UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Sections d'Informatique et de Physique

FACULTÉ DES SCIENCES
Profs. B. Chopard et M. Droz

Outils, modélisation et simulation en calcul numérique – Série 1

15 mars 2005

Exercice 1.
La règle de parité.
Soit $\Lambda = N \times N$ un réseau carré en dimension 2. Soit $\mathbf{x} = (i, j) \in \Lambda$ la coordonnée d'une cellule. L'état de chaque cellule au temps discret t sera décrit par la fonction $\psi(\mathbf{x}, t) \in \{0, 1\}$. Supposant la condition initiale $\psi(\mathbf{x}; 0)$ connue, l'état à l'itération $t + 1$ sera donné par la règle suivante :

1. On calcule $n(\mathbf{x}; t) = \sum_{\mathbf{x}'} \psi(\mathbf{x}'; t)$ la somme des valeurs des 4 plus proches voisins $\mathbf{x}'$ de la cellule $\mathbf{x}$, pour tout $\mathbf{x} \in \Lambda$ On suppose des conditions aux bords périodiques.
2. L'état $\psi(\mathbf{x}; t + 1)$ est alors donné par
$$\psi(\mathbf{x}; t+1) = \begin{cases} 0, & \text{si } n(\mathbf{x}; t) \text{ est pair,} \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$
3. Recommencer au point 1.

On demande :
i) Constater que cette règle s'écrit :
$$\psi(i, j; t+1) = \bigoplus_{(k,l)\in\Omega} \psi(k, l; t), \qquad \Omega = \{(i+1, j), (i-1, j), (i, j+1), (i, j-1)\}, \tag{1}$$
où on a noté $\bigoplus$ pour la somme modulo 2.
ii) Programmer la règle de parité dans le langage et pour une taille N de votre choix.
iii) Constater que la symétrie de la règle microscopique se retrouve dans l'agencement des structures répliquées, et que la condition initiale est après un certain nombre d'itérations répliquée par la règle. En exprimant $\psi(k, l; t)$ dans le membre de droite de (1) par son expression en fonction de $\psi(k, l; t - 1)$ à l'aide de la règle (1), puis en renommant $t + 1 \to t + 2$ et $t - 1 \to t$, établir
$$\psi(i, j; t+2) = \bigoplus_{(k,l)\in\Omega'} \psi(k, l; t), \qquad \Omega' = \{(i+2, j), (i-2, j), (i, j+2), (i, j-2)\}, \tag{2}$$
où on a fait usage de $X \bigoplus X = 0$ et $X \bigoplus 0 = X$.
iv) En supposant la relation (2) vraie pour $T \in \mathbb{N}$ itérations, et en procédant de même que pour le point iii), montrer que
$$\psi(i, j; t+2T) = \bigoplus_{(k,l)\in\Omega''} \psi(k, l; t), \qquad \Omega'' = \{(i+2T, j), (i-2T, j), (i, j+2T), (i, j-2T)\}. \tag{3}$$
L'action de la règle est donc de translater la configuration initiale dans les quatre directions d'une distance $2T$ et de les superposer. Si l'extension spatiale de la condition initiale est suffisamment petite, la règle de parité réplique la condition initiale. Sinon, il y a des interférences destructives.
v) Soit un système $\Lambda = N \times N$ avec conditions aux bords périodiques et tel que N est pair. Utilisant le résultat du point iv), déduire sans calcul quel sera l'état du système après $N/2$ itérations pour toute condition initiale.

— **Tourner la page** —

Exercice 2.
Le nombre de règles possibles pour un automate cellulaire.
Soit un automate cellulaire de dimension arbitraire, et r le nombre de cellules qui entrent dans l'énoncé de la règle. Supposons de plus que chaque cellule puisse prendre k états distincts. Montrer que le nombre possible de règles $n(r,k)$ est alors donné par

$$n(r,k) = k^{k^r}.$$

Indication : utiliser un argument combinatoire.

Exercice 3.
La classification de Wolfram.
Soit un automate cellulaire de dimension 1. Soit $s_i(t) \in \{0,1\}$ l'état de la cellule i au temps t. L'état au temps $t+1$ est donné par la valeur du triplet $(s_{i-1}(t), s_i(t), s_{i+1}(t))$:

$$s_i(t+1) = \Phi(s_{i-1}(t), s_i(t), s_{i+1}(t)).$$

Le nombre total de tels triplets qu'il est possible de former est de 8. Une règle d'automate cellulaire correspondra alors à définir quelle sera la valeur de $s_i(t+1)$ en fonction de chaque triplet. Ceci se fait en définissant les valeurs $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_7\}$, $\alpha_i \in \{0,1\}$, associées à ces triplets :

$$\underbrace{111}_{\alpha_7} \quad \underbrace{110}_{\alpha_6} \quad \underbrace{101}_{\alpha_5} \quad \underbrace{100}_{\alpha_4} \quad \underbrace{011}_{\alpha_3} \quad \underbrace{010}_{\alpha_2} \quad \underbrace{001}_{\alpha_1} \quad \underbrace{000}_{\alpha_0}$$

Il y a $2^8 = 256$ choix possibles pour définir $\{\alpha_i\}_{i=0}^{7}$. Chaque règle peut être identifiée par un index $\mathcal{N} \in [1, 256]$ défini par

$$\mathcal{N} = \sum_{i=0}^{7} 2^i \alpha_i,$$

ce qui correspond à la notation binaire $\prod_{i=0}^{7} \alpha_i$.

On demande de

i) Programmer les règles 40, 56, 18, et 110, et afficher leur évolution temporelle dans un graphique d'axes $\{x, t\}$ où t est le temps et x l'espace. Pour cela, utiliser des conditions aux bords périodiques, et constater qu'un triplet $\{i, j, k\}$ au temps t prendra au temps $t+1$ la valeur α_l, où $l = k + 2j + 4i$.

ii) Constater les différences qualitatives des dynamiques générées par ces règles.

Exercice 4.
La fourmi de Langton.
Soit $\Lambda = N \times N$ un réseau carré en dimension 2. L'état de chaque cellule au temps discret t peut prendre les valeurs $\{0,1\}$, associées aux couleurs noir et blanc, respectivement. Une fourmi se déplace sur Λ. Lorsqu'elle entre dans une cellule blanche, elle tourne de 90 degrés vers la gauche et “peint” la cellule en noir. Inversement, lorsque la fourmi entre dans une cellule noire, elle tourne de 90 degrés vers la droite et “peint” la cellule en blanc.

On demande de

i) Programmer la règle de la fourmi de Langton.

ii) Constater numériquement que le mouvement à longs temps est non borné.

iii) Trouver un argument pour montrer que le mouvement est non borné pour tout état initial.
Indication : supposer le mouvement borné, et considérer les passages successifs de la fourmi dans la cellule du coin supérieur droit. Conclure qu'il y a contradiction avec l'hypothèse de mouvement borné.