FACULTÉ DES SCIENCES
Profs. B. Chopard et M. Droz

Outils, modélisation et simulation en calcul numérique – Série 11

31 mai 2005

Exercice 1.
La fonction de corrélation du modèle d'Ising.
Considérons le modèle d'Ising en 2 dimensions et le programme Monte Carlo correspondant de l'exercice 3 de la série précédente. Montrer que la fonction de corrélation de l'aimantation

$$c_m(t) = \frac{\langle m(t)m(0)\rangle - \langle m(t)\rangle \langle m(0)\rangle}{\langle m^2(0)\rangle - \langle m(0)\rangle^2}$$

a une décroissance exponentielle de la forme $c_m(t) \sim \exp(-t/\tau_m)$, où τ_m est un temps de relaxation typique.

Exercice 2.
Le comportement critique du modèle d'Ising.
En simulant un système de taille finie avec L^2 sites et pour plusieurs valeurs différentes de L (par exemple, $L = 8, 16, 32, 64, \ldots$), montrer que pour $T > T_c$ et $T < T_c$ (où T_c est la température critique) les valeurs de l'aimantation sont disposées sur deux branches dans les variables

$$\{x, y\} = \left\{ \left| \frac{T_c - T}{T_c} \right| L^{1/\nu}, \langle |m| \rangle \, L^{\beta/\nu} \right\},$$

où T_c ainsi que les exposants critiques β et ν sont des paramètres d'interpolation.
Indications : on sait que pour ce modèle que $\nu = 1$, $\beta = 1/8$, et de plus $\sinh(2/k_B T_c) = 1$ donc $T_c = (k_B 0.440687\ldots)^{-1}$. Considérer un système d'unités où $k_B = 1$.

Exercice 3.
Les effets de taille finie du modèle d'Ising.
Montrer analytiquement qu'une autre interpolation possible pour décrire les effets de taille finie pour un système en dimension d avec $N = L^d$ sites est donnée par

$$\frac{\langle M^2 \rangle}{N} = N^{\gamma/d\nu} \psi_\pm \left(t N^{1/d\nu} \right),$$

où M est l'aimantation totale, $t = (T_c - T)/T$, et $\psi_\pm$ sont les fonctions d'échelle pour $T > T_c$ (ψ_+) et $T < T_c$ (ψ_-). Montrer que asymptotiquement

$$\begin{array}{lcl} \psi_+(x) & \stackrel{x\to\infty}{\sim} & x^{-\gamma}, \\ \psi_-(x) & \stackrel{x\to\infty}{\sim} & x^{2\beta}. \end{array}$$