

Présentation du travail de diplôme

réalisé à l'EPFL, sous la supervision du prof.

Philippe A. Martin

**Corrélations dans les
plasmas inhomogènes
et
forces entre corps
macroscopiques**

François Coppex

EPFL — Lausanne

12 mars 2001

Présentation du travail de diplôme

réalisé à l'EPFL, sous la supervision du prof.

Philippe A. Martin

**Corrélations dans les
plasmas inhomogènes
et
forces entre corps
macroscopiques**

François Coppex

UNIFR — Fribourg

23 mars 2001

Présentation du travail de diplôme

réalisé à l'EPFL, sous la supervision du prof.

Philippe A. Martin

Corrélations dans les plasmas inhomogènes et forces entre corps macroscopiques

François Coppex

UNIGE — Genève

3 avril 2001

Structure

① Introduction

(problème - modélisation - démarche)

② Force en termes des fonctions de corrélation de charge

(*indépendant des statistiques*)

I

③ Théorie
classique

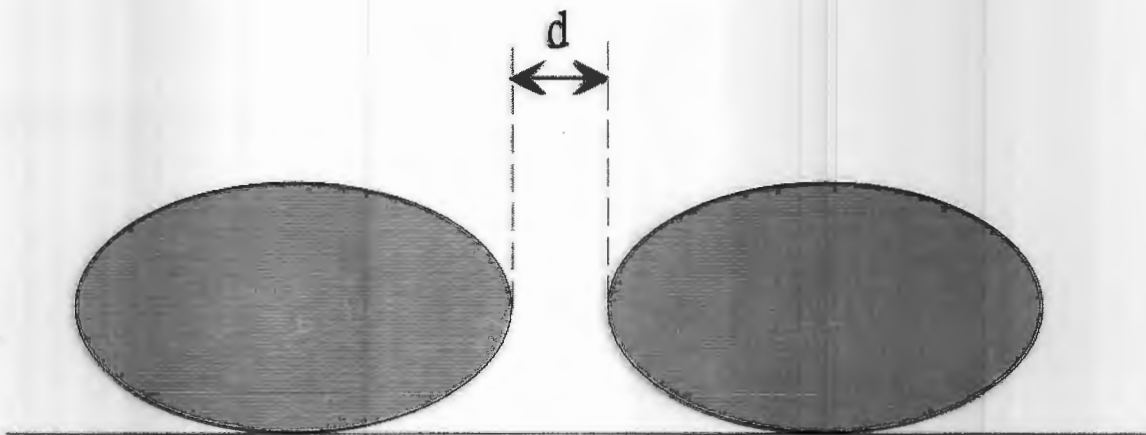
④ Théorie
semi-classique

II

⑤ Comparaison avec la littérature

⑥ Conclusion et perspectives

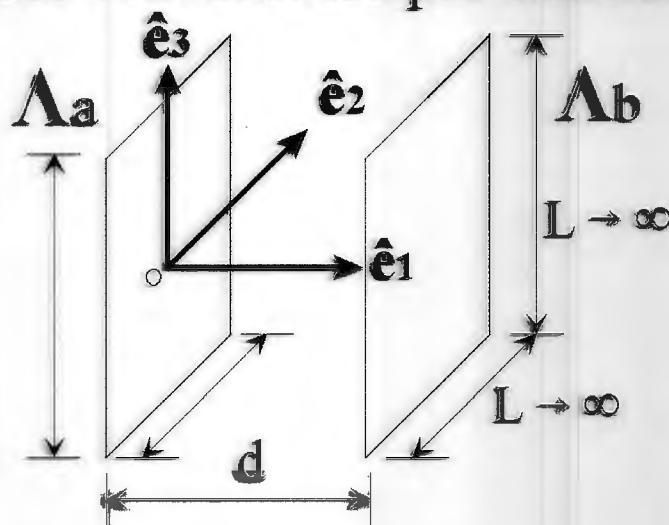
1) a) Présentation du problème



- 2 corps macroscopiques, électriquement neutres
- d petit ($< 100 \text{ \AA}$)
- quelle est la force entre ces deux corps ?
- hypothèses... ?

1) b) Modélisation du système: hypothèses

- ① Plasma coulombien à plusieurs composantes
- ② Confinement
- ③ Neutralité de charge de chaque volume
- ④ Équilibre thermique
- ⑤ Mécanique statistique de l'équilibre (état canonique)
- ⑥ Demi-espaces : invariance par translation



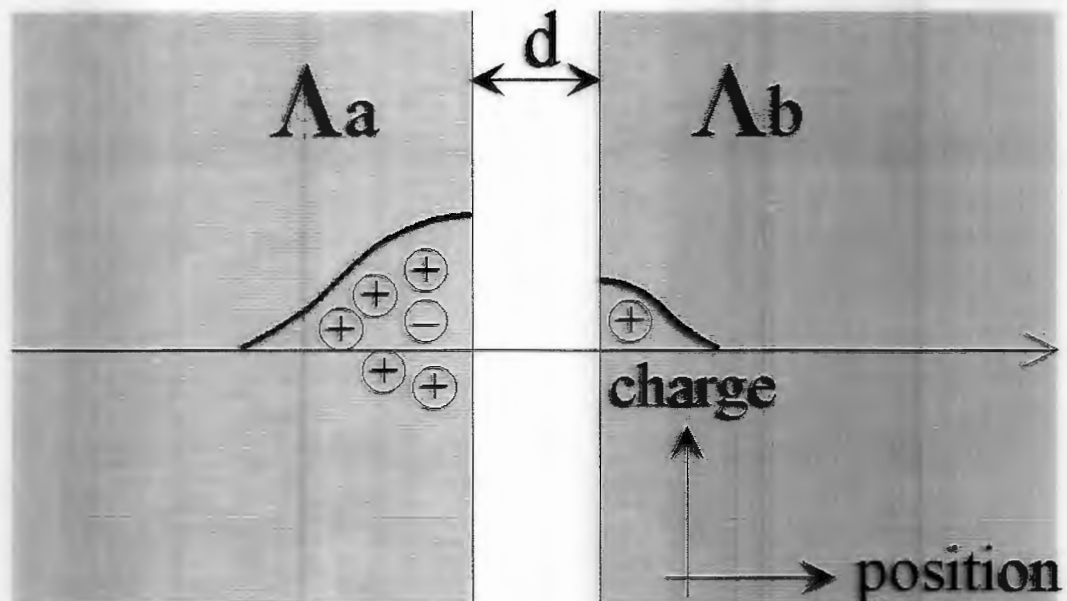
- ⑦ Développement asymptotique

$$f(d) = \sum_{k \geq 1} f_k d^{-k}$$

- ⑧ Force par unité de surface

$$f(d) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \langle \hat{\mathbf{F}} \rangle$$

Phénomène physique de base



Paroi

- ⇒ brisement de symétrie de translation
- ⇒ brisement de symétrie sphérique des nuages d'écran
- ⇒ formation de multipôles
- ⇒ écran non exponentiel
- ⇒ force algébrique

1) c) Démarche générale: les idées

- $f_{ij} = -\nabla_{ij} V_{ij}$: - pas d'effets dynamiques $A = 0$
- force: observable à deux points

- formalisme: fonctions de corrélation à deux points

$$f(d) = \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{q}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_b C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b) \mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b)$$

- 1. $d \rightarrow \infty \Rightarrow U$ petit

$$C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b) = \frac{1}{Q} \int d\omega e^{-i\omega(U(r_a) + U(r_b))} \hat{C}(\mathbf{q}_a) \hat{C}(\mathbf{q}_b) \underbrace{e^{-i\omega U(r_a, r_b)}}_{=1 - i\omega U + \frac{\omega^2}{2} U^2 + \mathcal{O}(U^3)}$$

- 2. $\lim_{d \rightarrow \infty} \mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) = 0$

\Rightarrow développement asymptotique en puissances de d^{-1}

- 1+2. La force $f(d)$ s'exprime en puissances de d^{-1}
 - premier coefficient non nul: contribution dominante

2) Force en terme des fonctions de corrélation de charge

2) a) Description du système

$$H = U(r_a) + U(r_b) + U(r_a, r_b)$$

$$U(r_a) = \sum_{1 \leq i < j \leq 2N} \frac{e_{\alpha_i} e_{\alpha_j}}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|} \chi_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_i) \chi_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_j)$$

$$U(r_a, r_b) = \sum_{1 \leq i < j \leq 2N} \frac{e_{\alpha_i} e_{\alpha_j}}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|} \chi_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_i) \chi_{\Lambda_b}(\mathbf{q}_j)$$

$$\int d\omega = \delta_{\sum_{i=1}^N e_{\alpha_i}} \delta_{\sum_{i=1}^N e_{\alpha_{i+N}}} \sum_{\alpha_1=1}^S \cdots \sum_{\alpha_{2N}=1}^S \int_{\Sigma^{2N}} d^3 \mathbf{q}_1 \cdots d^3 \mathbf{q}_{2N}$$

- pas de moments conjugués

2) b) Observable Force

$$\hat{\mathbf{F}}(q) = \sum_{1 \leq i < j \leq 2N} \underbrace{\hat{f}_{\alpha_i \alpha_j}(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j)}_{= -\nabla_{(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j)} U(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j)} = \sum_{1 \leq i < j \leq 2N} \hat{\mathbf{G}}_{\alpha_i \alpha_j}(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j)$$

2) c) Fonctions de corrélation et symétries

$$\langle \hat{F} \rangle = \frac{1}{2!} \sum_{\alpha_1=1}^S \sum_{\alpha_2=1}^S \int_{\mathbf{r}} d^3 \mathbf{q}_1 \int_{\mathbf{r}} d^3 \mathbf{q}_2 \hat{G}_{\alpha_1 \alpha_2}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \rho_{\alpha_1 \alpha_2}^{(2)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$$

- + forme particulière de $\hat{G}_{\alpha_1 \alpha_2}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)$
- + changements de notations
- + pas de points coïncidents
- + force par unité de surface
- + symétrie de translation

$$f(d) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \langle \hat{F} \rangle = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{q}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_b C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b) \underbrace{\frac{\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b}{|\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b|^3} \hat{e}_1}_{\doteq \mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b)}$$

2) d) Passage aux corrélations tronquées

- but: pédagogique

$$C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b) = C_T(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b) + C(\mathbf{q}_a)C(\mathbf{q}_b)$$

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow & \downarrow \\ & f_T(d) & f_{cc}(d) \end{array}$$

3) Théorie classique

3) a) Ordre linéaire dans le potentiel d'interaction

I) Expression des fonctions de corrélation

- on veut $C(\mathbf{q}_a)C(\mathbf{q}_b)$ et $C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b)$ avec $C(\mathbf{q}_a) = \langle \hat{C}(\mathbf{q}_a) \rangle$
 $\quad \quad \quad \searrow \quad \quad \quad \swarrow$
 $\quad \quad \quad f_{cc}(d) \quad \quad \quad f_T(d)$

- démarche: passer de $\langle \cdot \rangle$ à $\langle \cdot \rangle_{s.i.}$. Comment ?

$$e^{-\beta U(r_a, r_b)} = 1 - \beta U(r_a, r_b) + \mathcal{O}(\beta^2)$$

- opérateur énergie d'interaction: facteur 1/2 et self-énergie ?

$$U(r_a, r_b) = \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{y}_b \hat{C}(\mathbf{y}_a) \hat{C}(\mathbf{y}_b) V(\mathbf{y}_a - \mathbf{y}_b)$$

\Rightarrow les seules observables en jeu sont les densités de charge

$\Rightarrow C(\mathbf{q}_a)C(\mathbf{q}_b) = \dots$

$$C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b) = -\beta \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a C_T^{\Lambda_a}(\mathbf{q}_a; \mathbf{y}_a) \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{y}_b C_T^{\Lambda_b}(\mathbf{q}_b; \mathbf{y}_b) V(\mathbf{y}_a - \mathbf{y}_b)$$

- interprétation ?

II) Force par unité de surface

- insérer $C(\mathbf{q}_a)C(\mathbf{q}_b)$ et $C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b)$ dans $f_{cc}(d)$ et $f_T(d)$
 - Lemme: à l'ordre linéaire en $U(r_a, r_b)$, la contribution de $f_{cc}(d)_{\mathcal{O}(\beta^1)}$ est nulle.
 - + idées...(volume de référence, symétrie, facteur L^{-2})
- $$\Rightarrow f(d)_{\mathcal{O}(\beta^1)} = f_T(d)_{\mathcal{O}(\beta^1)} = \int dz_1 \varphi_1(z_1) g_1(d, z_1)$$

III) Développement asymptotique $d \rightarrow \infty$

- hypothèse: un tel développement convergent existe

$$g_1(d, z_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{d^k} g_{1,k}(z_1)$$

$$\Rightarrow f(d)_{\mathcal{O}(\beta^1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{d^k} \underbrace{\int dz_1 \varphi_1(z_1) g_{1,k}(z_1)}_{\doteq f_{1,k}}$$

- petits paramètres ?

$$\mu \doteq \frac{q_{a1} + q_{b1}}{d}$$

$$\nu \doteq \frac{y_{a1} + y_{b1}}{d}$$

$$\alpha \doteq \frac{q_{a2} - q_{b2}}{d}$$

$$\beta \doteq \frac{q_{a3} - q_{b3}}{d}$$

- pourquoi ?

- calculs $\Rightarrow g_{1,0}(z_1) = 0$

$$g_{1,1}(z_1) = \text{cste}|_{z_1}$$

$$g_{1,2}(z_1) = \mathcal{O}(z_1)$$

$$g_{1,3}(z_1) = \mathcal{O}(z_1^2)$$

IV) Force en puissances de d^{-1}

$$f_{1,k} = -\beta \int dz_1 g_{1,k}(z_1) C_T^{\text{si}}(q_{a_1}; y_{a_1} : |\bar{\mathbf{q}}_a|) C_T^{\text{si}}(q_{b_1}; y_{b_1} : |\bar{\mathbf{q}}_b|)$$

- Relations connues

- 1. Électroneutralité

$$\int_{-\infty}^0 dy_{a_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_a C_T^{\text{si}}(q_{a_1}; y_{a_1} : |\bar{\mathbf{q}}_a|) = 0$$

- interprétation?

- 2. Règle de somme 3d (1^{er} moment)

$$\int_{-\infty}^0 dq_{a_1} \int_{-\infty}^0 dy_{a_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_a C_T^{\text{si}}(q_{a_1}; y_{a_1} : |\bar{\mathbf{q}}_a|) y_{a_1} = -\frac{1}{4\pi\beta}$$

- Calculs:

- jeu des moments $\Rightarrow f_{1,3} \neq 0$

- règle de somme + symétries $\Rightarrow f_{1,3} = \dots$

$$f(d) \otimes (\beta) = \frac{1}{8} \frac{1}{\pi\beta} \frac{1}{d^3} \hat{\mathbf{e}}_1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{d^4}\right)$$

3) b) Généralisation \forall ordre dans le potentiel d'interaction

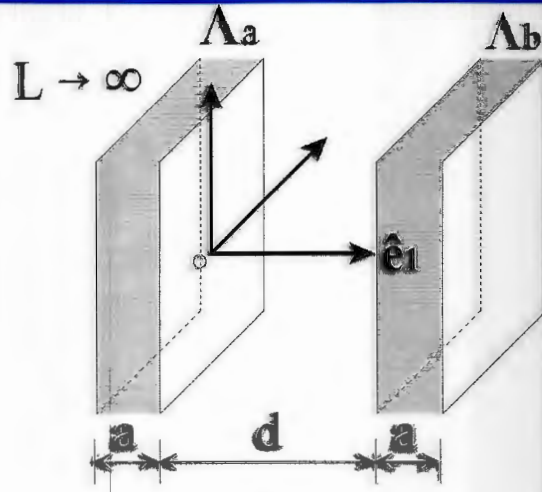
- but: aux ordres supérieurs dans le potentiel d'interaction, on n'obtient aucune contribution en d^3
- preuve: réalisée
- arguments:

$$g_i(d, z_i) = \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{y}_a \underbrace{\mathbf{F}(\dots)}_{=O(1/d^2)} \underbrace{\tilde{V}^i(\dots)}_{=O(1/d^i)} = O(1/d^{i+2}) = O(1/d^i)$$

— développement asymptotique $d \rightarrow \infty$: jeu des moments:

$$\begin{aligned} g_{i,i}(z_i) &= \text{cste}|_{z_i} \neq 0 \implies f_{i,i} = 0 \\ g_{i,i+1}(z_i) &= O(z_i) \neq 0 \implies f_{i,i+1} = 0 \\ g_{i,i+2}(z_i) &= O(z_i^2) \neq 0 \implies f_{i,i+2} \neq 0 \end{aligned}$$

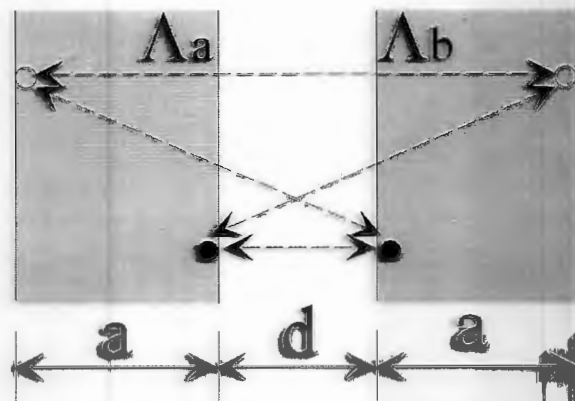
3) c) Force entre deux plaques planes



- différence ? règle de somme...

$$f_a(d) = \frac{2\pi\beta}{d^3} \mathcal{P}^2 \hat{e}_1$$

- question: $\lim_{a \rightarrow \infty} f_a(d) = f(d)$?
- pas trivial...



- calculs: $\lim_{a \rightarrow \infty} f_a(d) = 4f(d)$
- intérêt ? mesure expérimentale...

4) Théorie semi-classique

- calcul de $C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)$
- semi-classique = quantique sans contrainte fermionique ou bosonique

$$H = T_a + T_b + U(r_a) + U(r_b) + U(r_a, r_b)$$

$$T_a = - \sum_{i=1}^{2N} \frac{\hbar^2}{2m_{\alpha_i}} \Delta_i \chi_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_i)$$

4) a) Formalisme des filaments

- conséquences du formalisme ?
 - fonction de partition: même structure formelle
 - espace de Hilbert \rightarrow espace de phase élargi

$$\mathcal{F} = (\alpha, \mathbf{q}, \xi(\cdot))$$



- particule = filament chargé, fluctuations quantiques
- interaction « bijective »

4) b) Démarche de calcul de

$$C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b) \text{ et } f(d)_{\mathcal{O}(\beta)}$$

- différences:

- expressions plus grandes
- ! filaments:- symétries spatiales
 - translation et inversion
- généralisation de la règle d'électroneutralité

⇒ mêmes mécanismes:

- nullité de l'électroneutralité (jeu des moments)
- puissances supérieures à 1 en U

- résultat le plus général obtenu:

$$f(d) = \frac{2\pi\beta}{d^3} \mathcal{P}_{\hbar}^2 \hat{\mathbf{e}}_1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{d^4}\right)$$

$$\mathcal{P}_{\hbar} = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{q}_{a1} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y}_{a1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\bar{\mathbf{y}}_a y_{a1} C_T^{\text{ei}}(\mathbf{q}_{a1}; y_{a1}; |\bar{\mathbf{y}}_a|)$$

- limite classique $\hbar \rightarrow 0$
- C_T contient toute la physique...

5) Comparaison avec la littérature

- comparer l'expression analytique

$$f(d) = \frac{1}{8} \frac{1}{\pi\beta} \frac{1}{d^3} \hat{e}_1$$

- ce qui s'en rapproche le plus... historique

- 1948: H.B.G. Casimir: $T = 0$

- 1954: E.M. Lifshitz

$$f(d) = \frac{\zeta(3)}{8} \frac{1}{\pi\beta} \frac{1}{d^3} \hat{e}_1, \quad \zeta(3) = 1.202\dots$$

- 2001: 8 dérivations différentes...

- question 1: erreur de calcul ?

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{12}{21} \int_0^{\infty} dx \frac{x^2 e^x}{e^{2x} - 1}$$

- question 2: articles: même système ?

- conditions aux bords

- problème *différent*

6) Conclusion et perspectives

- enjeu:
 - extension d'un vieux résultat célèbre, d'actualité
 - description plus fondamentale: moins d'hypothèses
- perspectives:
 - dimension $D \geq 3$ ($D = 2$)
 - règle de somme semi-classique / développement en puissances de \hbar
 - plasma quantique (formule magique)
 - état grand-canonique: formation de matière