UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Sections d'Informatique et de Physique

FACULTÉ DES SCIENCES
Profs. B. Chopard et M. Droz

Outils, modélisation et simulation en calcul numérique – Série 12

7 juin 2005

Exercice 1.
Un réseau de neurones à mémoire associative.
Soit un réseau de neurones à mémoire associative de taille L_1L_2 (par exemple 16^2).

On désire que ce réseau apprenne un nombre M de motifs (par exemple les lettres de l'alphabet {A, B, C, ..., Z}).

Soit $\{\sigma_i\}^\mu$ le motif d'index μ, $i = 1, \dots, N$, $\sigma_i \in \{-1, 1\}$. $N = L_1L_2$ est le nombre total de neurones. Un neurone est dit actif si $\sigma_i = 1$, et inactif si $\sigma_i = -1$.

On désire que le réseau de neurones $\{s_i\}$, $i = 1, \dots, N$, soit capable, en partant d'une condition initiale proche du motif d'index μ, de reproduire ce motif. Ceci peut être réalisé par un choix approprié des ω_{ij}.

On demande de :
i) Considérer un ensemble de M motifs $\{\sigma_i\}^\mu$.
ii) Faire apprendre au réseau ces motifs à l'aide de la règle de Hebb :

$$\omega_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{M} \sigma_i^\mu \sigma_j^\mu, \qquad \omega_{ii} = 0.$$

iii) Présenter au réseau de neurones des entrées bruitées du type $\{\sigma_i\}^\mu + \xi$, où ξ décrit un bruit statistique sur le motif initial.
iv) Rechercher par un algorithme Monte-Carlo (en permettant une température non nulle) les états mémorisés $\{\sigma_i\}^\mu$ vers lesquels les motifs initiaux $\{\sigma_i\}^\mu + \xi$ convergent.

Indications :
- Soit

$$h_i(t) = \sum_{j=1}^{N} \omega_{ij} s_j(t),$$

alors l'évolution déterministe du réseau est donnée par $s_i(t+1) = \text{sign}(h_i)$. Soit $f(h)$ monotone croissante telle que $f(h = -\infty) = 0$ et $f(h = \infty) = 1$, alors la dynamique stochastique est telle que la valeur $s_i(t+1) = 1$ est sélectionnée avec probabilité $f[h_i(t)]$. On choisira la dynamique de Monte-Carlo définie par $f(h) = \min\left[\exp(h/T), 1\right]$, où T est un paramètre positif (température effective). La limite $T \to 0$ donne la dynamique déterministe.
- Une autre approche exploite le fait que la règle de Hebb est telle que les motifs mémorisés correspondent aux minima (locaux) de l'énergie $E = -(1/2)\sum_{ij=1}^{N} \omega_{ij} s_i s_j$. L'algorithme Monte-Carlo consiste alors à déterminer le minima de E dans le voisinage du motif initial. Pour cela, on choisit un neurone σ_k et modifie sa valeur de façon aléatoire σ'_k. On accepte ensuite cette nouvelle valeur avec probabilité $\min\left[\exp(-\Delta E/T), 1\right]$, où $\Delta E = E' - E$, avec E' la valeur de l'énergie correspondant à σ'_k. La procédure est itérée. Une température T non nulle permet des transitions vers un état d'énergie supérieure, donc le système ne reste pas indéfiniment dans un minima local qui pourrait ne pas correspondre au motif cherché.