Outils, modélisation et simulation en calcul numérique – Série 8

10 mai 2005

Exercice 1.
L'équation de Boltzmann sur réseau D2Q9 dans l'approximation BGK pour l'écoulement de Poiseuille.
On désire étudier un écoulement de Poiseuille à l'aide du modèle BGK de l'équation de Boltzmann sur réseau. Le modèle BGK reproduisant un gradient de pression par le biais d'une force constante **F** est

$$f_i(\mathbf{r}+\tau\mathbf{v}_i, t+\tau) = f_i(\mathbf{r},t) + \frac{1}{\xi}\left[f_i^{\mathrm{eq}}(\mathbf{r},t) - f_i(\mathbf{r},t)\right] + \frac{\tau}{c_s^2} t_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}, \tag{1}$$

où $f_i(\mathbf{r},t)$ est la probabilité qu'au temps t une particule entre au site $\mathbf{r}$ depuis la direction i du réseau, et f_i^{eq} est la distribution d'équilibre. ξ est un paramètre libre décrivant le temps de relaxation, relié à la viscosité ν du fluide par

$$\nu = c_s^2\left(\xi - 1/2\right),$$

où c_s est la vitesse du son dans le fluide.

Un écoulement de Poiseuille est un écoulement dans une conduite, généré par un gradient de pression, tel que la vitesse du fluide **u** sur les parois est nulle (cf. Fig. 1).

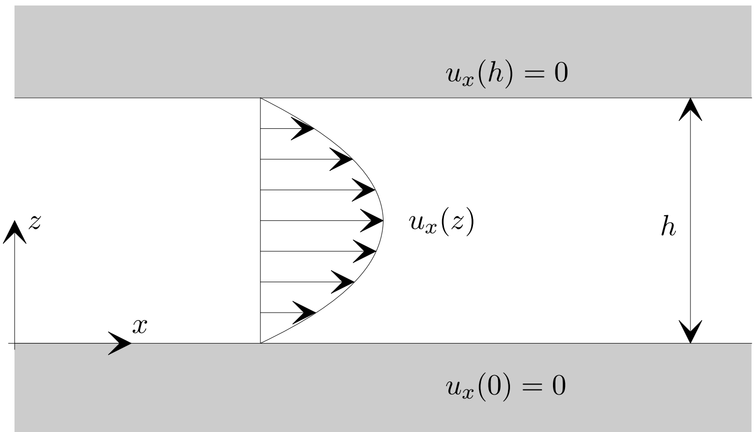

FIG. 1 – Ecoulement de Poiseuille en deux dimensions.

Nous désirons étudier cet écoulement à l'aide d'un réseau D2Q9, c'est-à-dire un réseau carré avec diagonales, à deux vitesses (cf. Fig. 2).

Les paramètres pour le réseau D2Q9 sont donnés par le tableau suivant.

t_l	t_r	t_0	c_s^2
1/9	1/36	4/9	1/3

En pratique, on prendra un temps unité $\tau = 1$, et pour des raisons de convergence on choisira ξ de l'ordre de l'unité (par exemple, $\xi = 0.75$), la force **F** de l'ordre de 10^{-3} [par exemple, $\mathbf{F} = (F_x, F_z) = (0.002, 0)$], une taille verticale h de quelques dizaines de cellules, et une taille horizontale

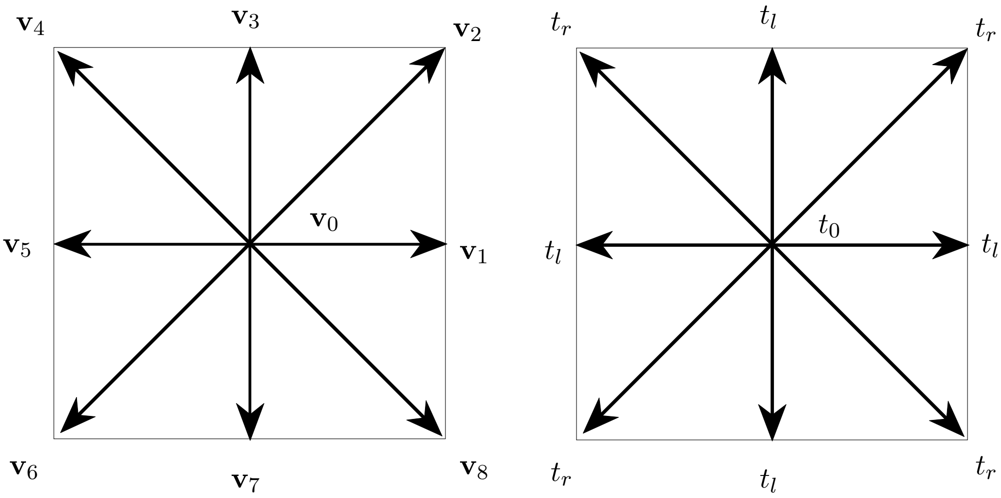

FIG. 2 – Les 8 + 1 vitesses du réseau D2Q9 (à gauche), ainsi que les poids associés à chaque direction (à droite). t_l est associé aux particules lentes, t_r aux particules rapides, et t_0 aux particules immobiles.

L de l'ordre de quelques cellules avec conditions aux bords horizontaux périodiques. On choisit de plus des conditions aux bords verticaux de “bounce back” telles que la vitesse des particules entrant en collision avec les bords est inversée. Les particules sont initialement choisies immobiles. L'algorithme sera structuré comme suit.

1. Initialiser les variables et calculer la distribution d'équilibre f_i^{eq} à l'aide de

$$f_i^{\mathrm{eq}}(\mathbf{r},t) = \rho t_i \left[1 + \frac{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{1}{c_s^4} \left(v_{i\alpha} v_{i\beta} - c_s^2 \delta_{\alpha\beta} \right) u_\alpha u_\beta \right]. \tag{2}$$

2. Début de la boucle : calculer le champ de vitesse $\mathbf{u}$ et la densité ρ avec

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r},t) &= \sum_{i=0}^{8} f_i^{\mathrm{eq}}(\mathbf{r},t), \\ \mathbf{u}(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{\rho} \sum_{i=0}^{8} f_i^{\mathrm{eq}}(\mathbf{r},t) \mathbf{v}_i. \end{aligned}$$

3. Calculer la distribution d'équilibre f_i^{eq} issue du point 2 à l'aide de l'Eq. (2).
4. Calculer $f_i(\mathbf{r} + \tau \mathbf{v}_i, t + \tau)$ à l'aide de l'Eq. (1).
5. Effectuer le “bounce back”.
6. Effectuer l'étape de propagation.
7. Fin de la boucle : revenir au point 2.

On demande de :

i) Programmer l'écoulement de Poiseuille sur un réseau D2Q9.

ii) Comparer le profil des vitesses obtenu avec la prédiction théorique

$$u_x(z) = \frac{F_x}{2\nu} z(h - z).$$