UNIVERSITÉ DE GENÈVE — FACULTÉ DES SCIENCES
Sections d'Informatique et de Physique — Profs. B. Chopard et M. Droz

Outils, modélisation et simulation en calcul numérique – Série 9

17 mai 2005

Exercice 1.
L'aiguille de Buffon.
Un plan est divisé par des droites parallèles à distance L l'une de l'autre. On jette au hasard sur ce plan une aiguille (segment) de longueur $\ell < L$. On demande de :
i) Dériver analytiquement la probabilité que l'aiguille croise la droite.
ii) Programmer l'algorithme correspondant et étudier la convergence en fonction du nombre de lancés N. Imaginer une expérience permettant de déterminer π.

Exercice 2.
Le problème des générateurs de nombres aléatoires.
Considérons l'algorithme simple (*congruent linéaire*) appelé "randu" et qui a équipé les stations de calcul IBM pour longtemps. Un générateur de nombres aléatoires est dit *congruent linéaire* s'il génère une suite de nombres entiers $I_j \in [0, m-1]$, $m \in \mathbb{N}$, par la relation

$$I_{j+1} = aI_j + c \mod m. \tag{1}$$

m est appelé le *module*, et $a, c \in \mathbb{N}$. On a donc $I_j/m \in [0,1]$. On définit le générateur de nombre aléatoires "randu" par les paramètres $c = 0$, $a = 65539$, et $m = 2^{31}$. La routine est généralement utilisée en tant que fonction, par exemple `ran`(*iseed*), où *iseed* est un nombre entier servant à l'initialisation. L'algorithme donnera donc en entrée la valeur *iseed* à I_j, et en sortie la nouvelle valeur *iseed* est I_{j+1} issu de l'Eq. (1). On demande de :
i) Programmer le générateur de nombres aléatoires "randu".
ii) Etudier les moments : calculer les moments $\langle x^k \rangle$ pour quelques valeurs de k à choix et montrer que $\langle x^k \rangle \simeq 1/(k+1)$. Ce résultat est bien le comportement attendu : $\int_0^1 \mathrm{d}x\, x^k = 1/(k+1)$.
iii) Etudier les corrélations : générer des triplets $y_i = \{x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}\}$ de nombres aléatoires consécutifs et mettre en évidence les corrélations.
Indication : si les triplets y_i sont non corrélés, alors ils remplissent le cube unité de façon homogène.

— **Tourner la page** —

Exercice 3.
Intégration Monte-Carlo en dimension 1**.**
Soit

$$I = \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x),$$

alors on peut aussi écrire $I = (b-a)\langle f(x)\rangle$, où $\langle f(x)\rangle$ est la moyenne de $f(x)$ sur l'intervalle $[a,b]$. Supposons que l'on sélectionne de manière uniforme N points x_i dans l'intervalle $[a,b]$, $i = 1,\dots,N$. Alors une approximation de I est

$$I_N = (b-a)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i), \qquad \lim_{N\to\infty} I_N = I.$$

Si la fonction $f(x)$ est très piquée dans certains domaines, cette méthode d'échantillonnage passera beaucoup de fois par des points x_i pour lesquels $f(x_i)$ est négligeable par comparaison. Il est alors judicieux de procéder à un échantillonnage sélectif de sorte à avoir plus de points où $f(x)$ est grande.

Soit $\omega(x)$ une fonction inversible définie sur l'intervalle $[a,b]$ telle que
1) $\omega(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b]$,
2) $\int_a^b \mathrm{d}x\, \omega(x) = 1$,
et soit $u(x)$ telle que $\mathrm{d}u(x) = \omega(x)\mathrm{d}x$, où $u(x) = \int_a^x \mathrm{d}y\, \omega(y)$, $u(a) = 0$, $u(b) = 1$. On a alors

$$I = \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) = \int_a^b \mathrm{d}x\, \omega(x)\frac{f(x)}{\omega(x)} = \int_0^1 \mathrm{d}u\, g(u), \qquad g(u) = \frac{f(x(u))}{\omega(x(u))}.$$

Si maintenant on tire de façon aléatoire N nombres u_i uniformément dans l'intervalle $[a,b]$, $i = 1,\dots,N$, on trouve

$$\widetilde{I}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(u_i), \qquad \lim_{N\to\infty} \widetilde{I}_N = I.$$

Soit

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}x\, \frac{1}{1+x^2} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4},$$

alors on demande de :
i) Calculer I_N et $\widetilde{I}_N$ pour $\omega(x) = (4-2x)/3$.
ii) Etudier la convergence en fonction de N.