sin(\theta-\alpha) + \sin(\theta-\alpha)\cos(\theta-\alpha) = 0$

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -\cos^2(\theta-\alpha)\,r - r\sin^2(\theta-\alpha) = -r$$

- $\Gamma^\theta_{r\,r} = 0$; $\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r}\sin^2(\theta-\alpha) + \frac{1}{r}\cos^2(\theta-\alpha) = \frac{1}{r}$

$$\Gamma^\theta_{\theta\theta} = +\frac{1}{r}\sin(\theta-\alpha)\,r\cos(\theta-\alpha) - \cos(\theta-\alpha)\sin(\theta-\alpha) = 0$$

iii) $\Gamma^i_{j\,k} \doteq \frac{1}{2} g^{i\ell}\{\partial_j g_{\ell k} + \partial_k g_{\ell j} - \partial_\ell g_{jk}\}$

où $\{g^{i\ell}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2}\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \Gamma^r_{r\,r} = \tfrac{1}{2}\cdot 1\{0 + 0 - 0\} = 0$$

$$\Gamma^r_{r\theta} = \tfrac{1}{2}\,1\{0 + 0 - 0\} = 0$$

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = \tfrac{1}{2}\,1\{0 + 0 - 2r\} = -r$$

$$\Gamma^\theta_{r\,r} = \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{r^2}\{0 + 0 - 0\} = 0$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{r^2}\{2r + 0 - 0\} = \tfrac{1}{r}$$

$$\Gamma^\theta_{\theta\theta} = \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{r^2}\{0 + 0 - 0\} = 0.$$

Problème 16

On considère la surface de révolution

$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi \\ z = f(\rho) \end{cases} \qquad \text{c.à d} \quad x^1 = \rho,\ x^2 = \varphi$$

où (x, y, z) sont les coordonnées cartésiennes de l'espace euclidien à 3 dimension.

1) Métrique :

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= [d\rho \cos\varphi - \rho \sin\varphi\, d\varphi]^2 + [d\rho \sin\varphi + \rho \cos\varphi\, d\varphi]^2 + [f'(\rho)\, d\rho]^2 \\ &= (1 + (f'(\rho))^2)\, d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 \end{aligned}$$

d'où

$$g_{ij}(\rho, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 + (f'(\rho))^2 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}$$

2) Connexion affine

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} \{ \partial_j g_{lk} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{jk} \}$$

$$\{g^{il}\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+f'^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2} \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^\rho_{\rho\rho} = \frac{1}{2} (1 + f'^2)^{-1} \{ 2 f' f'' \} = \frac{f' f''}{1 + f'^2}$$

$$\Gamma^\rho_{\rho\varphi} = \Gamma^\rho_{\varphi\rho} = \frac{1}{2} (1 + f'^2)^{-1} \{0\} = 0$$

$$\Gamma^\rho_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} (1 + f'^2)^{-1} \{ 0 + 0 - 2\rho \} = -\frac{\rho}{1 + f'^2}$$

$$\Gamma^\varphi_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} \frac{1}{\rho^2} [0 + 0 - 0] = 0$$

$$\Gamma^\varphi_{\rho\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi\rho} = \frac{1}{2} \frac{1}{\rho^2} [2\rho + 0 - 0] = \frac{1}{\rho}$$

$$\Gamma^\varphi_{\rho\rho} = 0$$

3) Géodésiques [on écrit $\frac{dg}{ds} = \dot{g}$, pour $g = g(s)$]

Equations des géodésiques:

$$\begin{cases} \ddot{\rho} + \dfrac{f' f''}{1 + f'^2} \dot{\rho}^2 - \dfrac{\rho}{1 + f'^2} \dot{\varphi}^2 = 0 & (1) \\ \ddot{\varphi} + \dfrac{2}{\rho} \dot{\rho} \dot{\varphi} = 0 & (2) \end{cases}$$

$\boxed{\text{Les génératrices, définies par } \dot{\varphi} = 0, \text{ sont des géodésiques.}}$

En effet (2) est vérifié ; d'autre part de l'expression de la métrique, il vient

$$\frac{d\rho}{ds} = (1 + f'^2(\rho))^{-1/2} \sqrt{1 - \rho^2 \dot{\varphi}^2}$$

d'où $\dfrac{d^2\rho}{ds^2} = \ddot{\rho} = \dfrac{-f' f''}{(1 + f'^2)^{3/2}} \dot{\rho}$ si $\dot{\varphi} = 0$

c.à d. $\ddot{\rho} = -\dfrac{f' f''}{(1 + f'^2)} \dot{\rho}^2$ si $\dot{\varphi} = 0$

d'où (1) est également vérifié.

Cylindre

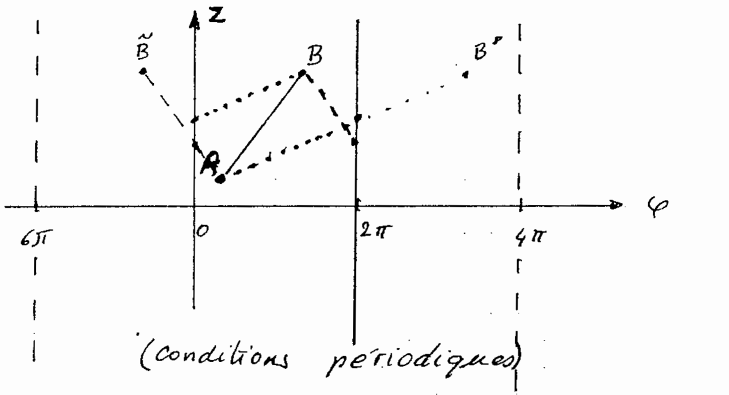
$$\begin{cases} x = R\cos\varphi & \varphi \in [0, 2\pi[\\ y = R\sin\varphi & R = c^{te} \\ z \in]-\infty, +\infty[\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = R^2 d\varphi^2 + dz^2$$

$$g_{ij}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = g_{ij}$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma^i_{j\,k} = 0$$

Géodésiques:
$$\begin{cases} \ddot{\varphi} = 0 & \varphi = \varphi_0 + s\,\dot{\varphi}_0 \\ \ddot{z} = 0 & z = z_0 + s\,\dot{z}_0 \end{cases}$$



(conditions périodiques)

Cône

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = \alpha\rho & \frac{1}{\alpha} = tg\,\theta = c^{te}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad g_{ij}(\rho, \varphi) = \begin{pmatrix} 1+\alpha^2 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}$$

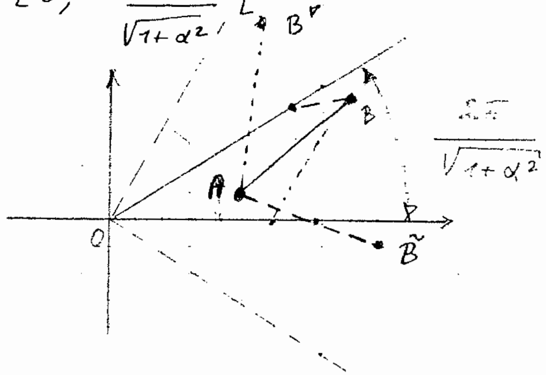
$$\begin{cases} \Gamma^{\rho}_{\varphi\varphi} = -\dfrac{\rho}{1+\alpha^2} & \Gamma^{\varphi}_{\rho\varphi} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi\rho} = \dfrac{1}{\rho} \\ \Gamma^i_{j\,k} = 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

Géodésiques :
$$\begin{cases} \ddot{\rho} - \dfrac{\rho}{1+\alpha^2}\,\dot{\varphi}^2 = 0 \\ \ddot{\varphi} + \dfrac{2}{\rho}\,\dot{\rho}\,\dot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

En effectuant le changement de variables $(\rho, \varphi) \mapsto (u, \psi)$ où
$$u = \sqrt{1+\alpha^2}\,\rho$$
$$\psi = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\,\varphi$$

on obtient :
$$ds^2 = (1+\alpha^2)\,d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 = du^2 + u^2 d\psi^2$$

ce qui correspond à la métrique du plan euclidien en coordonnées polaires (u, ψ), mais limité à $\psi \in \left[0, \dfrac{2\pi}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right[$.

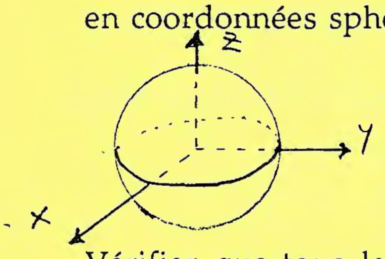


RELATIVITE ET COSMOLOGIE 18 janvier 2000

Série 6 : **Mouvement uniformément accéléré**
Propriétés géométriques et transport parallèle

Problème 17

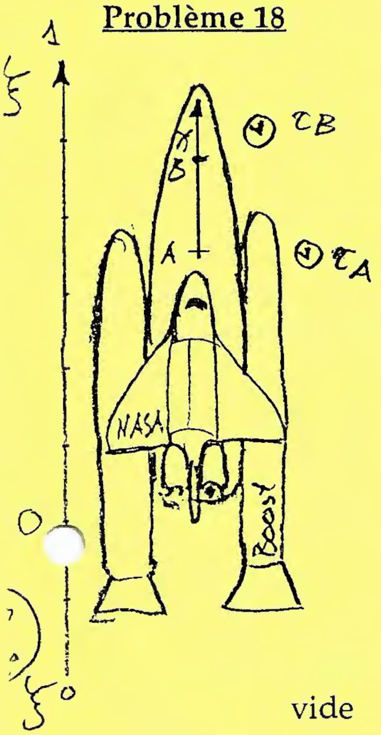
Calculer le tenseur métrique, puis les symboles de Riemann-Christoffel pour la sphère en coordonnées sphériques (θ, φ)



$x = R \sin\theta \cos\varphi$
$y = R \sin\theta \sin\varphi$
$z = R \cos\theta$

Vérifier que tous les grands cercles sont des géodésiques et que tout autre cercle ne peut pas être une géodésique.

Problème 18



"Champ de gravitation constant"
On considère une fusée dans le vide (pas de gravitation). Le pilote se trouve au point A (= origine) et son horloge indique le temps τ_A (= temps propre). On considère également un point fixé dans la fusée et le temps τ_B indiqué par l'horloge en ce point.
Pour $\tau_A < 0$, toutes les horloges sont synchronisées et la fusée est immobile.
Pour $\tau_A \geq 0$, la fusée a un mouvement rectiligne uniformément accéléré, d'accélération g (c.à.d. $\overset{*}{a} = (0, g, 0, 0)$).

vide $\xi^0 = \tau_A$ pour $\xi^0 < 0$

Soit $\{x^\mu\} = (t, x)$ le système de coordonnées comobile à la fusée défini par
t = temps indiqué par l'horloge de la fusée à l'endroit où l'événement a lieu et
x = distance à l'origine mesurée par la règle dans la fusée.

1) Trouver le changement de coordonnées $\xi^\mu = \xi^\mu(t, x)$ où (ξ^0, ξ^1) sont les coordonnées du référentiel Lorentzien.

2) Trouver la métrique $g_{\mu\nu}(t, x)$ relativement au système de coordonnées (t, x).

3) Trouver la connexion $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(t,x)$ en considérant les différentes méthodes possibles.

4) Trouver les géodésiques pour le point matériel et pour la lumière.

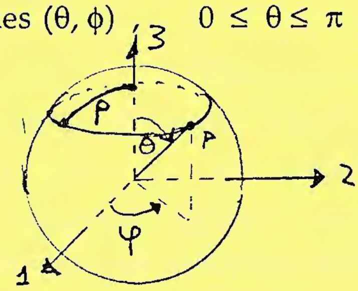
5) Trouver le temps τ_B indiqué par l'horloge au point B "à l'instant où l'horloge au point A indique τ_A. Considérer le cas particulier τ_A voisin de zéro.

6) Trouver le lieu des événements "simultanés à τ_A" sur la carte (t, x) du pilote.

7) Le point B émet toutes les $\delta_{\tau B}$ un signal lumineux. Calculer l'intervalle de temps $\delta_{\tau A}$ entre deux réceptions.

Problème 19

On considère la sphère de rayon R, dans R^3, paramétrisée par les coordonnées sphériques (θ, ϕ) , $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$



1) Vérifier que dans un voisinage de O (="Pôle Nord") la métrique est approximativement égale à la métrique euclidienne en coordonnées polaires.

2) Soit le θ_0-cercle défini par $\theta = \theta_0 =$ cte.

Calculer . le rayon propre de ce cercle, soit $\rho(\theta)$
. la longueur du cercle, soit $l(\theta)$
. la surface du disque, soit $\sigma(\theta)$

Comment varient les grandeurs ci-dessus lorsque θ_0 augmente de 0 à π ?

3) Calculer la courbure de Gauss K, définie, en considérant des θ_0-cercles de rayon propre ρ,

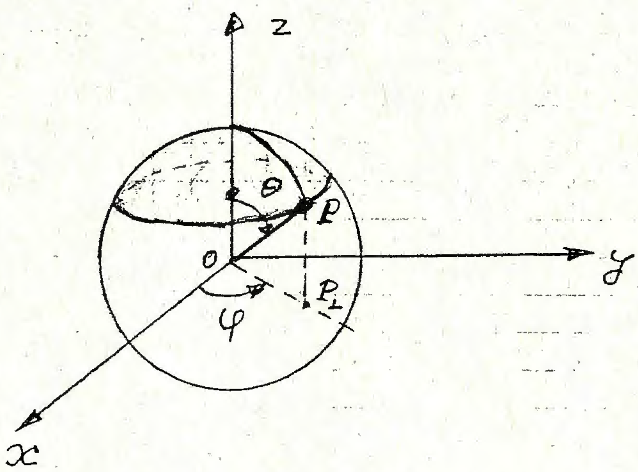
par $$K = \frac{12}{\pi} \lim_{\rho \to 0} \left(\frac{\pi \rho^2 - \sigma}{\rho^4} \right)$$

ou

par $$K = \frac{3}{\pi} \lim_{\rho \to 0} \left(\frac{2\pi\rho - l}{\rho^3} \right).$$

Problème 17

On considère la sphère de rayon R fixé dans $\mathbb{R}^3$, paramétrisée par les coordonnées sphériques $(x^1, x^2) = (\theta, \varphi)$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi[$



$$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\theta \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{aligned} dx &= R[\cos\theta\cos\varphi\, d\theta - \sin\theta\sin\varphi\, d\varphi] \\ dy &= R[\cos\theta\sin\varphi\, d\theta + \sin\theta\cos\varphi\, d\varphi] \\ dz &= -R\sin\theta\, d\theta \end{aligned}$$

d'où $\boxed{ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) = g_{ij}\, dx^i dx^j}$

- $g_{ij}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$; $g^{ij}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} 1/R^2 & 0 \\ 0 & 1/R^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$

- $\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{ii}(\partial_j g_{ik} + \partial_k g_{ji} - \partial_i g_{jk}) \Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} &\Gamma^\theta_{\theta\theta} = \Gamma^\theta_{\theta\varphi} = 0 \quad \text{et} \quad \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta \\ &\Gamma^\varphi_{\theta\theta} = \Gamma^\varphi_{\varphi\varphi} = 0 \qquad \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \end{aligned}}$$

- Géodésiques

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\theta}{d\rho^2} - \sin\theta \cos\theta \left(\dfrac{d\varphi}{d\rho}\right)^2 = 0 & (1) \\[2ex] \dfrac{d^2\varphi}{d\rho^2} + 2 \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \dfrac{d\theta}{d\rho} \dfrac{d\varphi}{d\rho} = 0 & (2) \end{cases}$$

Considérons le cercle défini par $\theta = \theta_0$ fixé ; (par symmétrie on peut toujours se ramener à ce cas, pour un cercle sur la sphère).

(1) $\Rightarrow \quad -\sin\theta_0 \cos\theta_0 \left(\dfrac{d\varphi}{d\rho}\right)^2 = 0$ d'où $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$

(2) $\Rightarrow \quad \dfrac{d^2\varphi}{d\rho^2} = 0$ soit $\varphi(\rho) = a\rho + b$

> En conclusion, le cercle $\theta = \theta_0$ est une géodésique ssi $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$, càd. un grand cercle.

Pour montrer que seuls les grands cercles sont des géodésiques sur la sphère, on peut procéder comme suit : un point qui évolue sur une sphère de $\mathbb{R}^3$ a une accélération donnée en coordonnées sphériques par $\vec{a} = (a_r, a_\theta, a_\varphi)$, où

$$\begin{cases} a_r = -R(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\, \dot\varphi^2) \\ a_\theta = R(\ddot\theta - \sin\theta\cos\theta\, \dot\varphi^2) \\ a_\varphi = R\sin\theta\left(\ddot\varphi + 2\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\dot\theta\dot\varphi\right) \end{cases}$$

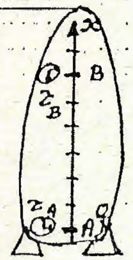
C. Gruber
Mécanique Générale
p. 122
$r = R = cte$

Si $(\theta(\rho), \varphi(\rho))$ est une géodésique, on a en vertu de (1) et (2) : $a_\theta = a_\varphi = 0 \Rightarrow \vec{a} = a_r \vec{e}_r$.

Le mouvement est alors central, de centre l'origine O. Il a donc lieu dans un plan contenant O, c.à d. c'est un grand cercle

> En conclusion, toute géodésique est un grand cercle

Problème 18 Série 6



$E \mapsto (\xi^0; \xi^1)$: système de coordonnées Lorentzien (p.i. au vide)

$E \mapsto (t, x)$: système de coordonnées relativement ~~au~~ à la fusée où t = temps mesuré par l'horloge fixée dans la fusée au point x (où l'événement E a lieu)

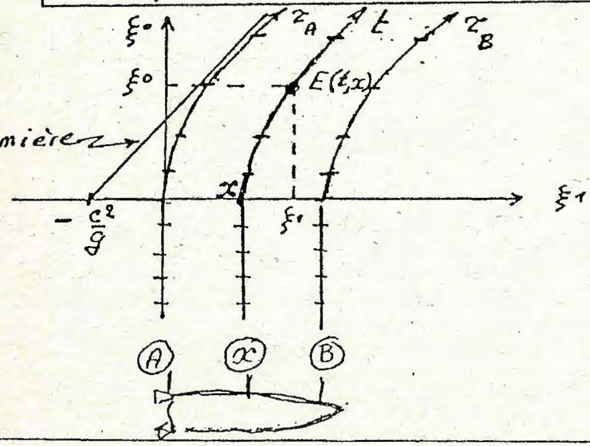
ξ^0

(t, x) sont des coordonnées "comobiles" avec la fusée.

$c = 1$

En vertu du problème 9 l'évolution du "point x" de la fusée est donnée par (11) avec $\tau_0 = 0$, $\eta(\tau_0) = 0$, $t(\tau_0) = 0$:

soit
$$\boxed{\begin{cases} \xi^0(t,x) = \dfrac{1}{g}\, \mathrm{sh}\,(gt) \\ \xi^1(t,x) = x + \dfrac{1}{g}\,[\mathrm{ch}(gt) - 1] \end{cases}} \qquad t \equiv \tau_x \quad (1)$$



Le changement de coordonnée est défini par (1)

2) Métrique

$$d\tau^2 = (d\xi^0)^2 - (d\xi^1)^2 = [(\mathrm{ch}\,gt)\,dt]^2 - [dx + (\mathrm{sh}\,gt)\,dt]^2$$
$$= dt^2 - 2\,\mathrm{sh}\,gt\; dx\,dt - dx^2$$
$$= -\,g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$$

$$\Rightarrow \boxed{g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & \mathrm{sh}\,gt \\ \mathrm{sh}\,gt & 1 \end{pmatrix} \; ; \; g^{\mu\nu} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 gt}\, g_{\mu\nu}}$$

Autre méthode : (ξ^0, ξ^1) = SCIL

$$g_{\mu\nu} = -\frac{\partial \xi^0}{\partial x^\mu}\frac{\partial \xi^0}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \xi^1}{\partial x^\mu}\frac{\partial \xi^1}{\partial x^\nu}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g_{tt} = -\,\mathrm{ch}^2(gt) + \mathrm{sh}^2(gt) = -1 \\ g_{xt} = \mathrm{sh}\,(gt) \\ g_{xx} = 1 \end{cases}$$

3) Connection Affine.

1ère Méthode : $\mathcal{L}(x, \dot x) = -\frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}(x)\, \dot x^\mu \dot x^\nu$

Constantes du mouvement :

① $g_{\mu\nu}\, \dot x^\mu \dot x^\nu = -1 \Leftrightarrow (\dot x^0)^2 - 2\,\mathrm{sh}(gx^0)\, \dot x^0 \dot x^1 - (\dot x^1)^2 = 1$

② $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot x^1} = \text{cte} \Leftrightarrow \dot x^1 + \mathrm{sh}(g x^0)\, \dot x^0 = \text{cte}$

$\dot{②} \Rightarrow \ddot x^1 + \mathrm{sh}(g x^0)\, \ddot x^0 + g\, \mathrm{ch}(g x^0)\, (\dot x^0)^2 = 0 \quad (3)$

$\dot{①} \Rightarrow \dot x^0 \ddot x^0 - g\,\mathrm{ch}(gx^0)\,(\dot x^0)^2\, \dot x^1 - \mathrm{sh}\,(gx^0)\,[\ddot x^0 \dot x^1 + \dot x^0 \ddot x^1] - \dot x^1 \ddot x^1 = 0 \quad (4)$

En vertu de (3) les termes ~ sont nuls

$$\Rightarrow \ddot x^0 - \mathrm{sh}(g x^0)\, \ddot x^1 = 0 \qquad (5)$$

(3) et (5) $\Rightarrow$ $\ddot{x}^0 \cdot ch^2(gx^0) + g\,sh(gx^0)\,ch(gx^0)\,(\dot{x}^0)^2 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}^0 + g\,th(gx^0)\,(\dot{x}^0)^2 = 0 \\ \ddot{x}^1 + g\,\dfrac{1}{ch(gx^0)}\,(\dot{x}^0)^2 = 0 \end{cases}$$

De $\ddot{x}^1 + \Gamma^1_{\mu\nu}\,\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0$, on trouve alors

$$\boxed{\begin{array}{l} \Gamma^t_{tt} = g\,th(gt)\ ; \quad \Gamma^x_{tt} = g\,\dfrac{1}{ch(gt)} \\ \Gamma^t_{xx} = \Gamma^t_{xt} = \Gamma^x_{xx} = \Gamma^x_{xt} = 0 \end{array}} \qquad (6)$$

2ème méthode : $\Gamma^1_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{1\rho}[\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}]$

$\Rightarrow \Gamma^t_{tt} = \frac{1}{2} g^{tx}[2\partial_t g_{xt}] = \frac{sh\,gt}{ch^2 gt}[g\,ch(gt)] = g\,th(gt)$

$\Gamma^x_{tt} = \frac{1}{2} g^{xx}[2\partial_t g_{xt}] = \frac{1}{ch^2 gt}[g\,ch(gt)] = \frac{g}{ch(gt)}$

$\vdots$

3ème méthode:

$$\Gamma^1_{\mu\nu} = \frac{\partial x^1}{\partial \xi^0}\frac{\partial^2 \xi^0}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial x^1}{\partial \xi^1}\frac{\partial^2 \xi^1}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

$$\left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\right) = \begin{pmatrix} ch(gt) & 0 \\ sh(gt) & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha}\right) = \frac{1}{ch(gt)}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -sh(gt) & ch(gt) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \Gamma^1_{x\nu} = 0\ ; \quad \Gamma^x_{tt} = g\,th(gt)\ ; \quad \Gamma^t_{tt} = \frac{g}{ch(gt)}$

4) Géodésiques   1ère méthode

② $\Rightarrow$ $(\dot{x}^1)^2 + 2\,sh(gx^0)\,\dot{x}^0\dot{x}^1 + [sh(gx^0)]^2(\dot{x}^0)^2 = cte$

avec ① $\Rightarrow$ $\dot{x}^0\,ch(gx^0) = cte$.

c.à d. $\begin{cases} \dfrac{dt}{d\tau}\,ch(gt) = cte \\ \dfrac{dx}{d\tau} + sh(gt)\dfrac{dt}{d\tau} = cte \end{cases}$ (7)

et ② $\Rightarrow$

d'où $\boxed{\dfrac{dx}{dt} + sh(gt) = v\,ch(gt)}$ $v = \frac{dx}{dt}(t=0)$

$\Rightarrow$ $\boxed{x(t) = x(0) + \frac{1}{g}[v\,sh(gt) + 1 - ch(gt)]}$

c'est l'équation de la particule en chute libre

Remarques.

1) $x(t) = x(0) + vt - \frac{1}{2}gt^2 + O(t^3)$

2) Pour : $x(0)$ et $v = 0$ $\Rightarrow$

$x(t) = \frac{1}{g}[1 - ch\,gt] = -\frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{24}g^3t^4 + \dots$

Alors que pour un mouvement d'accélération constante (problème 9) : $x(t) = \frac{1}{g}[1 - \sqrt{1+g^2t^2}] = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{8}g^3t^4 + \dots$

3) Le temps propre de la particule en chute libre est

De (7) $\frac{dt}{d\tau}\,ch(gt) = C = cte$ $\Rightarrow$ $sh(gt) = gC\tau + b$

et de (1) $\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - 2g\,sh(gt)\frac{dt}{d\tau}\frac{dx}{d\tau} - \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 = 1$

$\Rightarrow$ $1 - 2g\,sh(gt)\frac{dx}{dt} - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \left[\frac{ch\,gt}{C}\right]^2$

Pour $t=0$ $\Rightarrow$ $1 - v^2 = \frac{1}{C^2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{sh(gt) = \frac{g\tau}{\sqrt{1-v^2}} + b}$

Lumière : $v = \pm 1$ $\boxed{x(t) = x(0) + \frac{1}{g}[1 - e^{\pm gt}]}$

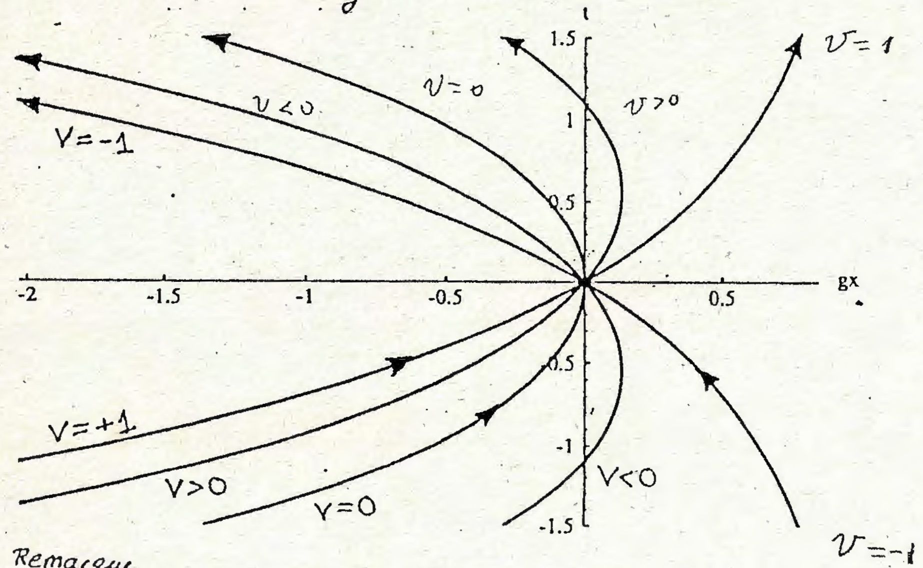
...tre méthode.

Nous savons que relativement à l'observateur dans le vide les géodésiques sont les droites

$$\xi^1 = \alpha + v\,\xi^0$$

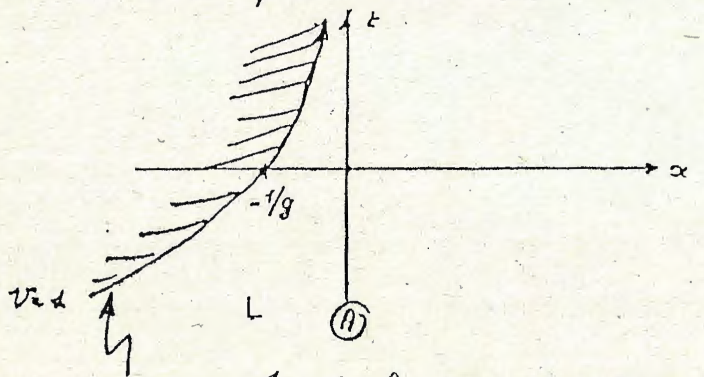
d'où $x + \frac{1}{g}[ch(gt) - 1] = \alpha + v\,\frac{1}{g}\,sh\,gt$

$$x = \alpha + \frac{1}{g}\,[v\,sh\,gt + (1 - ch\,gt)]$$



Remarque.

La partie hachurée de l'espace (t, x) ci-dessous est "invisible" pour l'observateur dans la fusée en A.



$$x = \frac{1}{g}\,[sh\,gt - ch\,gt] = -\frac{1}{g}\,e^{-gt}$$

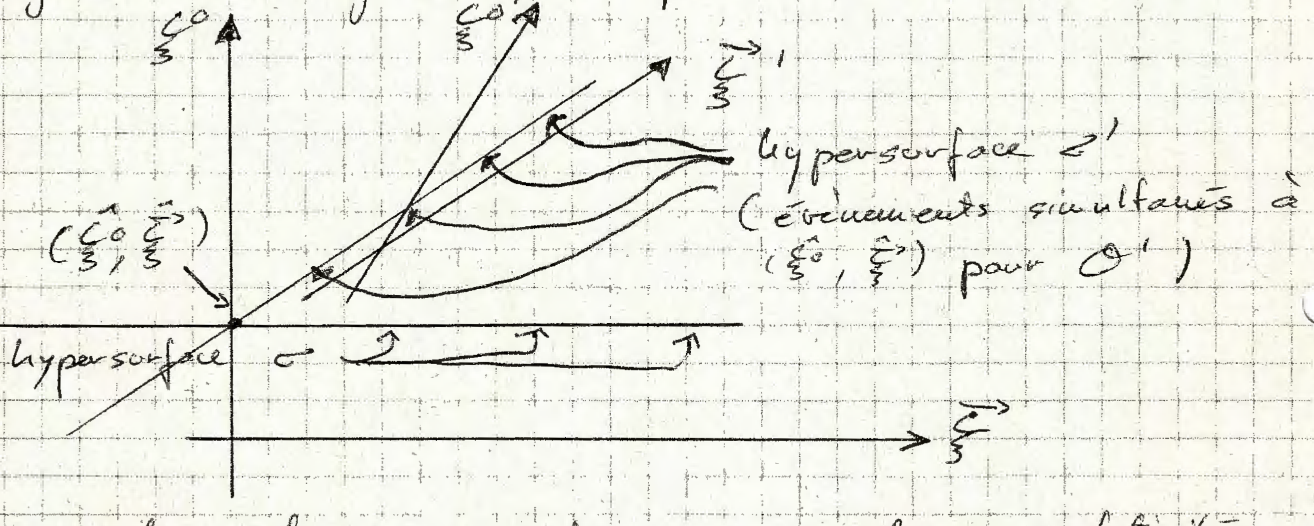
points 5 & 6 voir pages annexes.

Problème 18

points 5 & 6)

Pour trouver le temps qu'indique l'horloge au point B lorsque l'horloge au point A indique τ_A, on va d'abord chercher le lieu des évènements simultanés à (τ_A, x_A) dans la carte du pilote.
Ce problème n'est pas immédiat car on est dans un système de coordonnées accéléré.

En relativité restreinte nous savons que pour un observateur $\mathcal{O}$ possédant une carte $(\xi^0, \vec{\xi})$, les évènements simultanés à un point $(\hat{\xi}^0, \hat{\vec{\xi}})$ est donné par une hypersurface σ passant par ce point et orthogonal (avec la métrique $\eta_{\alpha\beta}$) au vecteur e_0 tangent à la ligne de temps :



Comment peut on reprendre ce concept en relativité générale ?
On sait que pour n'importe-quel système de coordonnées et pour n'importe-quel point x_A^μ choisi dans ce système il existe un S.C.L.L. tel que localement autour de X_A^μ et dans le S.C.L.L on se retrouve dans le cas de la relativité restreinte.

De plus on sait que si on a trouvé un tel S.C.l.L. ξ^α_A, on peut en trouver un autre $\xi^{\alpha'}_A$ en faisant une transformation de Poincaré à partir de ξ^α_A. On peut donc trouver un S.C.l.L. tel que autour du point X^μ_A on se retrouve en relativité restreinte et tel que ce S.C.l.L soit immobile par rapport à $\{X^\mu\}$ en X^μ_A. On peut donc sans autres utiliser ce S.C.l.L. pour définir localement autour de X^μ_A l'ensemble des points simultanés à X^μ_A par rapport à la carte $\{X^\mu\}$.

Ainsi on arrive à la définition suivante:

Dans un système de coordonnées $\{X^\mu\}$ l'ensemble des points simultanés à X^μ_A est donnée par une hypersurface passant par X^μ_A et qui est en chacun de ses points orthogonale (avec la métrique $g_{\mu\nu}(X^\alpha)$) aux vecteurs tangents aux lignes de temps (X^0, $\vec{X}$ = cste).

Pour notre pilote ceci revient donc à chercher une courbe $(\sigma(x), x)$ telle que:

$$0 = (1, 0)\begin{pmatrix} -1 & sh(g\sigma(x)) \\ sh(g\sigma(x)) & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\sigma}(x) \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$= -\dot{\sigma}(x) + sh(g\sigma(x)).$$

Nous avons donc une équation différentielle à résoudre:

$$\dot{\sigma}(x) = sh(g\sigma(x)) \qquad (2)$$

Pour résoudre cette équation on s'aide de l'équation différentielle :

$$f'(s) = \frac{1}{sh(s)} \qquad (3)$$

dont la solution est :

$$f(s) = \ln\left[th\left(\frac{s}{2}\right)\right]. \qquad (4)$$

Ainsi nous savons que :

$$\frac{1}{g}\frac{d}{dx}\left\{ f[g\sigma(x)]\right\} = 1. \qquad (5)$$

En intégrant des deux côtés on trouve :

$$\frac{1}{g}\left\{ f[g\sigma(x)] - f[g\sigma(x_1)]\right\} = x - x_1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{g} f[g\sigma(x)] = x - x_0$$

$$\Rightarrow f[g\sigma(x)] = g(x - x_0)$$

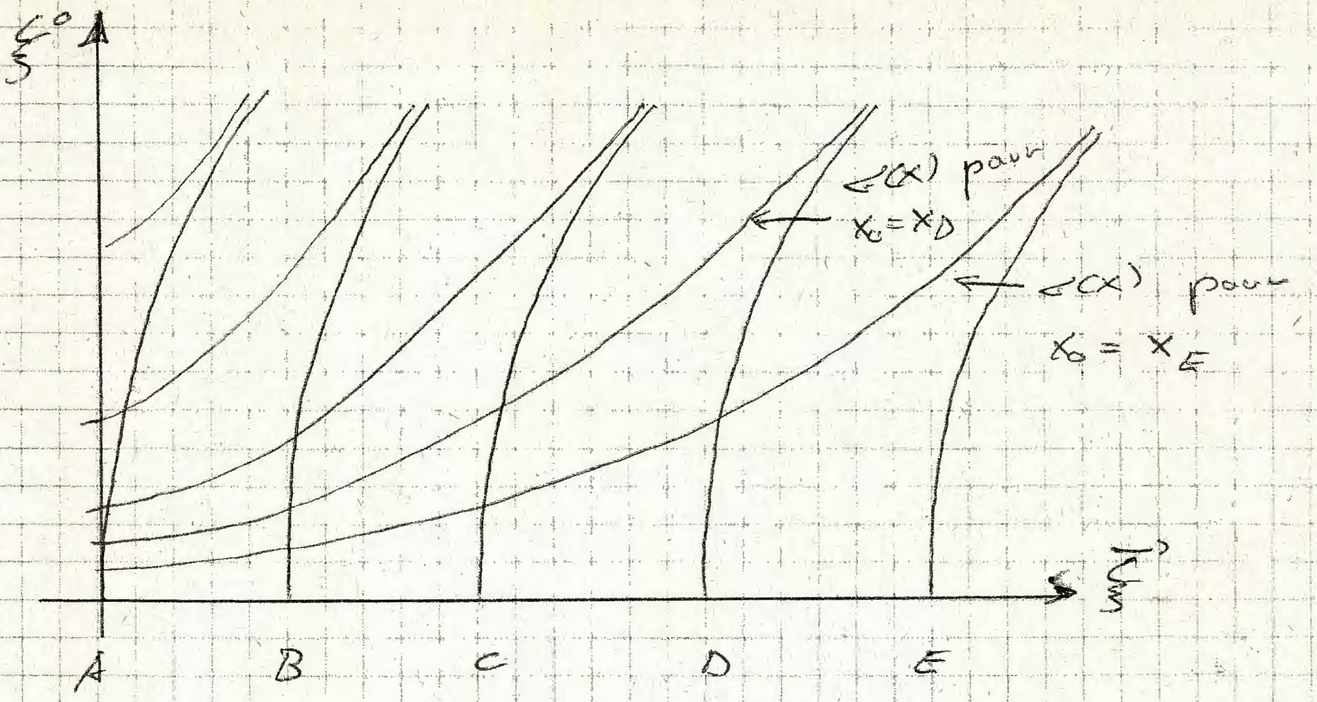
$$\Rightarrow \sigma(x) = \frac{2}{g} \operatorname{Arcth}\left\{ \exp[g(x-x_0)]\right\} \qquad (6)$$

Pour trouver x_0 on impose que

$\tau_A = \sigma(x_A)$, c'est-à-dire que

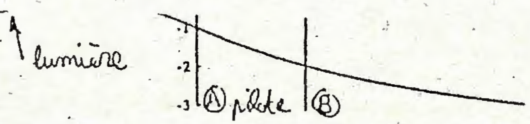
$$x_0 = x_A - \frac{1}{g}\ln\left\{ th\left[g\frac{\tau_A}{2}\right]\right\} \qquad (7)$$

Remarquons que si $x_B \geq x_0$, la question 5 n'a pas de réponse ($\operatorname{Arcth}(s)$ n'est défini que pour $-1 < s < 1$).

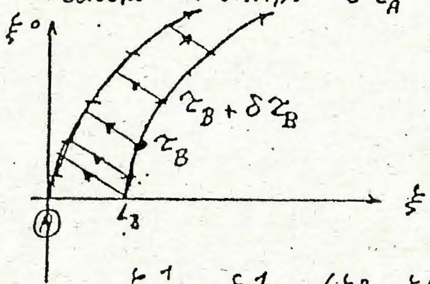


Par contre si $x_B < x_0$, alors le temps τ_B indiqué par l'horloge en B lorsque l'horloge en A indique τ_A est :

$$\boxed{\tau_B = \frac{2}{g} \operatorname{Arcth} \{ \exp [g (x_B - x_0)] \}}$$



7) Le point B émet tous les $\delta\tau_B$ un signal lumineux.
Calculons le temps $\delta\tau_A$ entre deux réceptions en Ⓐ



Ligne d'univers du signal lumineux émis de (ξ^0_B, ξ^1_B) :

où $\begin{cases} \xi^0_B = \frac{1}{g}\, sh(g\tau_B) \\ \xi^1_B = L_B + \frac{1}{g}[ch(g\tau_B) - 1] \end{cases}$

$$\xi^1 = \xi^1_B - (\xi^0 - \xi^0_B)$$ (= ligne d'univers de la lumière)

A la réception de ce signal par Ⓐ

$$\begin{cases} \xi^0 = \frac{1}{g}\, sh(g\tau_A) \\ \xi^1 = \frac{1}{g}[ch(g\tau_A) - 1] = L_B + \frac{1}{g}[ch(g\tau_B) - 1 - sh(g\tau_A) + sh(g\tau_B)] \end{cases}$$

$\mapsto$ $$ch(g\tau_A) = gL_B + ch(g\tau_B) - sh(g\tau_A) + sh(g\tau_B)$$

$\mapsto$ $$e^{g\tau_{AL}} = e^{g\tau_B} + g L_B$$

$$\delta\tau_A = e^{-g\tau_A}\, e^{g\tau_B}\, \delta\tau_B$$

$$\boxed{\delta\tau_A = \frac{1}{1+gL_B\, e^{-g\tau_B}}\, \delta\tau_B}$$

Pour $\tau_B \cong 0$:

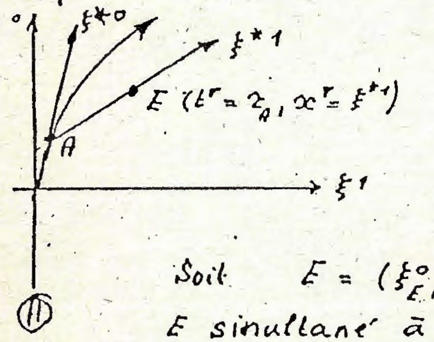
$$\delta\tau_A = \frac{1}{1+g\,L_B}\, \delta\tau_B$$

$$\boxed{\nu_{réc} = (1+g\,L_B)\, \nu_{ém}}$$

On retrouve les formules de l'effet gravito-optique.

Commentaires.

On aurait pu introduire une autre paramétrisation pour le pilote en considérant à tout instant la paramétrisation définie par le référentiel d'inertie de repos du pilote.



Evolution de A :

$$\begin{cases} \xi^0_A = \frac{1}{g}\, sh\,(g\tau_A) \\ \xi^1_A = \frac{1}{g}\,[ch\,(g\tau_A) - 1]. \end{cases}$$

Soit $E = (\xi^0_E, \xi^1_E)$

E simultané à τ_A [cf p.7]

(11)

$$\Rightarrow \quad \xi^0_E = \left(\xi^1_E + \frac{1}{g}\right) th\,(g\tau_A)$$

c.à d. $\boxed{th\,(g\tau_A) = \dfrac{\xi^0_E}{\xi^1_E + g^{-1}}}$

et $\xi^{*1}_E - \xi^{*1}_A = -\gamma\, v\,(\xi^0_E - \xi^0_A) + \gamma\,(\xi^1_E - \xi^1_A)$

$$= \gamma\left\{-th\,(g\tau_A)\left[(\xi^1_E + g^{-1})\, th\,(g\tau_A) - g^{-1}\, th\,(g\tau_A)\right] + \left[\xi^1_E - g^{-1}\,(ch\,g\tau_A - 1)\right]\right\}$$

$$= \gamma\left\{\xi^1_E\,(1 - th^2 g\tau_A) + g^{-1}\,(1 - ch\,g\tau_A)\right\}$$

$$= (\xi^1_E + g^{-1})\,\frac{1}{ch\,(g\tau_A)} - g^{-1}$$

Posons alors (t^r_E, x^r_E) défini par

$$\begin{cases} th\,(g\,t^r_E) = \dfrac{\xi^0_E}{\xi^1_E + g^{-1}} \\ x^r_E = (\xi^1_E + g^{-1})\sqrt{1 - \left(\dfrac{\xi^0_E}{\xi^1_E + g^{-1}}\right)^2} - g^{-1} \end{cases}$$

c.à d. que l'on considère le changement de coordonnées:

$$(\xi^0, \xi^1) \mapsto (t^r, x^r)$$

$$\boxed{\begin{aligned} th\,(g\,t^r) &= \frac{\xi^0}{\xi^1 + g^{-1}} \\ x^r &= \sqrt{(\xi^1 + g^{-1})^2 - (\xi^0)^2} - g^{-1} \end{aligned}}$$

<u>Relation inverse:</u>

$$x^r + g^{-1} = (\xi^1 + g^{-1})\,\underbrace{\sqrt{1 - (th\,g\,t^r)^2}}_{\frac{1}{ch\,g\,t^r}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \xi^0 &= (x^r + g^{-1})\, sh\,g\,t^r \\ \xi^1 &= (x^r + g^{-1})\, ch\,g\,t^r - g^{-1} \end{aligned}}$$

métrique

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(1+gx)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{(1+gx)^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[comparez avec la formule pour approximation newtonienne]

Connexion affine
$$\begin{cases} \Gamma^0_{0\,1} = g\,(1+gx)^{-1} \\ \Gamma^1_{0\,0} = g\,(1+gx) \end{cases}$$

Géodésique.

$$\xi^1 = \alpha + u\,\xi^0$$

$$\Rightarrow \quad (x^r + g^{-1})\,\mathrm{ch}\,gt^r - g^{-1} = \alpha + u\,(x^r + g^{-1})\,\mathrm{sh}\,gt^r$$

$$(x^r + g^{-1})\,[\mathrm{ch}\,gt^r - u\,\mathrm{sh}\,gt^r] = \alpha + g^{-1}$$

$$\boxed{x^r(t^r) = \frac{\alpha + g^{-1}}{\mathrm{ch}\,gt^r - u\,\mathrm{sh}\,gt^r} - g^{-1}}$$

$$\alpha = x^r(0)$$

$$\frac{dx^r}{dt^r} = -g(\alpha + g^{-1}) \frac{\mathrm{sh}\,gt^r - u\,\mathrm{ch}\,gt^r}{[\mathrm{ch}\,gt^r - u\,\mathrm{sh}\,gt^r]^2}$$

$$\frac{dx^r}{dt^r}(t^r = 0) = (1 + \alpha g)\,u$$

En particulier pour $\begin{cases} x(0) = 0 \\ \frac{dx^r}{dt^r}(0) = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad x^r(t^r) = \frac{1}{g}\left[\frac{1}{\mathrm{ch}\,gt^r} - 1\right] \qquad \text{[comparer p. 4]}$$

$$= -\frac{1}{2} g t^{r\,2} + \frac{5}{24} g^3 t^{r\,4} + \dots$$

Evolution de B [sur la carte de A]

p. 6 $\Rightarrow$
$$\begin{cases} \xi^0_B = \frac{1}{g}\,\mathrm{sh}(g\tau_B) \\ \xi^1_B = L_B + \frac{1}{g}\,[\mathrm{ch}(g\tau_B) - 1] \end{cases}$$

avec les formules de transformation de la p. 10

$$\begin{cases} \mathrm{th}(gt^r) = \dfrac{\mathrm{sh}(g\tau_B)}{g\cdot L_B + \mathrm{ch}(g\tau_B)} \\ x^r = g^{-1}\left[\sqrt{(gL_B + \mathrm{ch}\,g\tau_B)^2 - (\mathrm{sh}\,g\tau_B)^2} - 1\right] \end{cases}$$

On a ainsi :

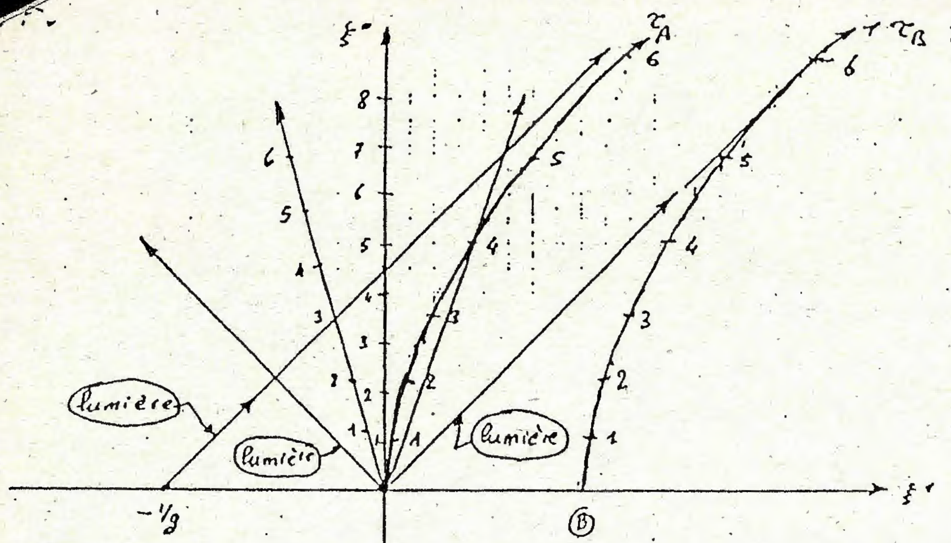
$$\mathrm{ch}(g\tau_B) = \frac{\mathrm{sh}(g\tau_B)}{\mathrm{th}(gt^r)} - g L_B$$

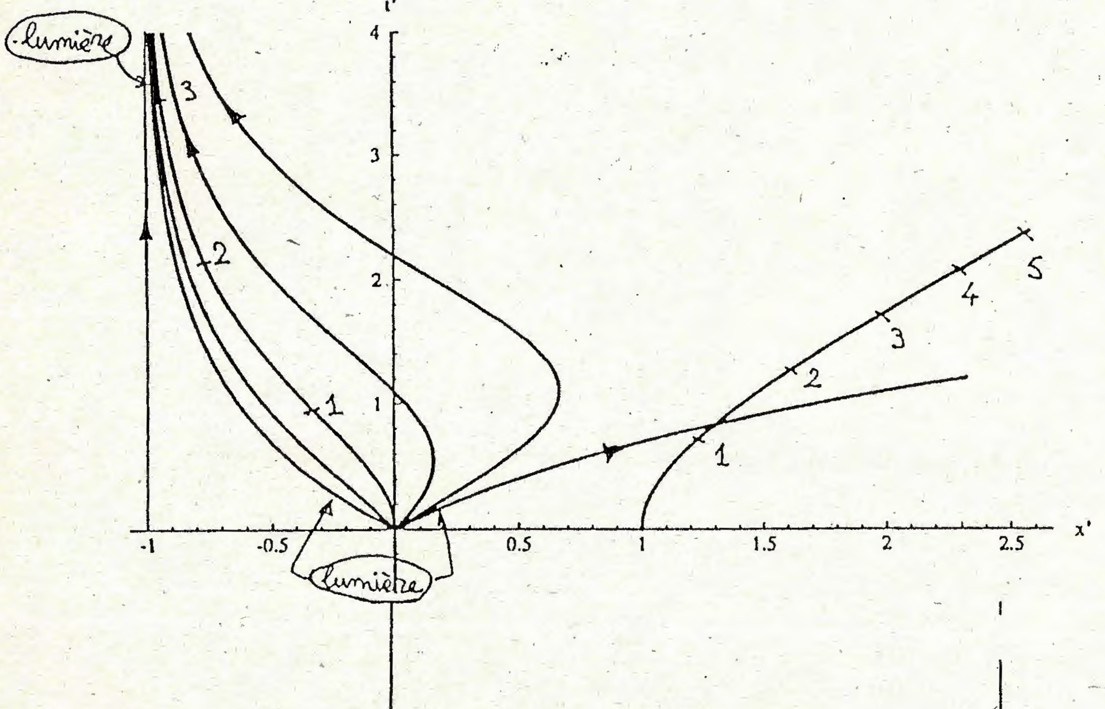
$$\Rightarrow \quad 1 + \mathrm{sh}^2(g\tau_B) = \frac{\mathrm{sh}^2(g\tau_B)}{\mathrm{th}^2(gt^r)} - 2gL_B \frac{\mathrm{sh}(g\tau_B)}{\mathrm{th}(gt^r)} + g^2 L_B^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{sh}^2(g\tau_B)\,\underbrace{\left[-1 + \frac{1}{\mathrm{th}^2(gt^r)}\right]}_{=\frac{1}{\mathrm{sh}^2 gt^r}} - 2g\frac{L_B}{\mathrm{th}\,gt^r}\,\mathrm{sh}\,g\tau_B + (g^2L_B^2 - 1) =$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{sh}(g\tau_B) = \mathrm{sh}^2(gt^r)\left[g\frac{L_B}{\mathrm{th}\,gt^r} + \sqrt{\left(g\frac{L_B}{\mathrm{th}\,gt^r}\right)^2 - \frac{g^2L_B^2 - 1}{\mathrm{sh}^2 gt}}\right.$$

$$= \mathrm{sh}(gt^r)\left[g L_B\,\mathrm{ch}\,gt^r + \sqrt{1 + g^2L_B^2\,\mathrm{sh}^2 g}\right.$$





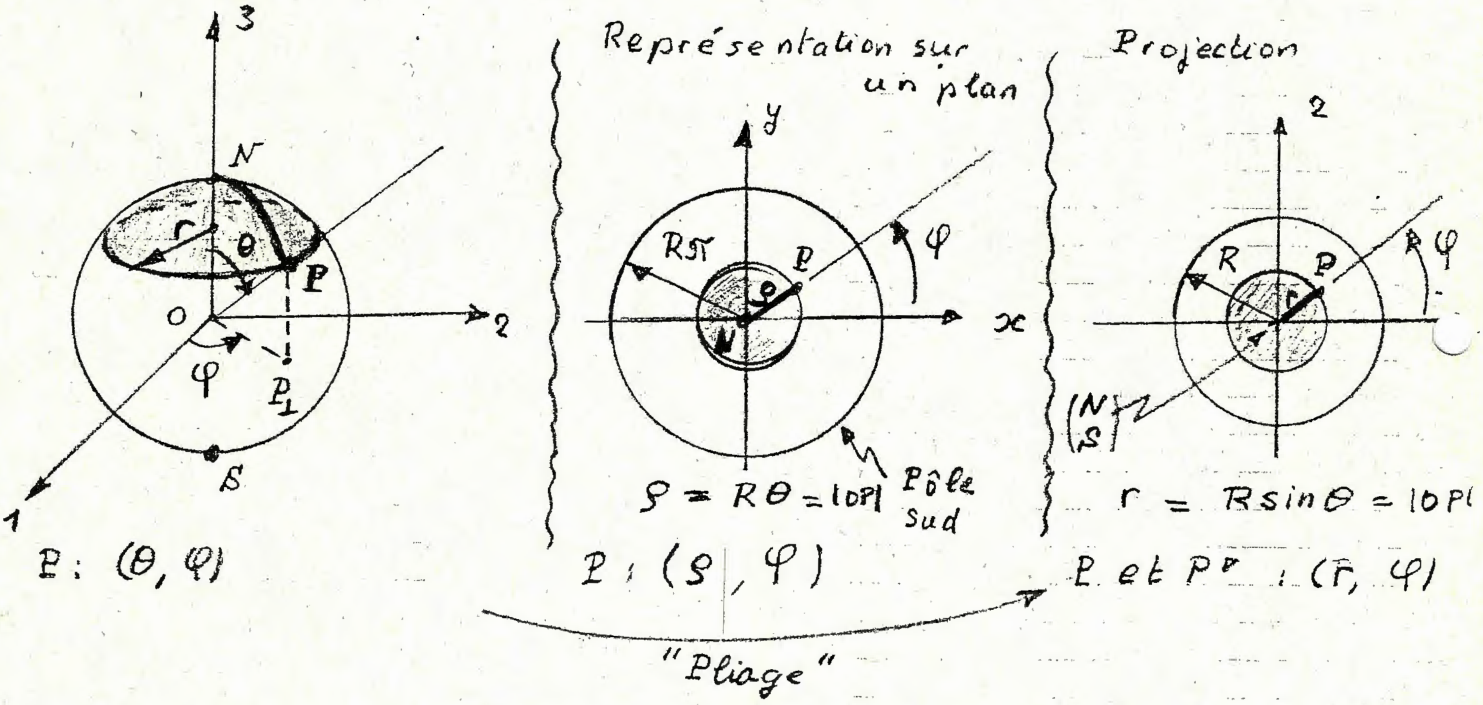
Sur la carte du pilote (t'', x'') la particule en chute libre atteint $-1/g$ à $t'' = \infty$ mais le temps propre de la particule sera fini

Série 6

Problème 18

On considère la sphère de rayon R fixé dans $\mathbb{R}^3$, paramétrisée par les coordonnées sphériques

$$(x^1, x^2) = (\theta, \varphi) \quad , \quad \theta \in [0, \pi] \quad , \quad \varphi \in [0, 2\pi[$$



Du problème ..., la métrique induite sur la sphère de rayon R est:

$$\boxed{d s^2 = R^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2)} \qquad (1)$$

De plus nous savons que le grand cercle $\varphi = \text{cte}$ défini une géodésique reliant N à P.

Si l'on introduit le changement de variable

$$\rho = R\theta$$

la métrique devient

$$\boxed{d s^2 = d\rho^2 + R^2 \sin^2\left(\frac{\rho}{R}\right) d\varphi^2} \qquad \rho \in [0, \pi R] \qquad (2)$$

⚠ Tous les points sur le cercle $\rho = R\pi$ doivent être identifiés au "Pôle Sud".

1) Au <u>voisinage du Pôle Nord</u> :

$$d\rho^2 = d\varrho^2 + [\varrho^2 + O(\varrho^4)]\, d\varphi^2$$

$$\Rightarrow \boxed{d\rho^2 \simeq d\varrho^2 + \varrho^2\, d\varphi^2}$$

ce qui correspond à la métrique euclidienne du plan $\mathbb{R}^2$, avec les coordonnées polaires (ϱ, φ)

2) Soit le <u>θ_0-cercle</u>, c.à d. la courbe définie par $\theta = \theta_0 = cte$.

• La <u>distance</u> de N à un point P du θ_0-cercle est la longueur de la géodésique de N à P (c.à d. sur le grand cercle).

$$\varrho(\theta_0) = \int_{\substack{\text{géodésique} \\ \text{de } N \text{ à } P}} d\rho = \int_{\varphi = cte} d\rho = \int_0^{\theta_0} R\, d\theta$$

$\Rightarrow$ $\varrho(\theta_0) = R\theta_0$: Ainsi le θ_0-cercle est un cercle de <u>rayon propre</u> $\varrho(\theta_0) = R \cdot \theta_0$; ce rayon croît de façon monotone de 0 à $R\pi$.

<u>Remarque</u>

Sur une variété riemannienne munie de la métrique $d\rho^2 = g_{ij}(x)\, dx^i dx^j$, la <u>distance</u> entre deux points P et Q est définie par

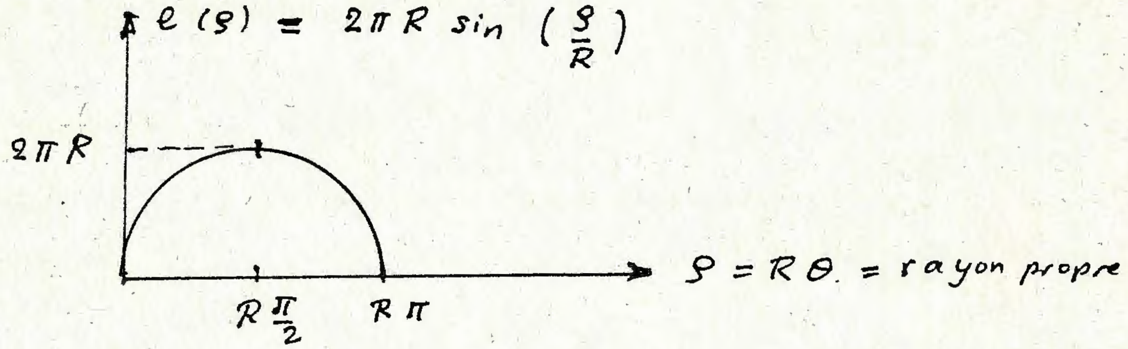
$$d(P, Q) = \inf_{\gamma \in \Gamma_{PQ}} \int_\gamma d\rho$$

où Γ_{PQ} = ensemble des géodésiques reliant P à Q.

- La <u>longueur</u> du θ_0-cercle est donnée par

$$\ell(\theta_0) = \int_{\theta=\theta_0} d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \; R \sin\theta_0 = \underline{\underline{2\pi R \sin\theta_0}}$$

La longueur du θ_0-cercle <u>croît</u> entre $\theta_0 = 0$ et $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ de 0 à $2\pi R$; elle <u>décroît</u> entre $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\theta_0 = \pi$ de $2\pi R$ à 0.



- <u>Surface</u> du θ_0-disque

L'élément de surface $d\sigma$ sur la sphère est donné par.

$$d\sigma = \sqrt{g}\; d\theta\, d\varphi = R^2 \sin\theta \, d\theta\, d\varphi$$

où g est le déterminant de la métrique.

Par conséquent la surface $\sigma(\theta_0)$ du θ_0-disque est

$$\sigma(\theta_0) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta_0} d\theta \; R^2 \sin^2\theta_0 = \underline{2\pi R^2 (1 - \cos\theta_0)}$$

$$= 2\pi R^2 \left(1 - \cos\frac{\rho}{R}\right)$$

La surface du θ_0-disque augmente de façon monotone entre 0 et $4\pi R^2$

<u>Remarque</u>:

Si l'on considère le changement de variables

$$\theta \longmapsto r = R \sin\theta \qquad 0 \leq r \leq R$$

on a : $$dr = R \cos\theta \, d\theta$$

$$= R\sqrt{1 - \sin^2\theta}\; d\theta = R\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}\; d\theta$$

d'où $\quad d s^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2$

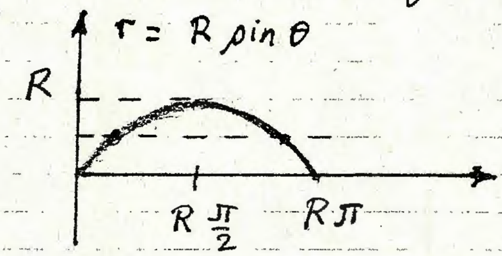
$$\Rightarrow \quad \boxed{d s^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{R^2}} + r^2 d\varphi^2} \qquad r \in [0, R] \qquad (3)$$

⚠

- Il n'y a pas de "singularité" en $r = R$ sur la sphère.
- Le rayon propre du r-cercle est $\varrho = R \arcsin\left(\frac{r}{R}\right)$

  La longueur du r-cercle est $\ell = 2\pi r$

- Etant donné le plan $\mathbb{R}^2$ en coordonnées polaire (r, φ) muni de la métrique (3), on peut alors se représenter cette métrique par la métrique euclidienne sur la $\frac{1}{2}$-sphère de rayon R dans $\mathbb{R}^3$.
- Pour r fixé il y aura deux points P et P' sur la sphère de rayon R dans $\mathbb{R}^3$.



$\varrho = R\theta =$ rayon propre

3 - Courbure de Gauss.

Le rayon propre du θ_0-cercle est $\varrho = R\theta_0$

- $$K = \lim_{\varrho \to 0} \left[\frac{3}{\pi} \frac{2\pi\varrho - \ell(\varrho)}{\varrho^3} \right] = \lim_{\varrho \to 0} \left[\frac{3}{\pi} \frac{2\pi\varrho - 2\pi R \sin\left(\frac{\varrho}{R}\right)}{\varrho^3} \right]$$

$$= \lim_{\varrho \to 0} \left[\frac{3}{\pi} \frac{2\pi\varrho - 2\pi R \left(\frac{\varrho}{R} - \frac{1}{6} \frac{\varrho^3}{R^3} + \dots \right)}{\varrho^3} \right] = \underline{\underline{\frac{1}{R^2}}}$$

- $$K = \lim_{\varrho \to 0} \left[\frac{12}{\pi} \frac{\pi\varrho^2 - \sigma(\varrho)}{\varrho^4} \right] = \lim_{\varrho \to 0} \left[\frac{12}{\pi} \frac{\pi\varrho^2 - 2\pi R^2 \left(1 - \cos\frac{\varrho}{R}\right)}{\varrho^4} \right]$$

$$= \lim_{\varrho \to 0} \left[\frac{12}{\pi} \frac{\pi\varrho^2 - 2\pi R^2 \left(\frac{1}{2} \frac{\varrho^2}{R^2} - \frac{1}{24} \frac{\varrho^4}{R^4} + \dots \right)}{\varrho^4} \right] = \underline{\underline{\frac{1}{R^2}}}$$

Remarque

Ces formules permettent plus généralement de calculer la "courbure de Gauss" en un point d'une surface quelconque (En général cette courbure dépend du point choisi). Le comportement du terme de correction par rapport à la métrique euclidienne sera pour la longueur d'un cercle de rayon propre ρ proportionnel à ρ^3, et pour la surface du disque de rayon ρ proportionnel à ρ^4.