Série 7 : Propriétés géométriques - Conséquences physiques

Problème 20 "Horloge autour du monde"

On considère deux horloges atomiques, une sur terre, l'autre dans un avion, qui effectuent un mouvement circulaire autour de la Terre à l'altitude h dans le plan équatorial avec une vitesse v' par rapport à la Terre. Initialement, les deux horloges sont synchronisées et elles sont comparées après un tour. Calculer la différence relative entre les temps indiqués par les deux horloges, soit $\delta = (\tau_{av.} - \tau_{terre})/\tau_{terre}$.

Application numérique :

Ω	=	vitesse de rotation de la Terre = $7{,}29 \cdot 10^{-5}$ s^{-1}
R	=	rayon de la Terre = $6{,}37 \cdot 10^{6}$ m
g	=	$GM/R^2 = 9{,}81$ m s^{-2}
h	=	10^4 m
v '	=	± 300 m s^{-1}.

Indication :

La métrique $g_{\mu\nu}(x)$ au voisinage de la Terre est la métrique de Schwarzschild, donnée en coordonnées sphériques par :

$$c^2\, d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2\, dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 \left[d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right]$$

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Référence : J. C. Hafeley et R.E. Keating, Science, **177**, 966 (1972).

RELATIVITE ET COSMOLOGIE **14 mars 2000**

Série 7 : Propriétés géométriques et transport parallèle

Problème 21

On considère l'espace à 3-dimensions muni de la métrique

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2$$

Calculer
- le rayon propre de la r-sphère, soit $\rho = \rho\,(r)$
- l'aire de la r-sphère de rayon propre ρ, soit $\sigma = \sigma\,(\rho)$
- le volume de la r-sphère de rayon propre ρ.

Comment varient ces grandeurs en fonction de ρ. Vérifier que pour $K > 0$, l'espace est borné. Comparer avec le problème 19.

Problème 22

Calculer en coordonnées polaires, cylindriques et sphériques le gradient, la divergence, le rotationnel et le laplacien en utilisant les formules données au cours.

Comparer avec les formules de "1ère année".

Problème 23

Ayant trouvé la connection affine pour un cône d'angle au sommet α (cf. problème 16), effectuer le transport parallèle d'un vecteur de la position initiale (ρ_o, ϕ_o) à la position finale $(\rho_o, \phi_o + 2\pi)$.
Est-ce que le transport dépend du chemin choisi pour effectuer le transport ?

Problème 24

On considère la sphère de rayon R de l'espace à 3 dimensions. (cf. problème).
Effectuer le transport parallèle d'un vecteur le long du cercle $\theta = \theta_o =$ cte.

Rappel :

$$\int dx \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \text{arg sh } x$$

$$\int dx \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin } x$$

$$\int dx \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\, x \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\, \text{arg sh } x$$

$$\int dx \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\, x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\, \text{arc sin } x$$

RELATIVITE GENERALE ET COSMOLOGIE

Professeur: W.Amrein
Assistant: S.Bossoney

March 28, 2000

Corrigé série 7:

Problème 21

a)Rayon propre de la r-sphère

$$\rho(r) = \int_{\text{géodésique } d\theta=0,\, d\varphi=0} ds = \int_0^r \frac{du}{\sqrt{1-Ku^2}}$$

Donc:

$$\begin{aligned}
\rho(r) =& \frac{1}{\sqrt{K}} arcsin(\sqrt{K}r) && K > 0 \\
=& r && K = 0 \\
=& \frac{1}{\sqrt{|K|}} argsh(\sqrt{|K|}r) && K < 0
\end{aligned}$$

et ainsi:

$$\begin{aligned}
r(\rho) =& \frac{1}{\sqrt{K}} sin(\sqrt{K}\rho) && K > 0 \\
=& \rho && K = 0 \\
=& \frac{1}{\sqrt{|K|}} sh(\sqrt{|K|}\rho) && K < 0
\end{aligned}$$

Pour $K > 0 : r \in [0, \frac{1}{\sqrt{K}}]$, et le rayon propre augmente de façon monotone jusqu'à $\frac{\pi}{2\sqrt{K}}$. Dans ce cas l'espace est borné et possède un bord, soit $r = \frac{1}{\sqrt{K}}$.
b)Aire de la r-sphère La métrique associée à la r-sphère est:

$$ds^2 = r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2)$$

et l'élément de surface associé est:

$$d\sigma = \sqrt{g_{(2)}} d\theta d\varphi = r^2 sin\theta d\theta d\varphi$$

d'où l'aire de la sphère:

$$\sigma(r) = r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} sin\theta d\theta = 4\pi r^2$$

Exprimé en terme de rayon propre cela donne

$$\begin{aligned}\sigma(\rho) =& \frac{4\pi}{K} sin^2(\sqrt{K}\rho) && K > 0\\ =& 4\pi\rho^2 && K = 0\\ =& \frac{4\pi}{|K|} sh^2(\sqrt{|K|}\rho) && K < 0\end{aligned}$$

c) Volume de la r-sphère L'élément de volume est donné par:

$$dV = \sqrt{g} dr d\theta d\varphi = \frac{r^2 sin\theta}{\sqrt{1-Kr^2}} dr d\theta d\varphi$$

Donc le volume de la r-sphère est:

$$V(r) = \int_0^r du \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \frac{u^2 sin\theta}{\sqrt{1-Ku^2}} = 4\pi \int_0^r du \frac{u^2}{\sqrt{1-Ku^2}}$$

Effectuons le changement de variable $x = \sqrt{|K|}r$ et intégrons par partie. On obtient:

$$\begin{aligned}V(r) =& \frac{4}{K^{3/2}}[-\frac{\sqrt{K}}{2} r\sqrt{1-Kr^2} + \frac{1}{2} arcsin(\sqrt{K}r)] && K > 0\\ =& \frac{4}{3}\pi r^3 && K = 0\\ =& \frac{4}{|K|^{\frac{3}{2}}}[\frac{\sqrt{|K|}}{2} r\sqrt{1-Kr^2} - \frac{1}{2} argsh(\sqrt{|K|}r)] && K < 0\end{aligned}$$

Ce que l'on peut exprimer en termes du rayon propre ρ:

$$\begin{aligned}V(\rho) =& \frac{2\pi}{K}\rho - \frac{\pi}{K^{3/2}} sin(2\sqrt{K}\rho) && K > 0\\ =& \frac{4}{3}\pi\rho^3 && K = 0\\ =& -\frac{2\pi}{|K|}\rho + \frac{\pi}{|K|^{3/2}} sh(2\sqrt{|K|}\rho) && K < 0\end{aligned}$$

Conclusion:
Pour $K = 0$: On a la sphère de rayon propre $\rho = r$.
Pour $K < 0$: L'espace est non borné, $r(\rho)$, $\sigma(\rho)$, et $V(\rho)$ croissent de façon monotone avec $\rho \in [0, \infty($
Pour $K > 0$: L'espace est borné $r \in [0, \frac{1}{\sqrt{K}}]$.

Problème 22

Remarque générale:
Les vecteurs sont à priori exprimés dans la base naturelle non-normée $\{\vec{e}_j\}$. Pour se ramener aux expressions usuelles du gradient qui sont exprimées dans une base orthonormée, il est nécessaire de poser:

$\boxed{\hat{e}_j = \frac{1}{\sqrt{g_{jj}}}\vec{e}_j}$ et donc $V = V^j\vec{e}_j = \hat{V}^j\hat{e}_j = \hat{V}_j\hat{e}^j \Rightarrow \boxed{\hat{V}_j = \frac{1}{\sqrt{g_{jj}}}V_j}$

Coordonnées sphériques:
a) Gradient d'une fonction scalaire f: $(\vec{grad}f)_i = \nabla_i f = \partial_i f$

$\boxed{\vec{grad}f = (\partial_r f, \partial_\theta f, \partial_\varphi f)}$

Dans une base orthonormée on aurait, vu la remarque générale:

$$\boxed{\hat{grad} f = (\partial_r f, \frac{1}{r}\partial_\theta f, \frac{1}{rsin\theta}\partial_\varphi f)}$$

b) Divergeance d'un champ vectoriel: $divV = \nabla_i V^i = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i(\sqrt{g}V^i)$, où $g = detg_{ij} = r^4 sin^2\theta$, donc:

$$\boxed{divV = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 V^r) + \frac{1}{sin\theta}\partial_\theta(sin\theta V^\theta) + \partial_\varphi V^\varphi}$$

c) Rotationnel d'un champ vectoriel: $(rotV)_{ij} = \nabla_i V_j - \nabla_j V_i = \partial_i V_j - \partial_j V_i$ et en particulier à trois dimensions: $(rotV)^i = \frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{ijk}\partial_j V_k$, donc:

$$\boxed{rotV = \frac{1}{r^2 sin\theta}(\partial_\theta V_\varphi - \partial_\varphi V_\theta, \partial_\varphi V_r - \partial_r V_\varphi, \partial_r V_\theta - \partial_\theta V_r)}$$

d) Laplacien d'un champ scalaire f: $\Delta f = \nabla_i \nabla^i f = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_j(\sqrt{g}\partial^j f)$

Attention! $\partial^j = g^{ji}\partial_i$

$$\boxed{\Delta f = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r f) + \frac{1}{sin\theta}\partial_\theta(sin\theta\partial_\theta f) + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\partial^2_\varphi f}$$

Le lecteur passera d'agréables moments à faire des calculs similaires pour les coordonnées polaires et cylindriques.

Problème 23

Le cône est paramétrisé par:

$$\begin{aligned} x &= \rho cos\varphi \\ y &= \rho sin\varphi \\ z &= \rho cotg\alpha \end{aligned}$$

la métrique est alors donnée par: $ds^2 = \left(1 + (cotg\alpha)^2\right) d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$.

<u>Connexion affine:</u>

$$\begin{array}{lll} \Gamma^\rho_{\rho\rho} = 0; & \Gamma^\rho_{\rho\varphi} = 0; & \Gamma^\rho_{\varphi\varphi} = -\rho sin^2\alpha \\ \Gamma^\rho_{\varphi\varphi} = 0; & \Gamma^\varphi_{\rho\varphi} = \frac{1}{\rho}; & \Gamma^\varphi_{\varphi\varphi} = 0 \end{array}$$

L'équation des géodésiques est ainsi donnée par:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2}\rho - \rho sin^2\alpha \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 &= 0 \\ \frac{d^2}{ds^2}\varphi + \frac{2}{\rho}\left(\frac{d\rho}{ds}\right)\left(\frac{d\varphi}{ds}\right) &= 0 \Leftrightarrow \rho^2\frac{d\varphi}{ds} = \text{cste} \end{aligned}$$

<u>Transport parallèle:</u>

$\frac{dA^i}{ds} + \Gamma^i_{jk}A^j\frac{dx^k}{ds} = 0$ pour le vecteur (A^ρ, A^φ), c.à.d.:

$$\begin{aligned} \frac{dA^\rho}{ds} &= \rho sin^2\alpha A^\varphi \frac{d\varphi}{ds} \\ \frac{dA^\varphi}{ds} &= -\frac{1}{\rho}A^\rho\frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{\rho}A^\varphi\frac{d\rho}{ds} \end{aligned}$$

où $(\rho(s), \varphi(s))$ est un chemin avec $(\rho_0, \varphi_0) = (\rho(0), \varphi(0))$. Nous avons ainsi:

$$dA^\rho = \rho sin^2\alpha A^\varphi d\varphi \tag{1}$$

$$dA^\varphi = -\frac{1}{\rho}A^\rho d\varphi - \frac{1}{\rho}a^\varphi d\rho \tag{2}$$

d'où $\frac{dA^\rho}{d\rho} = 0$ c.à,d, $A^\rho = A^\rho(\varphi)$ et

$$\frac{\partial A^\rho}{d\varphi} = \rho sin^2\alpha A^\varphi \Rightarrow A^\varphi = \frac{1}{\rho}f(\varphi) \tag{3}$$

$$\frac{\partial A^\rho}{\partial\varphi} = sin^2\alpha f(\varphi) \tag{4}$$

$(2) \Rightarrow \partial_\varphi A^\varphi = -\frac{1}{\rho}A^\rho \overset{(4)}{\Rightarrow} \partial^2_\varphi A^\varphi = -\frac{1}{\rho}sin^\alpha f(\varphi) \overset{(3)}{\Rightarrow} \frac{d^2f}{d^2\varphi} = -sin^2\alpha f(\varphi)$, d'où $f(\varphi) = f(\varphi_0)cos[sin\alpha(\varphi-\varphi_0)] + \frac{f'(\varphi_0)}{sin\alpha}sin[sin\alpha(\varphi-\varphi_0)]$. Mais $(2),(3) \Rightarrow f'(\varphi) = -A^\rho$ et ainsi:

$$A^\varphi(\rho,\varphi) = \frac{\rho_0}{\rho}A^\varphi(\rho_0,\varphi_0)cos[sin\alpha(\varphi-\varphi_0)] - \frac{A^\rho(\rho_0,\varphi_0)}{\rho sin\alpha}sin[sin\alpha(\varphi-\varphi_0)]$$
$$A^\rho(\rho,\varphi) = sin\alpha\rho_0 A^\varphi(\rho_0,\varphi_0)sin[sin\alpha(\varphi-\varphi_0)] + A^\rho(\rho_0,\varphi_0)sin[sin\alpha(\varphi-\varphi_0)]$$

On voit que le transport est indépandant du chemin choisi. En particulier pour $\rho = \rho_0$ et $\varphi = \varphi_0 + 2\pi$, ce qui correspond à un tour autour du cône, on a:

$$A^\varphi = A^\varphi(0)cos[sin\alpha 2\pi] - \frac{A^\rho(0)}{\rho_0 sin\alpha}sin[sin\alpha 2\pi] \tag{5}$$

$$A^\rho = \rho_0 sin\alpha A^\varphi(0)sin[sin\alpha 2\pi] + A^\rho(0)cos[sin\alpha 2\pi] \tag{6}$$

Problème 24

D'après un problème précédant on a comme métrique sur la sphère (parametrisée par θ et φ):

$ds^2 = R^2d\theta^2 + R^2sin^2\theta d\varphi^2$
Ainsi on obtient pour la connexion affine:
Connexion affine:

$$\Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -cos\theta sin\theta \quad \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = cotg\theta$$

Transport parallèle:
$\frac{dA^i}{ds} = -\Gamma^i_{jk}A^j\frac{dx^k}{ds}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dA^\theta}{ds} = & sin\theta cos\theta A\varphi\frac{d\varphi}{ds} \\ \frac{dA^\varphi}{ds} = & -cotg\theta A^\theta\frac{d\varphi}{ds} - cotg\theta A^\varphi\frac{d\theta}{ds} \end{cases}$$

Transport le long du θ_0-cercle: $\theta = \theta_0$, $\varphi = \frac{1}{Rsin\theta_0}$

$$\begin{cases} \frac{dA^\theta}{ds} = & \frac{1}{R}cos\theta_0 A^\varphi \\ \frac{dA^\varphi}{ds} = & -\frac{1}{R}\frac{cos\theta_0}{sin^2\theta_0}A^\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2A^\theta}{ds^2} = & -\frac{1}{R^2}\frac{cos^2\theta_0}{sin^2\theta_0}A^\theta \\ \frac{d^2A^\varphi}{ds^2} = & -\frac{1}{R^2}\frac{cos^2\theta_0}{sin^2\theta_0}A^\varphi \end{cases}$$

Posons $\omega = \frac{1}{R}\frac{cos\theta_0}{sin\theta_0}$, $\omega s = \varphi cos\theta_0$.

$$A^\theta(\theta_0;s) = A^\theta(\theta_0;0)cos(\omega s) + \frac{dA^\theta}{ds}(\theta_0;0)\frac{1}{\omega}sin(\omega s)$$

$\boxed{A^\theta(\theta_0,\varphi) = A^\theta(\theta_0,0)cos[\varphi cos\theta_0] + A^\varphi(\theta_0;0)sin\theta_0 sin[\varphi cos\theta_0]}$ D'autre part:

$$A^\varphi(\theta_0;s) = A^\varphi(\theta_0,0)cos(\omega s) + \frac{dA^\varphi(\theta_0,0)}{ds}\frac{1}{\omega}sin(\omega s)$$

d'où

$$\boxed{A^\varphi(\theta_0,\varphi) = A^\varphi(\theta_0,0)cos[\varphi cos\theta_0] - \frac{A^\theta(\theta_0,0)}{sin\theta_0}sin[\varphi cos\theta_0]}$$

Rotation de $\vec{A} = (A^\theta, A^\varphi)$ après un tour ($\varphi = 2\pi$):

$$\begin{cases} A^\theta(\theta_0,2\pi) = & A^\theta(\theta_0,0)cos[2\pi cos\theta_0] + A^\varphi(\theta_0,0)sin\theta_0 sin[2\pi cos\theta_0] \\ A^\varphi(\theta_0,2\pi) = & A^\varphi(\theta_0,0)cos[2\pi cos\theta_0] - \frac{A^\theta(\theta_0,0)}{sin\theta_0}cos[2\pi cos\theta_0] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} ||\vec{A}(\theta_0,2\pi)||^2 =& R^2(A^\theta)^2 + R^2 sin^2\theta_0(A^\varphi)^2 \\ =& ||\vec{A}(\theta_0,0)||^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\vec{A}(\theta_0,0),\vec{A}(\theta_0,2\pi)) =& R^2A^\theta(\theta_0,0)A^\theta(\theta_0,2\pi) + R^2sin^2\theta_0 A^\varphi(0)A^\varphi(2\pi) \\ =& cos[2\pi cos\theta_0]R^2[(A^\theta(0))^2 + sin^2\theta_0(A^\varphi(0))^2] \\ =& cos[2\pi cos\theta_0]||\vec{A}(0)||||\vec{A}(2\pi)|| \end{aligned}$$

Le vecteur $\vec{A}$ transporté le long du θ_0-cercle aura tourné d'un angle β aprs̀ un tour, où $\beta = cos[2\pi cos\theta_0]$. Dans le cas d'un grand cercle $\beta = 0$.

RELATIVITE GENERALE ET COSMOLOGIE

Professeur: W.Amrein
Assistant: S.Bossoney

March 21, 2000

Série 8:

Problème 25: Rayon de Bohr d'un atome gravitationnel

Le rayon de Bohr de l'atome d'hydrogène est obtenu en considérant classiquement le mouvement d'un électron dans le champ électromagnétique d'un proton, en imposant la règle de quantification de Bohr (moment cinétique = $n\hbar$, n un nombre naturel), puis en prenant $n = 1$. Par analogie, considérer un "atome gravitationel" formé de deux neutrons, en ne tenant compte que de la force gravitationnelle. Quel serait le rayon de Bohr?

Problème 26

Soit T un tenseur

$$\binom{0}{2} \tag{1}$$

sur une variété différentiable. Exprimer $(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) T$ en termes du tenseur de Riemann et du tenseur de torsion.

Applications:

a) Pour $F_{\mu\nu}$ antistmétrique $\left(F_{\mu\nu} = F_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(F_{\mu\nu} - F_\nu\mu)\right)$ montrer que, pour une connexion sans torsion,

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) F_{\rho\sigma} = \alpha \left[R^\tau_{\rho\mu\nu} F_{\sigma\tau} - R^\tau_{\sigma\mu\nu} F_{\rho\tau} \right] \tag{2}$$

($\alpha \in \mathbb{R}$ à déterminer).

b) Sur une variété riemannienne munie d'une connexion sans torsion, on a

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) g_{\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\sigma\rho\mu\nu} \tag{3}$$

Problème 27: Conséquences des relations de symétrie du tenseur de Riemann

On considère une variété riemannienne de dimension n. Le tenseur de Riemann $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ satisfait les relations de symétrie (0.30) – (0.32).

a) Quel est le tenseur de Riemann si $n = 1$.

b) Exprimer le tenseur de Riemann en termes du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ et du scalair de Ricci R si $n = 2$.

c) Pour $n = 3$, déterminer le nombre de composantes indépandantes du tenseur de Riemann, et l'exprimer en termes du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ et du tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$.

RELATIVITE GENERALE ET COSMOLOGIE

Professeur: W.Amrein
Assistant: S.Bossoney

April 11, 2000

Corrigé série 8:

Problème 25

Nous résolvons ce problème à la manière d'un problème à deux corps de la mécanique Newtonienne. Pour cela nous introduisons deux vecteurs de position $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ pour les deux corps. On a les deux équations différentielles:

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2\vec{x}_1}{dt^2} = & -m_1 m_2 G \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \\ m_2 \frac{d^2\vec{x}_2}{dt^2} = & m_1 m_2 G \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \end{cases}$$

On obtient ainsi

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2\vec{x}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2\vec{x}_2}{dt^2} & = 0 \\ \frac{d^2\vec{x}_2}{dt^2} - \frac{d^2\vec{x}_1}{dt^2} & = (m_1 + m_2) G \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \end{cases}$$

Introduisons alors:

- la masse totale $M = m_1 + m_2$
- la masse réduite $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$
- les vecteurs de centre de masse $\vec{x}_G$ et de distance relative $\vec{x} \overset{\text{def}}{=} \vec{x}_2 - \vec{x}_1$

Les équations deviennent alors:

$$\begin{cases} M \frac{d^2\vec{x}_G}{dt^2} & = 0 \\ \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} & = -MG \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \end{cases}$$

On en déduit le rayon pour un mouvement circulaire de fréquence ω:

$$r^3 = \frac{MG}{\omega^2}$$

On introduit maintenant la condition de quantification de Bohr $2m_1\omega(\frac{1}{2}r)^2 = n\hbar$ et on pose $n = 1$. On trouve alors:

$$r = \frac{4\hbar^2}{GMm_1^2},$$

ce qui nous donne pour le rayon de l'atome plusieurs années lumières!

Problème 26

Pour alléger les calculs nous allons les faire dans le système de coordonnées géodésiques, c'est-à-dire un système de coordonnées dans lequel la connexion affine est nulle (attention! cela ne veut pas dire que les dérivées partielles de la connexion sont nulles). On a alors par définition:

$$\begin{aligned}\nabla_\mu \nabla_\nu T_{\alpha\beta} &= T_{\alpha\beta,\nu,\mu} - \Gamma^\rho_{\alpha\nu,\mu} T_{\rho\beta} - \Gamma^\rho_{\beta\nu,\mu} T_{\alpha\rho} \\ \nabla_\nu \nabla_\mu T_{\alpha\beta} &= T_{\alpha\beta,\mu,\nu} - \Gamma^\rho_{\alpha\mu,\nu} T_{\rho\beta} - \Gamma^\rho_{\beta\mu,\nu} T_{\alpha\rho}\end{aligned}$$

Ainsi on a:

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) T_{\alpha\beta} = \left(\Gamma^\rho_{\alpha\mu,\nu} - \Gamma^\rho_{\alpha\nu,\mu}\right) T_{\rho\beta} + \left(\Gamma^\rho_{\beta\mu,\nu} - \Gamma^\rho_{\beta\nu,\mu}\right) T_{\alpha\rho}$$

Sachant que $R^\rho_{\alpha\nu\mu} = \Gamma^\rho_{\nu\alpha,\mu} - \Gamma^\rho_{\mu\alpha,\nu}$ et que $\tau^\rho_{\alpha\beta} = \Gamma^\rho_{\alpha\beta} - \Gamma^\rho_{\beta\alpha}$ on obtient:

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) T_{\alpha\beta} = \left(R^\rho_{\alpha\mu\nu} + \tau^\rho_{\alpha\mu,\nu} - \tau^\rho_{\alpha\nu,\mu}\right) T_{\rho\beta} + \left(R^\rho_{\beta\mu\nu} + \tau^\rho_{\beta\mu,\nu} - \tau^\rho_{\beta\nu,\mu}\right) T_{\alpha\rho}$$

Ceci, rappellons-nous, est vrai dans le système de coordonnées géodésique. Mais comme on a obtenu une égalité entre tenseurs elle doit être vraie en général.
a) En jouant avec les symétries de $R^\rho_{\alpha\nu\mu}$ et $F_{\alpha\beta}$ on trouve que la constante est égale à -1.
b) Trivial.

Problème 27

a) 0
b) Pour $n = 2$ on a qu'une seule composante du tenseur de Riemann indépendante. En effet en fixant les indices γ et δ on voit que $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ est une matrice 2×2 anti-synétrique. Il n'y a donc qu'un seul élément indépendant. Le même raisonnement s'applique si on fixe les deux premiers indices. Mais comme en plus le tenseur de Riemann est symétrique sous l'échange des deux premiers avec les deux derniers indices on a que $1 \times 1 = 1$ composante indépandante. Ainsi, si on trouve un tenseur à partir de $g_{\mu\nu}$ possèdant les mêmes symétries que $R_{\alpha\beta\gamma\beta}$ alors ce tenseur doit être à une fonction multiplicative près le tenseur de Riemann. Ainsi on sait que $R_{\alpha\beta\gamma\beta} \sim f(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma})$. En contractant tous les indices on voit que:

$$R = R^{\alpha\beta}_{\alpha\beta} = f(g^\alpha_\alpha g^\beta_\beta - g^\alpha_\beta g^\beta_\alpha) = f(4-2) = 2f$$

Ainsi: $\boxed{R_{\alpha\beta\gamma\beta} = \frac{R}{2}(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma})}$

c) Si $n = 3$ on voit qu'en suivant le même raisonnement que sous b), le tenseur de Riemann ne possède que six composantes indépendantes. En effet la relation $\circlearrowleft_{\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ ne nous donne pas de condition supplémentaire à trois dimensions. En effet, comme $n = 3$ et qu'on a quatre indices il se trouvera forcément un indice dans les trois derniers égale au premier. Sans restriction de généralitées on peut supposer que $\alpha = \delta$. Ainsi cette dernière condition de symétrie se réduit à: $0 = R_{\alpha\beta\gamma\alpha} + R_{\alpha\gamma\alpha\beta} \Leftrightarrow 0 = R_{\alpha\beta\gamma\alpha} + R_{\alpha\beta\alpha\gamma} \Leftrightarrow 0 = R_{\alpha\beta\gamma\alpha} - R_{\alpha\beta\gamma\alpha}$ qui est une relation de symétrie déjà connue. Le même raisonnement s'applique pour $n = 2$.
On a donc six composantes à déterminer. Or $R_{\mu\nu}$, à trois dimensions, possède justement six composantes indépendantes. Comme $R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu} = g^{\alpha\beta}R_{\beta\mu\alpha\nu}$ présente un système à six équations, il est clair qu'il doit être possible de retrouver le tenseur de Riemann à partir de $R_{\mu\nu}$ et de $g^{\alpha\beta}$. Cherchons donc le tenseur le plus général

construit à partir de $R_{\mu\nu}$ et de $g^{\alpha\beta}$ et possèdant les mêmes symétries que le tenseur de Riemann. On trouve:

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} \sim a(g_{\mu\lambda}R_{\nu\sigma} - g_{\nu\lambda}R_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}R_{\nu\lambda} + g_{\nu\sigma}R_{\nu\lambda}) + b(g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda})R$$

En contractant des indices, sachant qu'on doit retrouver le tenseur de Ricci et la courbure de Riemann, on trouve que $\boxed{a = 1}$ et que $\boxed{b = -\frac{1}{2}}$.

Remarque: On aurait pu encore introduire un terme $\sim$ $(R_{\mu\lambda}R_{\nu\sigma} - R_{\mu\sigma}R_{\nu\lambda})$ mais, ce terme étant qudratique en $R_{\mu\nu}$, on l'a laissé tombé par souci de simplicité. Aussi nous pouvons remarquer qu'en calculant la solution pour le tenseur de Riemann à partir de la formule générale utilisant la connexion on retrouve à trois dimensions la solution indiquée.

RELATIVITE GENERALE ET COSMOLOGIE

Professeur: W.Amrein
Assistant: S.Bossoney

April 4, 2000

Série 9:

Problème 28:

Considérer la connexion affine sur $\mathbb{R}^3$ dans un système de coordonnées cartésien qui prend la forme

$$\Gamma^k_{ij} = \epsilon_{ijk},$$

où ϵ est le tenseur totalement antisymétrique avec $\epsilon_{123} = 1$. Déterminer:
a) Les géodésiques
b) La torsion
c) Le tenseur de courbure

Problème 29:

Soit C une géodésique sur une variété Riemannienne munie de la connexion métrique. Montrer que, en paramétrisation affine, le scalaire $t^\mu t_\mu$ est constant le long de C (t^μ désigne le vecteur tangent à C).

Problème 30:

Quel serait le scalaire de Ricci R pour un univers ne contenant que de l'énergie électromagnétique ?

Problème 31:

Soit $\mathcal{M}$ une variété différentiable, $g_{\mu\nu}$ une métrique sur $\mathcal{M}$ et $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$ la connexion métrique associée. Si Φ est un champ scalaire sur $\mathcal{M}$, on pose $\hat{g}_{\mu\nu}(x) = \Phi(x)g_{\mu\nu}(x)$ (transformation conforme de la métrique).
i) Donner des conditions sur Φ pour que $\hat{g}_{\mu\nu}(x)$ soit à nouveau une métrique sur $\mathcal{M}$.
ii) Montrer que le produit scalaire (donc les angles) entre les vecteurs reste inchangé pour une telle transformation.
iii) Une <u>courbe nulle</u> sur une variété Riemannienne est définie par la condition que $t^\mu t_\mu = 0$ le long de cette courbe. Montrer que, si C est une courbe nulle pour la métrique $g_{\mu\nu}$, c'est également une courbe nulle pour la métrique $\hat{g}_{\mu\nu}$.
iv) Si C est une géodésique pour $g_{\mu\nu}$, est-ce que c'est également une géodésique pour $\hat{g}_{\mu\nu}$?

Problème 32: Equation de Newton comme équation géodésique

Considérer le problème suivant ainsi que sa solution:
Problème: Montrer que l'équation du mouvement pour une particule dans un potentiel gravitationnel Newtonien Φ peut-être écrite comme une équation géodésique dans un espace-temps quadridimensionnel. Calculer la connexion et le tenseur de Riemann et montrer qu'ils ne sont pas dérivables d'une métrique.
Solution: Les coordonnées préferées dans la théorie de Newton sont le "temps universel" t et des coordonnées spatiales galiléennes x^j $j = (1, 2, 3)$. L'équation du mouvement $\frac{d^2x^j(t)}{dt^2} = -\partial_j \Phi(\vec{x})$ peut être écrite en forme quadridimensionnelle (paramètre s)

$$\frac{d^2t}{ds^2} = 0; \qquad \frac{d^2x^j(s)}{ds^2} + \partial_j \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 0 \tag{1}$$

a) Terminer la solution: en interprétant (1) comme une équation géodésique, déterminer le connexion $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$ et le tenseur de Riemann $R^\rho_{\mu\nu\sigma}$. Supposer ensuite qu'il existe une métrique $g_{\mu\nu}$ et montrer que le tenseur de courbure $R_{\rho\mu\nu\sigma}$ ne possède pas toutes les propriétés de symétrie de la page 2.15.
b) Quelle est la faute conceptuelle dans cette solution?

Problème 33:

Soit $\mathcal{M}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ suivant:

$$\mathcal{M} = \{(\xi, \eta) | \xi^2 + \eta^2 = 1\} \cup \{(\xi, \eta) | \xi = 0, 1 < \eta < 2\}$$

Les points P de $\mathcal{M}$ peuvent être paramétrisés par:

$$\begin{array}{lrl} \text{points du cercle:} & (\sin 2\pi\beta, \cos 2\pi\beta) & 0 \leq \beta < 1 \\ \text{points du segment:} & (0, \beta) & 1 < \beta < 2 \end{array}$$

On peut introduire deux cartes globales $(\mathcal{M}, \varphi)$ et $(\mathcal{M}, \tilde{\varphi})$ avec $\Omega = \tilde{\Omega} = (-1, 1) \in \mathbb{R}$ par:

$$\varphi(P(\beta)) = \begin{cases} \beta & \text{si } 0 \leq \beta < 1 \\ 1 - \beta & \text{si } 1 < \beta < 2 \end{cases}$$

$$\tilde{\varphi}(P(\beta)) = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta = 0 \\ 1 - \beta & \text{si } \beta \neq 0 \end{cases}$$

Déterminer les coordonnées $\tilde{x}$ des points de $\mathcal{M}$ (dans la deuxième carte) comme fonction de coordonnées x dans la première carte. Est-ce que ces deux cartes sont "compatibles", en d'autres termes est-ce que ce changement de coordonnées est de classe C^∞ (ou au moins différentiable)?

RELATIVITE GENERALE ET COSMOLOGIE

Professeur: W.Amrein
Assistant: S.Bossoney

May 9, 2000

Corrigé série 9:

Problème 28

a) En paramétrisant les géodésiques par un paramètre affin on sait qu'elles doivent vérifier l'équation suivante:

$$w^\nu \nabla_\nu w^\mu = 0,$$

où $w^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$ et s est le paramètre affin. Ainsi on a:

$$\frac{dw^k}{ds} + \epsilon_{ijk} w^i w^j = 0. \tag{1}$$

Or ϵ_{ijk} est antisymétrique en i et j alors que $w^i w^j$ est symétrique en ces deux indices. Ainsi la somme sur ces deux indices dans (1) donne zéro. On se retrouve finalement avec l'équation suivante pour les géodésiques:

$$\frac{dw^k}{ds} = 0.$$

Ainsi les géodésiques sont données par:

$$x^k(s) = w^k(0)s + x^k(0).$$

b) La torsion est donnée par $\tau_{i\,j}^{\,k} = \Gamma_{[i\,j]}^{\,k}$. Pour des raisons de symétrie on trouve alors:

$$\tau_{i\,j}^{\,k} = 2\epsilon_{ijk}.$$

c) En reprenant la formule (0.24) du cours on obtient:

$$R^i_{\,jkl} = \sum_n (\epsilon_{kjn}\epsilon_{lni} - \epsilon_{ljn}\epsilon_{kni}) = \delta_{ki}\delta_{jl} - \delta_{li}\delta_{jk}.$$

Remarquons qu'on obtient ainsi $R_{lj} = -2\delta_{lj}$ et $R = -6$.

Problème 29

Si la géodésique est paramétrisée affinement on sait que $D_\tau t^\nu = t^\mu \nabla_\mu t^\nu = 0$. Ainsi on a le long de la géodésique C:

$$\frac{d(t^\mu t_\mu)}{d\tau} = D_\tau(t^\mu t_\mu) = (D_\tau t^\mu)t_\mu + t^\mu(D_\tau t_\mu) = 2(D_\tau t^\mu)t_\mu = 0.$$

Problème 30

Les équations d'Einstein nous disent que $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$. Ainsi $R = -\frac{8\pi G}{c^4}T$, où $T = T^\mu_{\ \mu}$.
Si l'univers ne contient que de l'énergie électro-magnétique alors le tenseur d'énergie-impulsion est $T_{\mu\nu} = \frac{1}{4}g_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\alpha\beta}\mathcal{F}_{\alpha\beta} - \mathcal{F}^\alpha_{\ \mu}\mathcal{F}_{\alpha\nu}$. Ainsi on voit que T et donc R sont nulles.

Problème 31

i) Pour que $\hat{g}_{\mu\nu}$ soit à nouveau une métrique il doit y avoir un inverse $\hat{g}^{\mu\nu}$. Bien sûr, les composantes de $\hat{g}_{\mu\nu}$ doivent être réelles. Ainsi si Φ est une fonction réelle qui ne s'annulle jamais on est bon.
ii) Soient deux vecteurs A^μ et B^ν. On définit l'angle θ entre les deux vecteurs comme étant $\cos(\theta) = \frac{A^\mu B^\nu g_{\mu\nu}}{\sqrt{A^\mu A^\nu g_{\mu\nu}}\sqrt{B^\mu B^\nu g_{\mu\nu}}}$. La nouvelle métrique donne $\cos(\theta) = \frac{\Phi A^\mu B^\nu g_{\mu\nu}}{\sqrt{\Phi A^\mu A^\nu g_{\mu\nu}}\sqrt{\Phi B^\mu B^\nu g_{\mu\nu}}}$, ce qui ne change donc pas les angles, à moins que Φ soit une fonction négative, auquel cas l'angle θ est augmenté de π.
iii) trivial.
iv) Si C est une géodésique pour $g_{\mu\nu}$ alors $D_\tau t^\mu = 0$. Mais la dérivée covariante dépand de $\Gamma_{\mu\ \nu}^{\ \alpha}$. Calculons donc la différence entre les deux connexions affines. Il vient:

$$\hat{\Gamma}_{\mu\ \nu}^{\ \alpha} - \Gamma_{\mu\ \nu}^{\ \alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(\log(\Phi)_{,\nu}g_{\beta\mu} + \log(\Phi)_{,\mu}g_{\beta\nu} - \log(\Phi)_{,\beta}g_{\mu\nu}\right).$$

Ainsi

$$\hat{D}_\tau t^\alpha = t^\nu\hat{\nabla}_\nu t^\alpha = t^\nu t^\mu \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(\log(\Phi)_{,\nu}g_{\beta\mu} + \log(\Phi)_{,\mu}g_{\beta\nu} - \log(\Phi)_{,\beta}g_{\mu\nu}\right) = t^\alpha\left(\log(\Phi)_{,\nu}t^\nu\right) - \frac{1}{2}\log(\Phi)^{,\alpha}t^\mu t_\mu$$

(où nous avons monté est descendu les indices avec la nouvelle métrique) qui n'est en général clairement pas proportionnel à t^α (à moins que $t^\mu t_\mu = 0$, auquel cas le paramètre qui était affin pour $g_{\mu\nu}$ ne l'est plus pour $\hat{g}_{\mu\nu}$). On voit donc qu'en général une géodésique pour $g_{\mu\nu}$ n'en est pas une pour $\hat{g}_{\mu\nu}$.

Problème 32

a) Si on interprète cette équation comme une équation géodésique alors il n'y a que les composantes $\Gamma_{0\ 0}^{\ j}$ de la connexion affine qui sont non-nulles. Elles valent

$$\Gamma_{0\ 0}^{\ j} = \partial_j\Phi.$$

Rappelons-nous que Φ ne dépend ici que des coordonnées spatiales. Si nous supposons que la connexion découle d'une métrique nous pouvons reprendre la formule (0.24) du cours pour calculer le tenseur de Riemann. Calculons par exemple les composantes $R^\rho_{\ 0\mu 0}$. Sachant que $\partial_0\Phi = 0$ et que $\Gamma_{\mu\ \nu}^{\ j} = 0$ si $\mu \neq 0$ et $\nu \neq 0$ il vient:

$$R^\rho_{\ 0\mu 0} = \partial^2_{\mu\rho}\Phi$$

Si nous calculons maintenant $R^0_{\ \rho\mu 0}$ à partir de la même formule il vient:

$$R^0_{\ \rho\mu 0} = 0,$$

ce qui viole évidemment l'antisymétrie sur les deux premiers indices du tenseur de Riemann.
b) Si l'on prend l'équation de Newton comme une équation des géodésiques il est

alors sous-entendu que le paramètre s est un paramètre affin. Nous pouvons sans autre l'interpréter comme étant le temps propre de la particule en chute libre. Mais alors l'équation $\frac{d^2t}{ds^2} = 0$ implique que le temps de coordonnée est, à une constante près qu'on peut renormer à un, égal au temps propre des particules en chute libre. Ceci a pour conséquence que toutes les géodésiques auront le même temps propre, ou encore, auront la même longueur. Ceci est clairement impossible.

Problème 33

Nous devons étudier la différentiabilité de la fonction $\tilde{\varphi}(\varphi^{-1}(\beta))$. Pour ce faire calculons $\varphi^{-1}(\beta)$. Remrquons que la fonction $\varphi(\beta)$ est définie sur $0 \leq \beta < 2$ et va sur l'intervalle $(-1, 1)$. $\varphi^{-1}(\beta)$ est donc définie sur $(-1, 1)$ et va sur $[0, 2)$:

$$\varphi^{-1}(\beta) = \begin{cases} \beta & \text{si } 0 \leq \beta < 1 \\ 2 - \beta & \text{si } -1 < \beta < 0 \end{cases}$$

Ainsi $\tilde{\varphi}(\varphi^{-1}(\beta))$ est définie sur $(-1, 1)$ et va sur $(-2, -1) \bigcup [0, 1)$:

$$\tilde{\varphi}(\varphi^{-1}(\beta)) = \begin{cases} \beta - 1 & \text{si } -1 < \beta < 0 \\ 0 & \text{si } \beta = 0 \\ 1 - \beta & \text{si } 0 < \beta < 1 \end{cases}$$

On voit donc que cette fonction est C^0 (en fait même C^∞) par morceaux seulement.

RELATIVITE GENERALE ET COSMOLOGIE

Professeur: W.Amrein
Assistant: S.Bossoney

April 25, 2000

Série 10:

Problème 34: Equation d'Einstein et équations du mouvement

Les équations du mouvement de la matière sont essentiellement contenues dans l'équation d'Einstein, comme on a su le démontrer dans les cas simples. L'équation d'Einstein (A.4) implique que $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$, et cette dernière relation contient de l'information essentielle concernant le mouvement de la matière. Par exemple il suit que la ligne d'univers d'un corps d'épreuve suffisamment petit est une géodésique. Pour un fluide parfait, la relation $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$ est équivalente aux équations de mouvement hydrodynamiques.
Dans cet exercice on montrera que les particules individuelles d'un flot de poussière suivent des géodésiques. On suppose que

$$T^{\mu\nu}(x) = \rho_0(x) w^\mu(x) w^\nu(x), \quad \text{avec } \nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0,$$

où $w^\mu(x) = \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau}$ est le vecteur tangent (quadri-vitesse) à la ligne d'univers $x^\mu(\tau)$ d'une particule au point x de l'espace-temps, avec τ le temps propre sur cette ligne d'univers.
a) Montrer que $w_\mu \nabla_\nu w^\mu = 0$.
b) Calculer $\nabla_\nu T^{\mu\nu}$ et $w_\mu \nabla_\nu T^{\mu\nu}$.
c) En utilisant l'équation $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$, déduire des formules obtenues dans b) que $\nabla_\nu(\rho_0 w^\nu) = 0$, puis l'équation géodésique $w^\nu \nabla_\nu w_\mu = 0$ pour la trajectoire d'une particule du flot.

Problème 35:

Démontrer la formule (A.21) du cours.

Problème 36: Dérivée de Lie

Soit $\mathcal{M}$ une variété différentiable munie d'une connexion sans torsion. Si A est un champ de vecteurs sur $\mathcal{M}$, la dérivée de Lie $\pounds_A$ par rapport à A associe à chaque tenseur T du type $\binom{p}{q}$ un autre tenseur $\pounds_A T$ du même type par les règles suivantes:

$$\begin{aligned}
\Phi \text{ champ scalaire} &: \pounds_A \Phi = A^\mu \nabla_\mu \Phi \\
B^\mu \text{ vecteur contravariant} &: \pounds_A B^\mu = A^\rho \nabla_\rho B^\mu - B^\rho \nabla_\rho A^\mu \\
B_\mu \text{ vecteur covariant} &: \pounds_A B_\mu = A^\rho \nabla_\rho B_\mu + B^\rho \nabla_\rho A_\mu \\
S_{\mu\nu} \text{ tenseur } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} &: \pounds_A S_{\mu\nu} = A^\rho \nabla_\rho S_{\mu\nu} + S_{\mu\rho} \nabla_\nu A^\rho + S_{\rho\nu} \nabla_\mu A^\rho
\end{aligned}$$

etc.
i) Vérifier p.ex. que $\pounds_A B^\mu = A^\rho \partial_\rho B^\mu - B^\rho \partial_\rho A^\mu$, c.-à-d. que la dérivée de Lie ne dépend pas de la connexion.
ii) Montrer que la dérivée de Lie satisfait la règle de Leibniz et commute avec la contraction (calculer p.ex. $\pounds_A B^\mu S_{\nu\rho}$ et $\pounds_A B^\mu S_{\nu\mu}$).

Problème 37: Vecteurs de Killing

Soit $\mathcal{M}$ une variété riemannienne, $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ la connexion métrique. Un vecteur de Killing K est un champ de vecteurs $K^\mu(x)$ tel que

$$\pounds_K g_{\mu\nu} = 0. \tag{1}$$

i) Montrer que (1) est équivalent à l'équation de Killing

$$\nabla_{(\mu} K_{\nu)} = \nabla_\mu K_\nu + \nabla_\nu K_\mu = 0 \tag{2}$$

ii) Toute combinaison linéaire à coéfficients constants de vecteurs de Killing est à nouveau un vecteur de Killing.
iii) Soit C une géodésique, $t^\mu = \frac{dx^\mu}{dp}$ le vecteur tangent à C (p étant un paramètre affin) et K un vecteur de Killing. Montrer que $t^\mu K_\mu$ est constant le long de C (indication: on peut utiliser la formule (A.21)).
Importance de ce résultat: $t^\mu K_\mu$ est une constante du mouvement pour les corps d'épreuve en chute libre.
iv) Montrer qu'une métrique est stationnaire si et seulement si il existe un vecteur de Killing du genre temps (c.-à-d. tel que $K^\mu K_\mu < 0$).
(Indications: $\Rightarrow$ prendre $K^\mu = \delta^\mu_0$ dans la carte où $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$; $\Leftarrow$ considérer des géodésiques avec $t^\mu = K^\mu$.)
v) Montrer que (2) implique la relation

$$\nabla_\mu \nabla_\nu K_\sigma = R^\rho_{\mu\sigma\nu} K_\rho. \tag{3}$$

vi) Quel est le nombre maximal possible de vecteurs de Killing linéairement indépendants sur une variété riemannienne de dimension n? (Indication: En vertu de (3), la donnée de K_μ et de ses premières dérivées $\partial_\mu K_\nu$ détermine toutes les dérivées d'ordre supérieur.)
vii) Sur une variété plate de dimension $n = 4$ ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$), trouver 10 vecteurs de Killing linéairement indépandants.

RELATIVITE GENERALE ET COSMOLOGIE

Professeur: W.Amrein
Assistant: S.Bossoney

May 16, 2000

Corrigé série 10:

Problème 34

a) Quelque soit la ligne d'univers $x^\alpha(\tau)$ d'une particule paramétrisée par son temps propre on a que $w^\mu w_\mu = -c^2$. En effet, considérons d'abord un S.C.I.L.. Il est alors clair que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ et que pour n'importe quelle transformation de Poincaré effectuée la métrique restera $\eta_{\mu\nu}$. On peut alors choisir la transformation de Lorentz qui transforme le vecteur w^α en $(1, 0, 0, 0)$. Dans ce système de coordonnées il est clair que $w^\mu w_\mu = -c^2$, et comme cette dernière égalité est une égalité tensorielle elle doit être vérifiée dans n'importe quel système de coordonnées.
Ensuite on a:

$$\begin{aligned} w_\mu \nabla_\nu w^\mu =& \frac{1}{2}\left(w_\mu \nabla_\nu w^\mu + w_\mu \nabla_\nu w^\mu\right) = \frac{1}{2}\left(w_\mu \nabla_\nu w^\mu + w^\mu \nabla_\nu w_\mu\right) \\ =& \frac{1}{2}\left(\nabla_\nu (w^\mu w_\nu)\right) = \frac{1}{2}\partial_\nu c^2 = 0 \end{aligned}$$

b) Utilisant que la divergeance de $T^{\mu\nu}$ est nulle on a:

$$0 = \nabla_\nu T^{\mu\nu} = \left(\rho_0(x) w^\nu(x)\right)_{;\nu} w^\mu + \rho_0(x) w^\nu(x) \left(w^\mu\right)_{;\nu} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} 0 =& w_\mu \nabla_\nu T^{\mu\nu} = w_\mu \left(\rho_0(x) w^\nu(x)\right)_{;\nu} w^\mu + w_\mu \rho_0(x) w^\nu(x) \left(w^\mu\right)_{;\nu} \\ \stackrel{a)}{=}& \left(\rho_0(x) w^\nu(x)\right)_{;\nu} c^2 + 0 \end{aligned} \tag{2}$$

c) L'équation (2) nous montre que $\left(\rho_0(x) w^\nu(x)\right)_{;\nu} = 0$. Insérant ceci dans (1) nous donne $\rho_0(x) w^\nu(x) \left(w^\mu\right)_{;\nu} = 0$ et donc que $w^\nu(x) \left(w^\mu\right)_{;\nu} = 0$, car $\rho_0(x)$ est bien sûr une fonction positive, montrant que dans ce cas simple $T^{\mu\nu}_{\ \ ;\nu} = 0$ implique que les particules de poussière suivent effectivement des géodésiques; d'où la self-consistence des équations d'Einstein.

Problème 35

$$\frac{d}{d\tau}\left(A^\mu(\tau) B_\mu(\tau)\right) = \frac{dA^\mu(\tau)}{d\tau} B_\mu(\tau) + A^\mu(\tau) \frac{dB_\mu(\tau)}{d\tau} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} D_\tau\left(A^\mu(\tau) B_\mu(\tau)\right) =& \frac{DA^\mu(\tau)}{D\tau} B_\mu(\tau) + A^\mu(\tau) \frac{DB_\mu(\tau)}{D\tau} \\ =& \frac{dA^\mu(\tau)}{d\tau} B_\mu(\tau) + A^\mu(\tau) \frac{dB_\mu(\tau)}{d\tau} \\ &+ \Gamma^{\ \mu}_{\alpha\ \beta} A^\alpha(\tau) \frac{dx^\beta(\tau)}{d\tau} B_\mu - \Gamma^{\ \alpha}_{\mu\ \beta} B_\alpha(\tau) \frac{dx^\beta(\tau)}{d\tau} A^\mu(\tau) \end{aligned} \tag{4}$$

On voit donc que (3) est égale à (4).

Problème 36

i) Par définition a:

$$\begin{aligned}\pounds_A B^\mu =& A^\rho \nabla_\rho B^\mu - B^\rho \nabla_\rho A^\mu \\ =& A^\rho \partial_\rho B^\mu - B^\rho \partial_\rho A^\mu \\ &+ \Gamma_{\rho\ \alpha}^{\ \mu} A^\rho B^\alpha - \Gamma_{\rho\ \alpha}^{\ \mu} A^\rho B^\alpha \\ =& A^\rho \partial_\rho B^\mu - B^\rho \partial_\rho A^\mu\end{aligned}$$

ii) Il est trivial de vérifier que la dérivée de Lie satisfait la règle de Leibnitz. Montrons qu'elle commute avec la contraction:

$$\pounds_A B^\mu S_{\nu\sigma} = A^\rho \nabla_\rho B^\mu S_{\nu\sigma} + B^\mu S_{\rho\sigma} \nabla_\nu A^\rho + B^\mu S_{\nu\rho} \nabla_\sigma A^\rho - B^\rho S_{\nu\sigma} \nabla_\rho A^\mu, \tag{5}$$

$$\pounds_A B^\mu S_{\nu\mu} = A^\rho \nabla_\rho B^\mu S_{\nu\mu} + B^\mu S^\rho_{\ \mu} \nabla_\nu A_\rho, \tag{6}$$

où nous avons utilisé la règle de Leibnitz pour obtenir le premier résultat. Contractons μ avec σ dans (5). On voit alors que le deuxième terme s'annulle avec le dernier et que le troisième terme est égal au deuxième terme dans (6).

Problème 37

i) On a:

$$0 = \pounds_K g_{\mu\nu} = K^\alpha \nabla_\alpha g_{\mu\nu} + g_{\alpha\nu} \nabla_\mu K^\alpha + g_{\mu\alpha} \nabla_\nu K^\alpha = \nabla_\mu K_\nu + \nabla_\nu K_\mu,$$

car la dérivée covariante de la métrique est nulle.
ii) Soient K et Q deux vecteurs de Killing. Alors si on pose $P = aK + bQ$ on a:

$$\begin{aligned}\pounds_P g_{\mu\nu} =& P^\alpha \nabla_\alpha g_{\mu\nu} + g_{\alpha\nu} \nabla_\mu P^\alpha + g_{\mu\alpha} \nabla_\nu P^\alpha \\ =& (aK + bQ)^\alpha \nabla_\alpha g_{\mu\nu} + g_{\alpha\nu} \nabla_\mu (aK + bQ)^\alpha + g_{\mu\alpha} \nabla_\nu (aK + bQ)^\alpha \\ =& a\pounds_K g_{\mu\nu} + b\pounds_Q g_{\mu\nu} = 0.\end{aligned}$$

iii) Calculons la variation de $t^\mu K_\mu$ le long de la courbe:

$$\begin{aligned}t^\mu \nabla_\mu t^\nu K_\nu =& (t^\mu \nabla_\mu t^\nu) K_\nu + t^\nu (t^\mu \nabla_\mu) K_\nu = t^\nu (t^\mu \nabla_\mu) K_\nu = -t^\nu (t^\mu \nabla_\nu K_\mu) = -t^\mu (t^\nu \nabla_\nu K_\mu) \\ =& -t^\nu \nabla_\nu t^\mu K_\mu = -t^\mu \nabla_\mu t^\nu K_\nu.\end{aligned}$$

Ainsi $t^\mu \nabla_\mu t^\nu K_\nu = 0$.
iv) Si la métrique est stationnaire on prend $K^\mu = \delta_0^\mu$ dans la carte où $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$. On a alors:

$$\begin{aligned}\pounds_K g_{\mu\nu} =& \delta_0^\alpha \nabla_\alpha g_{\mu\nu} + g_{\alpha\nu} \nabla_\mu \delta_0^\alpha + g_{\mu\alpha} \nabla_\nu \delta_0^\alpha \\ =& g_{\alpha\mu} \Gamma_{\nu\ \beta}^{\ \alpha} \delta_0^\beta + g_{\nu\alpha} \Gamma_{\mu\ \beta}^{\ \alpha} \delta_0^\beta \\ =& \frac{1}{2} g_{\alpha\mu} \left\{ g^{\alpha\sigma} (\partial_0 g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{0\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu 0}) \right\} + \frac{1}{2} g_{\nu\alpha} \left\{ g^{\alpha\sigma} (\partial_0 g_{\sigma\mu} + \partial_\mu g_{0\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu 0}) \right\} \\ =& \frac{1}{2} \delta_\mu^\sigma (\partial_\nu g_{0\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu 0}) + \frac{1}{2} \delta_\nu^\sigma (\partial_\mu g_{0\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu 0}) \\ =& \frac{1}{2} (\partial_\nu g_{0\mu} - \partial_\mu g_{\nu 0} + \partial_\mu g_{0\nu} - \partial_\nu g_{\mu 0}) = 0,\end{aligned}$$

ce qui montre que δ_0^μ est un vecteur de Killing.
Supposons maintenant qu'il existe un vecteur de Killing du genre temps. Alors il existe un système de coordonnées tel que $K^\mu = \delta_0^\mu$. Dans ce système de coordonnées la dérivée de Lie (qui, rappelone-le, ne dépend pas de la connexion) selon K^μ s'écrit:

$$0 = \pounds_K g_{\mu\nu} = \delta_0^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu} + g_{\alpha\nu} \partial_\mu \delta_0^\alpha + g_{\mu\alpha} \partial_\nu \delta_0^\alpha = \partial_0 g_{\mu\nu},$$

montrant que la métrique est stationnaire.
v) D'après la relation (0.31) du cours on a:

$$\begin{aligned}
0 =& \frac{1}{2}\left(R^{\rho}{}_{\mu\sigma\nu} + R^{\rho}{}_{\sigma\nu\mu} + R^{\rho}{}_{\nu\mu\sigma}\right) K_\rho \\
=& \frac{1}{2}\left(\nabla^2_{\sigma\nu}K_\mu - \nabla^2_{\nu\sigma}K_\mu + \nabla^2_{\nu\mu}K_\sigma - \nabla^2_{\mu\nu}K_\sigma + \nabla^2_{\mu\sigma}K_\nu - \nabla^2_{\sigma\mu}K_\nu\right) \\
\stackrel{37\ i)}{=}& \frac{1}{2}\left(\nabla^2_{\sigma\nu}K_\mu + \nabla^2_{\nu\mu}K_\sigma + \nabla^2_{\nu\mu}K_\sigma + \nabla^2_{\mu\sigma}K_\nu + \nabla^2_{\mu\sigma}K_\nu + \nabla^2_{\sigma\nu}K_\mu\right) \\
=& \nabla^2_{\sigma\nu}K_\mu + \nabla^2_{\nu\mu}K_\sigma + \nabla^2_{\mu\sigma}K_\nu .
\end{aligned}$$

De cette dernière équation on tire que:

$$\begin{aligned}
\nabla^2_{\mu\nu}K_\sigma =& \nabla^2_{\sigma\nu}K_\mu + \nabla^2_{\nu\mu}K_\sigma \\
\stackrel{37\ i)}{=}& \nabla^2_{\sigma\nu}K_\mu - \nabla^2_{\nu\sigma}K_\mu \\
=& R^{\rho}{}_{\mu\sigma\nu}K_\rho .
\end{aligned}$$

vi) Le dernier exercice montre qu'une fois qu'on possède la valeur d'un vecteur de Killing en un point et la valeur de sa première dérivée en ce même point, alors on connaît toutes les dérivées d'ordre suppérieure en ce point. Ainsi, par intégration, on trouve la valeur du vecteur de Killing en n'importe quel point. Le nombre de vecteurs de Killing linéairement indépendants est donc donné par le nombre de manières linéairement indépandantes de choisir en un point de l'espace-temps les valeurs de K_α et de $\nabla_\beta K_\alpha = -\nabla_\alpha K_\beta$. Il y a clairement $n + n(n-1)/2$ manières de le faire et donc au plus il y a $n + n(n-1)/2$ vecteurs de Killing linéairement indépandants pour une variété de dimensions n.
vii) Il existe une méthode générique pour trouver les vecteurs de Killing d'une variété $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ de dimension n: On commence par chercher toutes les isométries à un paramètre Φ_t. Les isométries à un paramètre sont des changements de coordonnées C^∞, inversibles qui satisfont la règle $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$ et qui laissent la métrique inchangée. Ensuite on applique une de ces isométries à un point de $\mathcal{M}$. On dérive le tout par rapport à t et on pose $t = 0$. On vérifie qu'on obtient un champ de Killing, le champ générateur de l'isométrie utilisée (cf. Robert M. Wald "General Relativity"). Pour l'espace de Minkowsky on a dix isométries correspondants aux "boosts" et aux rotations selon les trois directions de l'espace-temps, ainsi que les quatre translations spatio-temporelles. Prenons par exemple le "boost" le long de x_1. Le paramètre t est la rapidité. Après avoir appliqué ce boost à un point x^μ de l'espace-temps on trouve $(\cosh(t)x^0 + \sinh(t)x^1, \sinh(t)x^0 + \cosh(t)x^1, x^2, x^3)$. Après dérivation par rapport à t et évaluation en $t = 0$ on trouve $(x^1, x^0, 0, 0)$. On vérifie que ce vecteur K^α satisfait l'équation de Killing $\partial_\beta K_\alpha + \partial_\alpha K_\beta = 0$ si $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Les neuf autres vecteurs de Killing s'obtiennent en appliquant la même procédure avec les neuf autres isométries.

RELATIVITE GENERALE ET COSMOLOGIE

Professeur: W.Amrein
Assistant: S.Bossoney

May 9, 2000

Série 11:

Problème 38: Orbites circulaires dans l'univers de Schwarzschild

On considère une métrique de Schwarzschild extérieure donnée par (B.12) et des géodésiques avec $\theta = \frac{\pi}{2}$.
a) Montrer qu'il existe des géodésiques avec $r(\rho) = r_0$ =constante. Pour une telle courbe, exprimer $x^0(p)$ et $\varphi(p)$ en termes des constantes r_0, C et J.
Déterminer ensuite l'intervalle de temps de coordonnées Δx^0 nécessaire pour une révolution, ainsi que la distance (physique) parcourue pendant une révolution par le corps d'épreuve.
b) En écrivant la composante pour $\mu = 1$ de l'équation géodésique pour une orbite circulaire, montrer que

$$\frac{C^2}{J^2} = \frac{2(r_0 - r_s)}{r_0^3 r_s}$$

Applications:
i) Vérifier que Δx^0 pour une révolution est donnée par la formule

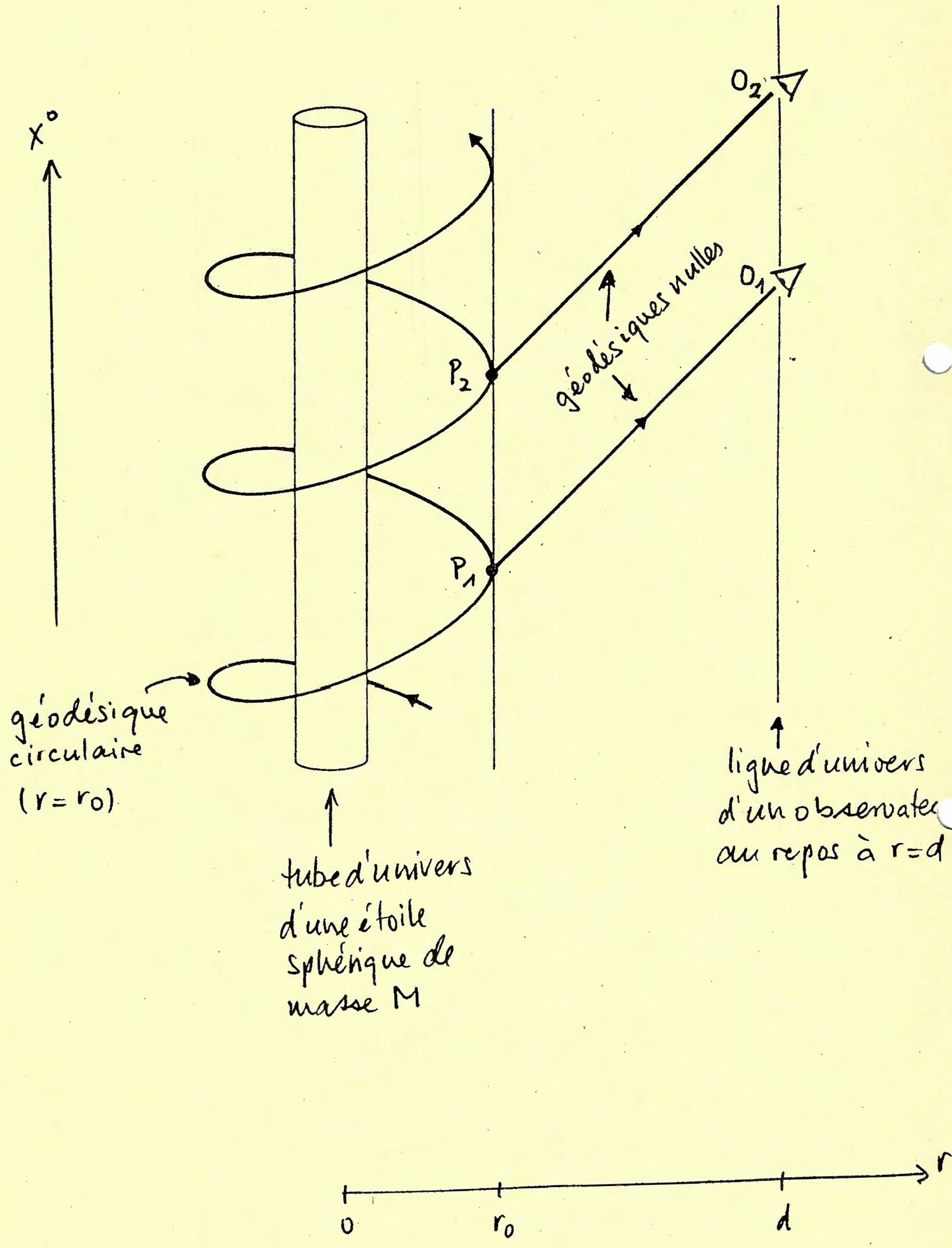
$$\Delta x^0 = 2\pi r_0 \sqrt{\frac{2r_0}{r_s}} \tag{1}$$

ii) Vérifier qu'on doit avoir $r_0 > \frac{3}{2} r_s$ (tenir compte de (4.17) et du fait que $E \geq 0$ et $c^2 > 0$).
iii) Dans le dessin qui suit (coordonnée verticale x^0, plan $\{x^0 = 0\}$ égal au plan $\{r, \varphi\}$), la géodésique est une hélice dont la projection sur le plan $\{x^0 = 0\}$ est un cercle de rayon r_0. Considérons un observateur au repos à $r = d$. Le temps de coordonnées $(\Delta x^0)_{\text{obs}}$ sur sa ligne d'univers correspondant à une révolution du corps d'épreuve (observation optique) est égal à Δx^0 donné par (1): $(\Delta x^0)_{\text{obs}} = \Delta x^0$ (c'est façile à vérifier en écrivant l'équation géodésique pour les photons entre P_1 et O_1 et entre P_2 et O_2 en utilisant le fait que la métrique est stationnaire: les géodésiques nulles dans le dessin sont parallèles).
a) Montrer que la durée d'une révolution, en temps propre τ de l'observateur, est

$$\Delta\tau = \frac{1}{c}\sqrt{1 - \frac{r_s}{d}}\Delta x_0.$$

b) Considérer le cas particulier où $r_0 = 2r_s$. Donner (en termes de r_s) la durée d'une révolution
1) pour un observateur au repos très loin ($d \to \infty$),
2) pour un observateur au repos à $d = r_0$,
3) pour un observateur voyageant avec le corps d'épreuve.

(3) pour un observateur voyagent avec le corps d'épreuve.



Problème 39: Terre ou soleil comme "trou noir"

Un "trou noir" est créé par exemple lors de l'effondrement gravitationnel d'un corps céleste, lorsque le rayon de ce corps devient égal (ou inférieur) à son rayon de Schwarzschild (ceci sera discuté au chapitre D su cours). Calculer la densité d'un trou noir dont la masse est celle de la Terre ou du Soleil.

Problème 40: Echo radar

Calculer, au premier ordre du rayon de Schwarzschild r_s, le temps de passage d'un signal radar entre une planète et la terre (paragraphe B.7.1 du cours). Plus spécifiquement:
a) Démontrer la formule (B.25) en calculant $\int_{r_0}^{r_T} \frac{dx^0}{dr} dr$, avec $\frac{dx^0}{dr}$ donné par (B.24).
b) Estimer l'ordre de grandeur du temps de retard pour la planète Mars (considérer les termes proportionnels à r_s pour un signal Terre-Mars-Terre). Donner le résultat en secondes et en kilomètres.

$$\begin{aligned}
R &= \text{rayon du Soleil} && = 7 \times 10^5 km \\
r_s &= \text{rayon du Schwarzschild du Soleil} && = 3 km \\
r_T &= \text{rayon de l'orbite de la Terre} && = 1,5 \times 10^8 km \\
r_M &= \text{rayon de l'orbite de Mars} && = 2.3 \times 10^8 km \\
c &= \text{vitesse de la lumière} && = 3. \times 10^5 km/s
\end{aligned}$$

RELATIVITE GENERALE ET COSMOLOGIE

Professeur: W.Amrein
Assistant: S.Bossoney

June 5, 2000

Corrigé série 11:

Problème 38

a) On prend les équations des géodésiques pour une métrique de Schwarzschild données au paragraphe B.4 du cours. Pour $\Theta = \frac{\pi}{2}$, $r = r_0$ =cste et $p = \tau$ on obtient:

$$\begin{cases} \mu = 0: & 0 = \frac{d^2x^0}{d\tau^2} \\ \mu = 1: & 0 = \frac{r_s}{2(1-\frac{r_s}{r_0})r_0^2}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 - r(1-\frac{r_s}{r_0})\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 \\ \mu = 2: & 0 = 0 \\ \mu = 3: & 0 = \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} \end{cases}.$$

Donc:

$$\begin{cases} \mu = 0 \Rightarrow & x^0(\tau) = \frac{dx^0}{d\tau}(0)\tau + x^0(0) \\ \mu = 3 \Rightarrow & \varphi(\tau) = \frac{d\varphi}{d\tau}(0)\tau + \varphi(0) \\ \mu = 1 \Rightarrow & \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = \frac{r_s}{2r^3}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 \end{cases}. \quad (1)$$

On voit donc qu'une géodésique peut avoir un cercle comme orbite spatiale. De plus, si on considère que $J = r^2\frac{d\varphi}{d\tau}$ et que $C = \frac{dx^0}{d\tau}(1 - \frac{r_s}{r_0})$ on obtient:

$$\begin{cases} x^0(\tau) = & \frac{C}{(1-\frac{r_s}{r})}\tau + x^0(0) \\ \varphi(\tau) = & \frac{J}{r^2}\tau + \varphi(0) \end{cases}.$$

Ainsi on peut calculer Δx^0 et la distance physique parcourue en une révolution:

$$\begin{aligned} \Delta x^0 = &\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{dx^0}{d\varphi} = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{Cr^2}{J(1-\frac{r_s}{r_0})} \\ =&\frac{2\pi C r^2}{J(1-\frac{r_s}{r_0})}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta l = &\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{dl}{d\varphi} = \int_0^{2\pi} d\varphi r \\ =&2\pi r. \end{aligned}$$

b)

$$(1) \Rightarrow \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = \frac{r_s}{2r_0^3}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 \Rightarrow \frac{\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2}{\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2} = \frac{2r_0^3}{r_s} = \frac{C^2}{(1-\frac{r_s}{r_0})^2}\frac{r_0^4}{J^2}$$

$$\Rightarrow \frac{C^2}{J^2} = \frac{2(r_0 - r_s)^2}{r_0^3 r_s} \qquad (2)$$

Applications:

i)

$$\Delta x^0 = \frac{C}{J}\frac{2\pi r_0^2}{(1-\frac{r_s}{r_0})} \stackrel{(2)}{=} \sqrt{\frac{2r_0}{r_s}}2\pi r_0$$

ii)

$$\begin{aligned} \text{B.18} \Rightarrow & 0 = C^2 - \frac{r_0 - r_s}{r_0}E - \frac{r_0 - r_s}{r_0^3}J^2 \\ \Rightarrow & E = \left(C^2 - \frac{r_0 - r_s}{r^3}J^2\right)\frac{r_0}{r_0 - r_s} \geq 0 \\ \Rightarrow & C^2 \geq \frac{r_0 - r_s}{r_0^3}J^2 \\ \stackrel{(2)}{\Rightarrow} & \frac{2(r_0 - r_s)^2)}{r_0^3 r_s} \geq \frac{r_0 - r_s}{r_0^3} \Rightarrow r_0 \geq \frac{3r_s}{2} \end{aligned}$$

iii) Le temps $(\Delta x^0)_{\text{obs}}$ est en effet le même car la métrique est statique et donc deux photons qui partent du même endroit spatial à un intervalle temporelle Δx^0 suiveront exactement les mêmes trajectoires spatiales séparées dans le temps par Δx^0.

a) L'observateur étant au repos on a:

$$\Delta\tau = \frac{1}{c}\int_{1\ \text{révolution}}\sqrt{g_{00}}dx^0 = \frac{1}{c}\sqrt{1-\frac{r_s}{d}}\Delta x^0.$$

b) Si $r_0 = 2r_s$ on a $\Delta x^0 = 4\pi r_0 = 8\pi r_s$.

1) $\Delta\tau = \frac{1}{c}8\pi r_s$.

2) $\Delta\tau = \sqrt{32}\frac{\pi r_s}{c}$.

3)

$$\Delta\tau = \int_{1\ \text{révolution}} d\tau = \int_{1\ \text{révolution}}\sqrt{-g_{00}(dx^0)^2 + r_0^2 d\varphi^2} = \int_{1\ \text{révolution}}\sqrt{(1-\frac{r_s}{r_0})(dx^0)^2 - r_0^2 d\varphi^2}$$

$$\stackrel{(1)}{=} \int_0^{2\pi} d\varphi\sqrt{(1-\frac{r_s}{r_0})\frac{2r_0^3}{r_s} - r_0^2} = \int_0^{2\pi} d\varphi r_0\sqrt{\frac{2r_0 - 3r_s}{r_s}} = 2\pi r_0\sqrt{\frac{2r_0 - 3r_s}{r_s}}.$$

Problème 39

On a $\rho(r) = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi r_s^3}$. Remarquons qu'avec cette définition de la densité on a:

$$M = \int \rho(r)r^2 dr d\theta d\varphi \neq \int \rho(r)dV \stackrel{\text{def}}{=} M_{\text{prop}},$$

car le véritable élément de volume infinitésimal serait $dV = \det(g_{(3)})drd\theta d\varphi$, où $g_{(3)}$ est la matrice obtenue avec les coefficiants spatiaux de $g_{\mu\nu}$, c.-à-d. g_{ij}. En fait M est la masse "Newtonienne". La différence $M_{\text{prop}} - M$ est interprètée comme l'énergie potentielle gravifique (en effet cette différence ne dépend que de la métrique qui "contient" la gravitation). On remarque que dans le cas d'un trou noir cette énergie est infinie!

Problème 40

a) D'après le cours nous devons calculer:

$$
\begin{aligned}
t_{r_0} - t_{r_T} =& \frac{1}{c}\int_{r_0}^{r_T} dx^0 = \frac{1}{c}\int_{r_0}^{r_T} \frac{dx^0}{dr}dr \\
=& \frac{1}{c}\sqrt{r_T^2 - r_0^2} + \frac{1}{c}\int_{r_0}^{r_T} dr r_s r^{1/2}\sqrt{\frac{r_0}{r^3 r_0 - r_0^3 r}} + \frac{1}{2cr_0}\int_{r_0}^{r_T} dr r_s r^{3/2}\sqrt{\frac{r_0}{r^3 r_0 - r_0^3 r}}\left(\frac{r_0 r^3 - r^4}{r^3 r_0 - r_0^3 r} - 1\right)
\end{aligned}
$$

Nous allons calculer les trois dernières intégrales en faisant les changements de variables indiqués dans le cours:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{c}\int_{r_0}^{r_T} dr r_s r^{1/2}\sqrt{\frac{r_0}{r^3 r_0 - r_0^3 r}} = \frac{1}{c}\int_1^{r_T/r_0} r_0 dy r_s r_0^{1/2} y^{1/2}\sqrt{\frac{r_0}{y^3 r_0^4 - r_0^4 y}} = \frac{r_s}{c}\int_1^{r_T/r_0} dy\frac{1}{\sqrt{y^2-1}} \\
=& \frac{r_s}{c}\int_0^{Arch(r_T/r_0)} dt = \frac{r_s}{c}Arch(r_T/r_0) = \frac{r_s}{c}\ln\left(\frac{r_T + \sqrt{r_T^2 - r_0^2}}{r_0}\right), \\
&\frac{1}{c}\frac{1}{2r_0}\int_{r_0}^{r_T} dr r_s r^{3/2}\sqrt{\frac{r_0}{r^3 r_0 - r_0^3 r}}\left(\frac{r_0 r^3 - r^4}{r^3 r_0 - r_0^3 r} - 1\right) \\
=& \frac{r_s}{2cr_0}\int_1^{r_T/r_0} r_0 dy\sqrt{\frac{r_0}{y^3 r_0^4 - r_0^4 y}}\left(r_0^{3/2}y^{3/2}\frac{r_0^4 y^3 - r_0^4}{r_0^4 y^3 - y r_0^4} - r_0^{3/2}y^{3/2}\right) = \frac{r_s}{2c}\int_1^{r_T/r_0} dy y^{3/2}\sqrt{\frac{1}{y^3-y}}\left(\frac{y^3-1}{y^3-y}\right) \\
=& \frac{r_s}{2c}\int_0^{Arch(r_T/r_0)} dt\, sht\frac{cht}{sht}\left(\frac{ch^3t - 1}{sh^2t \cdot ch(t)} - 1\right) = \frac{r_s}{2c}\int_0^{Arch(r_T/r_0)} dt\frac{cht-1}{sh^2t} = lim_{\delta\to 0}\frac{r_s}{2c}\left[ctht - \frac{1}{sht}\right]_\delta^{Arch(r_T)} \\
=& \frac{r_s}{2c}\sqrt{\frac{r_T - r_0}{r_T + r_0}}.
\end{aligned}
$$

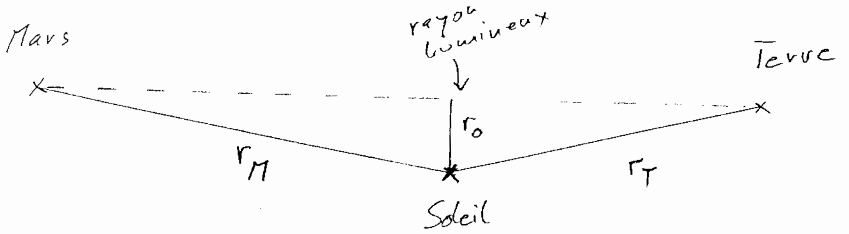
Nous retrouvons ainsi les résultats du cours.

b) Notons que r_0 est le rayon minimal du trajet qu'emprunte la lumière (voir dessin). Le temps prévu par une théorie classique serait donc $\Delta x^0 = \frac{1}{c}(\sqrt{r_M^2 - r_0^2} + \sqrt{r_T^2 - r_0^2})$. Les termes apparaissant ensuite sont donc les corrections dues à la théorie de la gravitation d'Einstein (retard de l'echo radar). On voit d'après l'équation que ce retard sera maximal si le rayon r_0 est le plus petit possible. On va donc prendre la situation où l'echo radar frole le Soleil ($r_0 = R_\odot$). On obtient:

$$
\Delta x^0_{\text{ret}} = 2\left(\Delta x^0_{\text{ret.T-S}} + \Delta x^0_{\text{ret S-M}}\right) = 0.000131\text{sec} + 0.000140\text{sec} = 0.000271\text{sec}..
$$

Si l'on donne ce r'esultat en kilomètres on trouve: 81.3 km.

Remarque: Pour trouver le temps de retard mesuré sur la terre il faudrait multiplier Δx^0_{ret} par $\sqrt{g_{00}(r_T)}$. Mais cette valeur est égale à $\sqrt{1 - 0.00000002}$, et donc complètement négligeable.



RELATIVITE GENERALE ET COSMOLOGIE

Professeur: W.Amrein
Assistant: S.Bossoney

May 23, 2000

Série 12:

Problème 41: Collision de deux trous noirs

La surface Ω_s de l'horizon d'un trou noir de Schwarzschild (masse M) est

$$\Omega_s = 4\pi r_s^2 = 16\pi \frac{M^2G^2}{c^4}. \tag{1}$$

a) A partir de la métrique de Kerr (D.4), montrer que la surface Ω_k de l'horizon extérieur ($r = r_+$) d'un trou noir de Kerr (masse M) est

$$\Omega_k 4\pi(r_+^2 + a^2) = 8\pi \frac{MG}{c^2} \left\{ \frac{MG}{c^2} + \sqrt{\frac{M^2G^2}{c^4} - a^2} \right\}. \tag{2}$$

Discuter la relation entre (1) et (2).

b) Dans une collision entre deux trous noirs, la surface totale de l'horizon ne peut pas diminuer (théorème de Hawking). Supposons que deux trous noirs de Kerr, chacun de masse M et avec des paramètres a opposés (c. à d. $a_2 = -a_1$), de sorte que le moment cinétique total du système est nul, entrent en collision et forment finalement un trou noir de Schwarzschild de masse M_s. En utilisant le théorème de Hawking et les équations (1) et (2), déterminer la fraction maximale de la masse originale $2M$ qui peut être transformée en rayonnement lors d'une telle collision.

Problème 42: Effet de la rotation d'un trou noir sur un corps d'épreuve

Un corps d'épreuve se déplaçant vers un trou noir en rotation obtient un moment cinétique supplémentaire, il est entraîné par la rotation du corps central. Nous montrerons que, dans la métrique de Kerr, il n'y a pas de géodésiques radiales (sauf dans des situations exceptionnelles).

a) Dans les coordonnées $x^\mu = (x^0, r, \theta, \varphi)$, déterminer les fonctions $g_{\mu\nu}$ dans le lagrangien $\mathcal{L} = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$ de la métrique de Kerr (D.25).

b) Observer que les $g_{\mu\nu}$ ne contiennent pas les variables x^0 et φ. Par conséquant l'équation d'Euler-Lagrange pour $x^\sigma = x^0$ et pour $x^\sigma = \varphi$ peut être intégrée, et on obtient un système d'équations pour $\dot{x}^0$ et $\dot{\varphi}$ contenant deux constantes d'intégration (qu'on désignera par C et L). Ecrire ensuite ce système d'équations et en déduire que

$$\dot{x}^0 = \frac{g_{0\varphi}L - g_{\varphi\varphi}C}{g_{0\varphi}^2 - g_{00}g_{\varphi\varphi}} \qquad \dot{\varphi} = \frac{g_{0\varphi}C - g_{00}L}{g_{0\varphi}^2 - g_{00}g_{\varphi\varphi}}.$$

Pour une géodésique radiale on doit avoir $\theta = \theta_0$ =const. et $\dot{\varphi} = 0$. Montrer, en tenant compte du résultat de a), que ceci est impossible sauf dans des cas exceptionnels (lesquels ?).

Problème 43: Fusée dans un trou noir de Schwearzschild

Supposons qu'une fusée traverse l'horizon $r = r_s$ d'un trou noir de Schwarzschild (de façon quelconque). Montrer que la fusée tombera dans la singularité en $r = 0$ dans un temps propre $\tau \leq \frac{\pi r_s}{2c}$.

RELATIVITE GENERALE ET COSMOLOGIE

Professeur: W.Amrein
Assistant: S.Bossoney

June 13, 2000

Corrigé série 12:

Problème 41

a) La métrique de Kerr est la suivante:

$$(ds)^2 = \frac{\Delta}{\Sigma}(dx^0 - a\sin^2\theta d\varphi)^2 - \frac{\sin^2\theta}{\Sigma}[(r^2+a^2)d\varphi - adx^0]^2 - \frac{\Sigma}{\Delta}(dr)^2 - \Sigma(d\theta)^2,$$

avec

$$\begin{aligned}\Sigma =& r^2 + a^2\cos^2\theta,\\ \Delta =& r^2 - Rr + a^2,\\ R =& \frac{2MG}{c^2}.\end{aligned}$$

A l'horizon extérieur $r = r_+$ (grande racine de $\Delta = 0$), la métrique avec $dx^0 = dr = 0$ est:

$$(ds)^2 = -\frac{\sin^2\theta}{\Sigma}(r_+^2 + a^2)^2(d\varphi)^2 - \Sigma(d\theta)^2 = -(r_+^2 + a^2\cos^2\theta)(d\theta)^2 + \frac{(r_+^2+a^2)\sin^2\theta(d\varphi)^2}{r_+^2 + a^2\cos^2\theta}$$

Donc l'aire de l'horizon est:

$$A = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\sqrt{g_{(2)}} = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi(r_+^2 + a^2)\sin\theta = 4\pi(r_+^2 = a^2) \overset{def}{=} \Omega_k,$$

où $g_{(2)}$ est le déterminant de la matrice g_{ij} avec i et j allant de 2 à 3. Donc avec $r_+ = \frac{MG}{c^2} + \sqrt{(\frac{MG}{c^2})^2 - a^2}$ on trouve:

$$\Omega_k = 4\pi(r_+^2 = a^2) = 8\pi\frac{MG}{c^2}\left\{\frac{MG}{c^2} + \sqrt{\frac{M^2G^2}{c^4} - a^2}\right\}.$$

Remarquons que $\Omega_k \overset{a\to 0}{\to} \Omega_s$, c'est à dire quand le moment cinétique tend vers zéro.
b) La surface initiale est égale à la somme des deux surfaces des trous noirs de Kerr

$$\Omega_{\text{initial}} = 2\Omega_k = 16\pi\frac{M_iG}{c^2}\left\{\frac{M_iG}{c^2} + \sqrt{\frac{M_i^2G}{c^2} - a^2}\right\},$$

alors que la surface finale est

$$\Omega_{\text{final}} = \Omega_s = 16\pi\frac{M_f^2G^2}{c^4}.$$

Comme $\Omega_{\text{final}} \geq \Omega_{\text{initial}}$ on a que

$$M_f^2 \geq M_i \left(M_i + \sqrt{M_i^2 - \frac{a^2c^4}{G^2}} \right).$$

Ainsi, pour $a = \frac{M_i G}{c^2}$ on doit avoir $M_f^2 \geq M_i^2$. Dans ce cas, comme le total de la masse initiale est $2M_i$, la masse finale doit être au moins égale à la moitié de la masse initiale et par conséquant il y a au plus 50 pour cent de la masse originale qui peut être transformée en radiation.

Problème 42

a)

$$\begin{aligned}
g_{00} =& \frac{\Delta}{\Sigma} - \frac{a^2 \sin^2\theta}{\Sigma} = \frac{r^2 - Rr + a^2\cos^2\theta}{\Sigma} \\
g_{\varphi\varphi} =& \frac{\Delta}{\Sigma} a^2 \sin^4\theta - \frac{\sin^2\theta}{\Sigma}(r^2 + a^2)^2 \\
g_{0\varphi} =& -\frac{a\Delta\sin^2\theta}{\Sigma} + \frac{a\sin^2\theta}{\Sigma}(r^2+a^2) = \frac{Rra\sin^2\theta}{\Sigma} \\
g_{rr} =& -\frac{\Sigma}{\Delta} \\
g_{\theta\theta} =& -\Sigma
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\partial_{x^0}\mathcal{L} - \frac{d}{d\tau}(\partial_{\dot{x}^0}\mathcal{L}) = -\frac{d}{d\tau}(\partial_{\dot{x}^0}\mathcal{L}) = & \quad -\frac{d}{d\tau}(2g_{00}\dot{x}^0 + 2g_{0\varphi}\dot{\varphi}) = 0 \\
\partial_{\varphi}\mathcal{L} - \frac{d}{d\tau}(\partial_{\dot{\varphi}}\mathcal{L}) = -\frac{d}{d\tau}(\partial_{\dot{\varphi}}\mathcal{L}) = & \quad -\frac{d}{d\tau}(2g_{0\varphi}\dot{x}^0 + 2g_{\varphi\varphi}\dot{\varphi}) = 0
\end{aligned}$$

Donc avec

$$\begin{aligned}
g_{00}\dot{x}^0 + g_{0\varphi}\dot{\varphi} =& C, \\
g_{0\varphi}\dot{x}^0 + g_{\varphi\varphi}\dot{\varphi} =& L,
\end{aligned}$$

on obtient:

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi} =& \frac{g_{0\varphi}C - g_{00}L}{g_{0\varphi}^2 - g_{00}g_{\varphi\varphi}} \\
\dot{x}^0 =& \frac{g_{0\varphi}L - g_{\varphi\varphi}C}{g_{0\varphi}^2 - g_{00}g_{\varphi\varphi}}.
\end{aligned}$$

Pour $\dot{\varphi} = 0$, comme $\frac{g_{0\varphi}}{g_{00}}$ n'est pas constant lorsque r varie, l'identité $g_{0\varphi}C - g_{00}L = 0$ n'est possible que pour:
1) $C = L = 0$. Alors on aurait $\dot{x}^0 = 0$, ce qui n'est pas possible. En effet, $g_{\varphi\varphi} \leq 0$, ce qui implique que $\dot{x}^0 = 0$, ce qui à son tour implique que $(d\tau)^2 < 0$ (4.82). Ceci est bien sûr impossible pour une géodésique du genre temps où nulle.
2) $L = 0$ (car $g_{00} > 0$) et $g_{0\varphi} = 0$, $C \neq 0$. C'est possible dans le cas $a = 0$ (métrique de Schwarzschild) ou si $\sin\theta = 0$ (géodésique le long de l'axe de symétrie de la métrique de Kerr, axe z dans (4.82)).

Problème 43

Dans la métrique de Schwarzschild, le déplacement le long d'une trajectoire du genre temps est donné par

$$c^2 = -u^\mu u_\mu = \left(1 - \frac{2MG}{rc^2}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(1 - \frac{2MG}{rc^2}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 - r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2.$$

A l'intérieure de l'horizon, le seul terme positif est celui en $\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2$ et donc

$$\left(\frac{2MG}{rc^2} - 1\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 > c^2.$$

Mais sign$\left(\frac{dr}{d\tau}\right) > 0$ pour un observateur physique (dirigé vers le futur) et donc

$$d\tau < c^{-1}\left(\frac{2GM}{rc^2} - 1\right)^{-1/2} dr.$$

Ainsi

$$\tau_{\max} = \int_{\frac{2MG}{c^2}}^{0} dr c^{-1}\left(\frac{2GM}{rc^2} - 1\right)^{-1/2} = \frac{\pi}{2c} r_s.$$

RELATIVITE GENERALE ET COSMOLOGIE

Professeur: W.Amrein
Assistant: S.Bossoney

June 6, 2000

Série 13:

Problème 44: Effondrement gravitationnel

On considère le modèle d'un fluide à pression nulle pour une étoile:

$$T_{00} = \rho(x^0, r)c^2, \quad T_{\mu\nu} = 0 \text{ sinon}$$

(en coordonnées comobiles x^0, r, θ, φ). Avec l'Ansatz suivant pour la métrique;

$$(dl)^2 = (dx^0)^2 - U(x^0, r)(dr)^2 - V(x^0, r)[(d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\varphi)^2]$$

on obtient les composantes non-nulles indépendantes suivantes pour le tenseur de Ricci ($' = \frac{d}{dr}$, $\dot{} = \frac{d}{dx^0}$):

$$\begin{aligned}
R_{00} =& \frac{\ddot{U}}{2U} + \frac{\ddot{V}}{V} - \frac{\dot{U}^2}{4U^2} - \frac{\dot{V}^2}{2V},\\
R_{11} =& \frac{V''}{V} - \frac{V'^2}{2V^2} - \frac{U'V'}{2UV} - \frac{\ddot{U}}{2} + \frac{\dot{U}^2}{4U} - \frac{\dot{U}\dot{V}}{2V},\\
R_{22} =& -1 + \frac{V''}{2U} + \frac{V'U'}{4U^2} - \frac{\ddot{V}}{2} - \frac{\dot{V}\dot{U}}{4U},\\
R_{01} =& \frac{\dot{V}'}{V} - \frac{V'\dot{V}}{2V^2} - \frac{\dot{U}V'}{2UV}.
\end{aligned}$$

a) Ecrire l'équation d'Einstein.
b) En supposant que ρ ne dépende que de x^0, on trouve (F.4) qu'une solution de l'équation d'Einstein est donnée par

$$U(x^0, r) = \frac{B(x^0)^2}{1 - kr^2}, \quad V(x^0, r) = B(x^0)^2 r^2,$$

où k est une constante et la fonction $B(x^0)$ satisfait

$$\frac{\dot{B}}{B} = -\frac{\rho}{3\dot{\rho}} \text{ et } \dot{B}^2 + k = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho B^2. \qquad (1)$$

Déterminer la constante k sous la condition que le fluide est au repos au temps $x^0 = 0$ (c.-à-d. $\dot{\rho}(0) = 0$).
c) Montrer que la deuxième équation dans (1) devient

$$\dot{B}^2 = k\left\{\frac{B(0)}{B(x^0)} - 1\right\}.$$

En introduisant au lieu de x^0 la variable $\Psi = \int_0^{x^0} \frac{dy}{B(y)}$ et en posant $\mathcal{B}(\Psi) = B(x^0)$, on obtient une équation différentielle pour $\mathcal{B}(\Psi)$. Résoudre cette équation (séparation des variables), puis exprimer x^0 en termes de Ψ.
d) Dessiner le graphe de $B(x^0)$.
e) Quel serait la durée de l'effondrement pour un observateur lointain?
<u>Formulaire:</u>

$$\int \frac{ds}{\sqrt{s-\gamma s^2}} = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} arccos(2\gamma x - 1)$$

Problème 45: Modèle inflationnaire de l'univers (univers d Sitter)

On considère les équations fondamentales de la cosmologie pour un univers sans matière (expliquées au chapitre F du cours):

$$3(\dot{B}^2 + k) = \Lambda B^2, \quad 2B\ddot{B} + \dot{B}^2 + k = \Lambda B^2.$$

Ici Λ est une constante (constante cosmologique), $B = B(x^0)$ est le rayon de l'univers, $\dot{} = \frac{d}{dx^0}$, et k est une constante qui assume les valeurs $+1, 0$ ou -1.
Montrer que, pour k et Λ fixés, il existe une solution pour B, et discuter le comportement de $B(x^0)$ comme fonction de x^0 (en particulier lorsque le temps x^0 devient très grand).

Problème 46: Mirage gravitationnel

Considérons l'image d'une source lumineuse S (étoile, galaxie) qui nous atteint après avoir passé près d'un déflecteur gravitationnel D (galaxie). Est-il possible de voir une image double ou triple de la source si
a) le déflecteur est considéré comme ponctuel,
b) le déflecteur est une distribution de masse du genre $\rho(b) = \rho_0 e^{-(b/r_0)^{1/4}}$, où b est le paramètre d'impacte et r_0 est une constante.
<u>Indications:</u>
i) On estime les distances tellement grandes qu'on peut faire des approximations aux petits angles ($\sin\alpha \sim \alpha$). Sur le dessin qui suit, b n'est pas exactement le paramètre d'impact mais on considère que cette approximation est valable à cause des petits angles.
ii) Utiliser la relation du cours pour une déviation par une masse M d'un rayon lumineux d'un angle φ et avec un paramètre d'impact b au premier ordre en r_0/r_s qui est: $\varphi = \frac{4GM}{b}$.

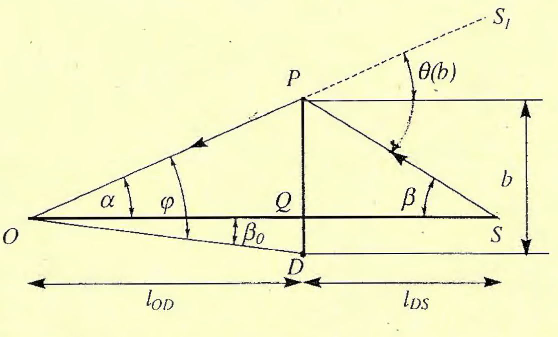


Figure 7.17 : Géométrie de la déflexion de la lumière émise par la source S, par le déflecteur D, et observée en O. *b est le paramètre d'impact, ℓ_{OD} et ℓ_{DS} sont les distances relatives observateur/déflecteur et déflecteur/source, respectivement. Les grandeurs observables, en principe, sont ℓ_{OD},ℓ_{DS} et $\varphi \equiv \beta_0 + \alpha$. Notons que tous les angles indiqués sont, dans la pratique, extrêmement petits : la courbe pointillée est la trajectoire réelle d'un photon émis par la source et diffère très peu du trajet SPO. $\theta(b)$ est la déviation du rayon lumineux; S_1 est l'image de S vue par O. Remarquons que S n'est pas directement observable.*

RELATIVITE GENERALE ET COSMOLOGIE

Professeur: W.Amrein
Assistant: S.Bossoney

June 20, 2000

Corrigé série 13:

Problème 44:

a) Remarquons qu'à cause de la symétrie sphérique de la métrique on a $R_{33} = \sin^2\theta R_{22}$. On a donc pas à se soucier de l'équation pour R_{33}. Les équations d'Einstein (sans constante cosmologique) $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$ nous donnent directement R. En effet, en contractant tous les indices on trouve: $-R = \frac{8\pi G}{c^4}T$, ce qui donne

$$R = \frac{8\pi G}{c^2}\rho.$$

Pour les équations d'Einstein proprement dites on a:

$$\begin{cases} R_{00} & = \frac{4\pi G}{c^2}\rho \\ R_{11} & = U\frac{4\pi G}{c^2}\rho \\ R_{22} & = V\frac{4\pi G}{c^2}\rho \\ R_{01} & = 0. \end{cases}$$

En remplaçant les composantes de $R_{\mu\nu}$ par les expressions en V et U on trouve:

$$\begin{cases} R_{00} = & \frac{\ddot{U}}{2U} + \frac{\ddot{V}}{V} - \frac{\dot{U}^2}{4U^2} - \frac{\dot{V}^2}{2V} & = \frac{4\pi G}{c^2}\rho, \\ R_{11} = & \frac{V''}{V} - \frac{V'^2}{2V^2} - \frac{U'V'}{2UV} - \frac{\ddot{U}}{2} + \frac{\dot{U}^2}{4U} - \frac{\dot{U}\dot{V}}{2V} & = U\frac{4\pi G}{c^2}\rho, \\ R_{22} = & -1 + \frac{V''}{2U} + \frac{V'U'}{4U^2} - \frac{\ddot{V}}{2} - \frac{\dot{V}\dot{U}}{4U} & = V\frac{4\pi G}{c^2}\rho, \\ R_{01} = & \frac{\dot{V}'}{V} - \frac{V'\dot{V}}{2V^2} - \frac{\dot{U}V'}{2UV} & = 0. \end{cases}$$

b) La première équation nous donne une relation entre $\dot{\rho}$, ρ, B et $\dot{B}$: $\dot{B} = \frac{-3\dot{\rho}B}{\rho}$. Ainsi on a pour k: $k = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho B^2 + \left(\frac{-3\dot{\rho}B}{\rho}\right)^2$, et comme k est une constante on peut évaluer cette expression à n'importe quel temps. En choisissant $x^0 = 0$ on trouve donc:

$$k = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho(0)B^2(0).$$

c) De $\frac{\dot{B}}{B} = -\frac{\dot{\rho}}{3\rho}$ on tire $B^3\rho = B^3(0)\rho(0)$ =cste. En effet, en dérivant la dernière expression on trouve $3B^2\dot{B}\rho + B^3\dot{\rho} = 3B^2\dot{B}\rho - 3B^3\frac{\dot{B}}{B}\rho = 0$. Ainsi $\rho = \rho(0)\frac{B^3(0)}{B^3}$. Ceci nous permet d'écrire que

$$\dot{B}^2 = -k + \frac{8\pi G}{3c^2}\frac{\rho(0)B^3(0)}{B} = k(\frac{B(0)}{B} - 1). \tag{1}$$

En termes de la variable Ψ et de la fonction $\mathcal{B}(\Psi)$ l'équation (1) devient

$$\mathcal{B}'(\Psi)^2 = k(\mathcal{B}(0)\mathcal{B}(\Psi) - \mathcal{B}^2(\Psi)).$$

La solution de cette équation différentielle est une cycloïde:

$$\mathcal{B}(\Psi) = \frac{1}{2}(1 + \cos(\sqrt{k}\Psi)).$$

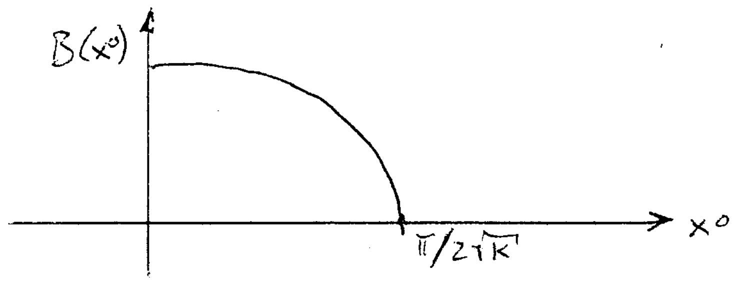
Notons que par définition $\frac{d\Psi}{dx^0} = \frac{1}{B(x^0)}$ et donc $\frac{dx^0}{d\Psi} = \mathcal{B}(\Psi)$. Ainsi on obtient que

$$x^0 = \text{cste} + \frac{1}{2}(\Psi + \frac{1}{\sqrt{k}}\sin(\sqrt{k}\Psi)).$$

Par définition de Ψ on a que $\Psi = 0$ lorsque $x^0 = 0$, ce qui nous permet d'enlever la constante pour obtenir:

$$x^0 = \frac{1}{2}(\Psi + \frac{1}{\sqrt{k}}\sin(\sqrt{k}\Psi)).$$

d) Pour dessiner la fonction $B(x^0)$, notons que $B(x^0) = \mathcal{B}(\Psi(x^0)) > 0$, pour autant que $0 \leq \Psi \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$. Ensuite, on sait que $B'(x^0) = \frac{\mathcal{B}'(\Psi(x^0))}{\mathcal{B}(\Psi(x^0))} < 0$, toujours pour $0 \leq \Psi \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$. En analysant maintenant encore la deuxième dérivée de $B(x^0)$ on voit que $B''(x^0) = -\frac{k\cos(\Psi(x^0))\mathcal{B}(\Psi(x^0)) + \mathcal{B}^2(\Psi(x^0))}{\mathcal{B}^3(\Psi(x^0))} < 0$. On peut donc tracer la fonction $B(x^0)$:



e) Lorsque $\Psi = \frac{\pi}{\sqrt{k}}$, $\mathcal{B} = B = 0$. Le temps d'effondrement est donc égal à

$$T = \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{k}}} d\Psi \frac{dx^0}{d\Psi} = \frac{\pi}{2\sqrt{k}}.$$

Problème 45:

On commence par dériver la première équation qui nous donne:

$$6\dot{B}\ddot{B} = 2\Lambda B\dot{B}.$$

1) $\Lambda > 0$:
On a comme solution pour $B(x^0)$:

$$B(x^0) = B_1 ch(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}x^0) + B_2 sh(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}x^0).$$

i) si $k = -1$, la première et la deuxième équation de l'ennoncé nous donnent

$$3(\dot{B}^2 - 1) = \Lambda B^2,\ \dot{B}^2 - 1 = B\ddot{B} = \frac{\Lambda}{3}B^2,$$